

Beweise und Widerlegungen

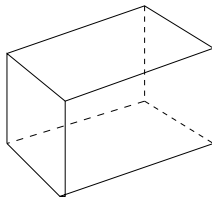
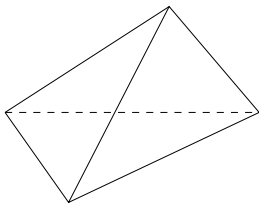
Alberto Abbondandolo

Ruhr-Universität Bochum

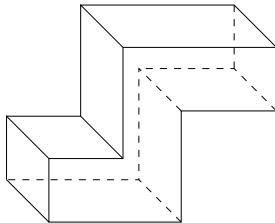
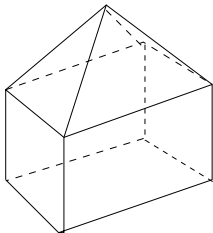
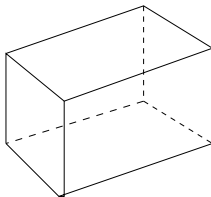
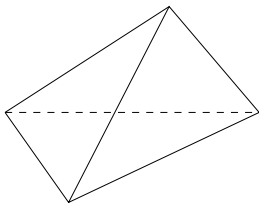
Tag der offenen Tür 2015

Einige Polyeder

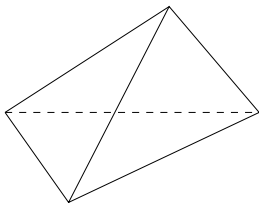
Einige Polyeder



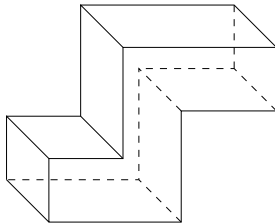
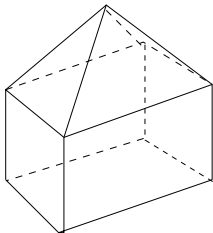
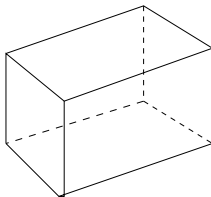
Einige Polyeder



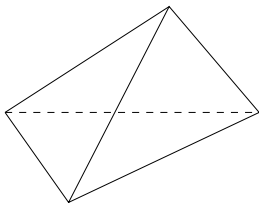
Einige Polyeder



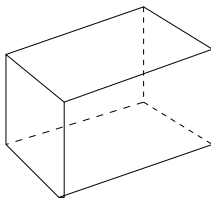
$$E = 4, K = 6, F = 4$$



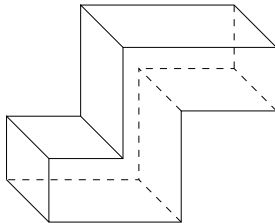
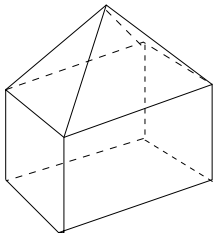
Einige Polyeder



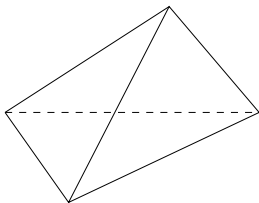
$$E = 4, K = 6, F = 4$$



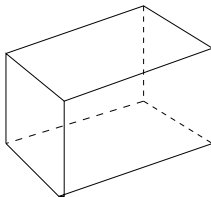
$$E = 8, K = 12, F = 6$$



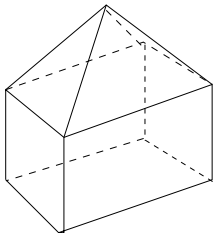
Einige Polyeder



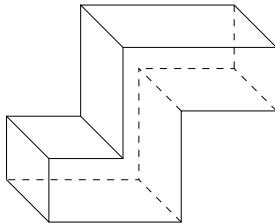
$$E = 4, K = 6, F = 4$$



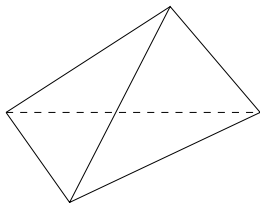
$$E = 8, K = 12, F = 6$$



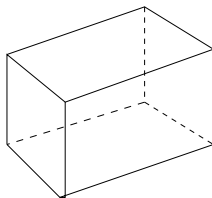
$$E = 9, K = 16, F = 9$$



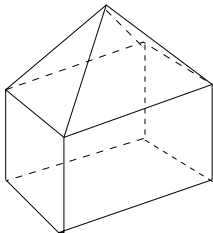
Einige Polyeder



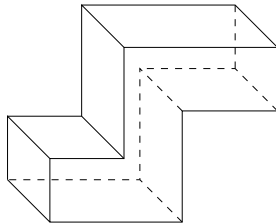
$$E = 4, K = 6, F = 4$$



$$E = 8, K = 12, F = 6$$



$$E = 9, K = 16, F = 9$$



$$E = 16, K = 24, F = 10$$

Eulersche Polyederformel

Eulersche Polyederformel

$$E - K + F = 2$$

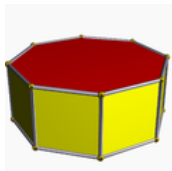
Eulersche Polyederformel

$$E - K + F = 2$$



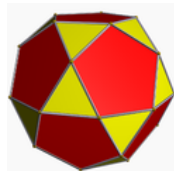
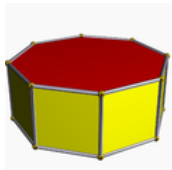
Eulersche Polyederformel

$$E - K + F = 2$$



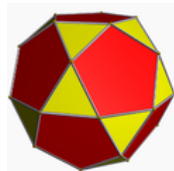
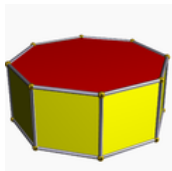
Eulersche Polyederformel

$$E - K + F = 2$$



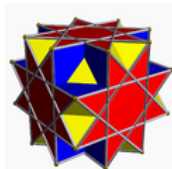
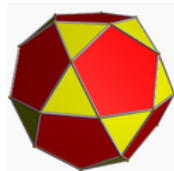
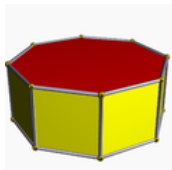
Eulersche Polyederformel

$$E - K + F = 2$$



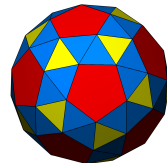
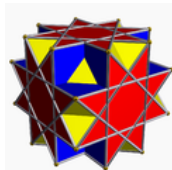
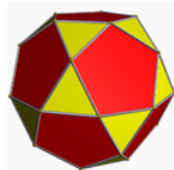
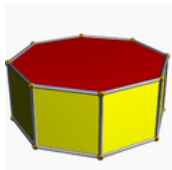
Eulersche Polyederformel

$$E - K + F = 2$$



Eulersche Polyederformel

$$E - K + F = 2$$



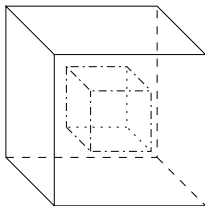
Widerlegung I

Widerlegung I

Die Eulersche Polyederformel ist falsch!

Widerlegung I

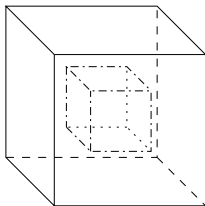
Die Eulersche Polyederformel ist falsch!



$E = 16$, $K = 24$, $F = 12$ und damit $E - K + F = 4$.

Widerlegung I

Die Eulersche Polyederformel ist falsch!

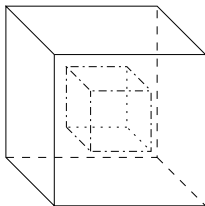


$$E = 16, K = 24, F = 12 \text{ und damit } E - K + F = 4.$$

Definition 1. Ein Polyeder ist eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes, welche ausschließlich von geraden Flächen (Ebenen) begrenzt wird. [Wikipedia, 2015]

Widerlegung I

Die Eulersche Polyederformel ist falsch!



$$E = 16, K = 24, F = 12 \text{ und damit } E - K + F = 4.$$

Definition 1. Ein Polyeder ist eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes, welche ausschließlich von geraden Flächen (Ebenen) begrenzt wird. [Wikipedia, 2015]

Definition 2. Ein Polyeder ist eine Fläche, die aus Vielecken besteht.

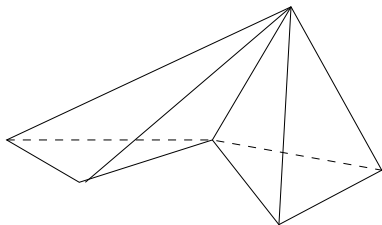
Widerlegung II

Widerlegung II

Die Eulersche Polyederformel ist immer noch falsch!

Widerlegung II

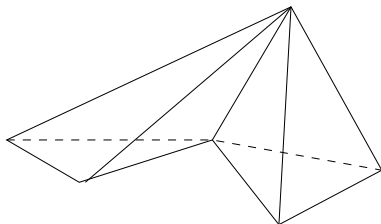
Die Eulersche Polyederformel ist immer noch falsch!



$E = 6$, $K = 11$, $F = 8$ und damit $E - K + F = 3$.

Widerlegung II

Die Eulersche Polyederformel ist immer noch falsch!



$$E = 6, K = 11, F = 8 \text{ und damit } E - K + F = 3.$$

Definition 3. Ein Polyeder ist eine Fläche, die aus Vielecken besteht, so dass jede Kante zu genau zwei Vielecken gehört.

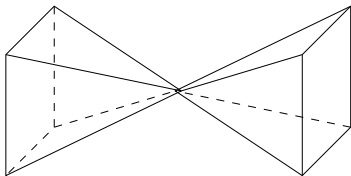
Widerlegung III

Widerlegung III

Die Eulersche Polyederformel ist immer noch falsch!

Widerlegung III

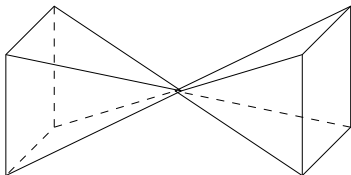
Die Eulersche Polyederformel ist immer noch falsch!



$$E = 9, K = 16, F = 10 \text{ und } E - K + F = 3.$$

Widerlegung III

Die Eulersche Polyederformel ist immer noch falsch!



$$E = 9, K = 16, F = 10 \text{ und } E - K + F = 3.$$

Definition 4. Ein Polyeder ist eine Fläche, die aus Vielecken besteht, so dass jede Kante zu genau zwei Vielecken gehört. Ferner muss die folgende Bedingung gelten: es ist möglich zwei beliebige Punkte, die zu zwei Vielecken gehören, durch einen Weg zu verbinden, der durch keine Ecke läuft.

[Hilbert, Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*, 1932].

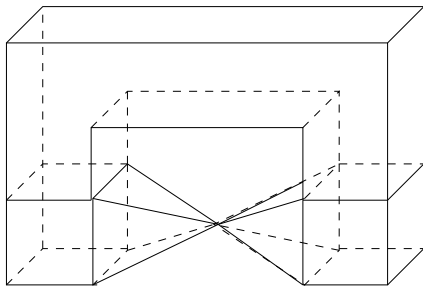
Widerlegung IV

Widerlegung IV

Die anschauliche Geometrie kann trügerisch sein:

Widerlegung IV

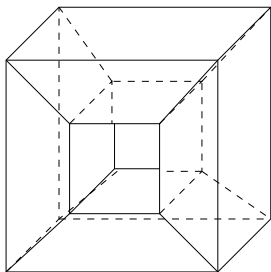
Die anschauliche Geometrie kann trügerisch sein:



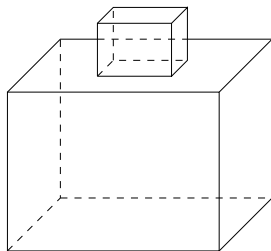
$$E = 25, K = 48, F = 24 \text{ und } E - K + F = 1.$$

Zwei weitere Gegenbeispiele

Zwei weitere Gegenbeispiele



$$E = 16, K = 32, F = 16$$



$$E = 16, K = 24, F = 11$$

Beweiserzeugte Definitionen

Beweiserzeugte Definitionen

Definition 5. Ein Polyeder heißt *schön*, falls es nach der Entfernung eines Vielecks auf der Ebene ausgebreitet werden kann.

Beweiserzeugte Definitionen

Definition 5. Ein Polyeder heißt *schön*, falls es nach der Entfernung eines Vielecks auf der Ebene ausgebreitet werden kann.

Beweiserzeugte Definitionen

Definition 5. Ein Polyeder heißt *schön*, falls es nach der Entfernung eines Vielecks auf der Ebene ausgebreitet werden kann.

Definition 6. Ein Vieleck heißt *einfach*, falls jede Diagonale es in zwei Teile unterteilt.

Beweiserzeugte Definitionen

Definition 5. Ein Polyeder heißt *schön*, falls es nach der Entfernung eines Vielecks auf der Ebene ausgebreitet werden kann.

Definition 6. Ein Vieleck heißt *einfach*, falls jede Diagonale es in zwei Teile unterteilt.

Theorem. Besteht ein schönes Polyeder aus einfachen Vielecken, so gilt:

$$E - K + F = 2.$$

Lesetipps

Lesetipps

I. Lakatos, *Beweise und Widerlegungen - Die Logik mathematischer Entdeckungen*, 1976
(letzte Auflage: Friedr. Vieweg & Sohn 1990).



Lesetipps

I. Lakatos, *Beweise und Widerlegungen - Die Logik mathematischer Entdeckungen*, 1976
(letzte Auflage: Friedr. Vieweg & Sohn 1990).



R. Courant, H. Robbins, *Was ist Mathematik?*,
1941 (letzte Auflage: Springer-Verlag 2000)

Lesetipps

I. Lakatos, *Beweise und Widerlegungen - Die Logik mathematischer Entdeckungen*, 1976 (letzte Auflage: Friedr. Vieweg & Sohn 1990).



R. Courant, H. Robbins, *Was ist Mathematik?*, 1941 (letzte Auflage: Springer-Verlag 2000)

D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*, 1932 (letzte Auflage: Springer-Verlag 1996).

