Osnabrücker Schriften zur Mathematik

Reihe P Preprints
Heft 8 1979

Über Deformationen holomorpher Abbildungen

Hubert Flenner, Osnabrück

Fachbereich Mathematik
Universität Osnabrück

Über Deformationen holomorpher Abbildungen

Habilitationsschrift
vorgelegt von
Hubert Flenner
aus Dortmund

Osnabrück 1978

Inhalt

Einleitung

Bei einer Deformationstheorie von holomorphen Abbildungen sind verschiedene Konzepte denkbar. Ist $f_o: X_o \longrightarrow Y_o$ ein Morphismus von komplexen Räumen, so kann man zum einen unter einer Deformation von f_o, welche durch den Raum (S,s_o) parametrisiert wird, einen Morphismus $f: X_o \times S \longrightarrow Y_o$ mit $f_o | X \times \{s_o\} = f_o$ verstehen. Bei einer solchen Fassung des Begriffs sind sehr schöne Ergebnisse bekannt, wobei vor allem der folgende von Douady in [5] bewiesene Satz erwähnt werden muß: Ist X_o kompakt, so läßt sich die Menge der holomorphen Abbildungen von X_o in Y_o auf natürliche Weise mit der Struktur eines komplexen Raumes versehen.

Nun erweist sich die obige Definition schnell als unzweckmäßig, wenn es etwa um Abbildungen zwischen glatten Raumkeimen geht. Hier sind vor allem die folgenden beiden Begriffsbildungen sinnvoll. Ist $f_o: (\mathbb{C}^n,0) \longrightarrow (\mathbb{C}^r,0)$ eine holomorphe Abbildung, so kann man einerseits unter einer Deformation über (S,s_o) einen (S,s_o)-Morphismus $f: (\mathbb{C}^n,0) \times (S,s_o) \longrightarrow (\mathbb{C}^r,0) \times (S,s_o)$ verstehen, welcher f_o auf $(\mathbb{C}^n,0) \times \{s_o\}$ induziert, wobei eine weitere solche Deformation f' über (S,s_o) als isomorph zu f angesehen wird, wenn es einen (S,s_o)-Morphismus $g: (\mathbb{C}^n,0) \times (S,s_o) \longrightarrow (\mathbb{C}^n,0) \times (S,s_o)$ mit $gf = f'$ gibt, welcher auf der Faser über s_o die Identität von $(\mathbb{C}^n,0)$ induziert, d.h. $(\mathbb{C}^n,0) \times (S,s_o)$ wird als Deformation von $(\mathbb{C}^n,0)$ aufgefasst. Eine zweite Definition erhält man, wenn auf beiden Seiten Automorphismen von Deformationen bei den Raumkeimen zugelassen werden. Unter solchen Gesichtspunkten wurden holomorphe und vor allem C^∞-Abbildungen von Mather und Arnold untersucht. Als ein wichtiges Ergebnis sei die folgende Charakterisierung von stabilen Abbildungen genannt: Eine Abbildung ist genau dann stabil, wenn sie infinitesimal stabil ist (vgl. [1]).

Die ersten Bemühungen, entsprechend für holomorphe Abbildungen zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten Resultate zu erzielen, wurden von Horikawa [12] , [23] unternommen. Dabei gelang es ihm, in einigen Spezialfällen, z.B. für glatte Abbildungen unter einer zusätzlichen Bedingung, mit den Methoden von Kodaira, Nirenberg und Spencer aus [30] verselle Deformationen zu konstruieren. Für Abbildungen zwischen singulären Raumkeimen wurden Ergebnisse von Retakh in der Note [39] angekündigt.

Wir wollen hier stets die folgenden Begriffsbildungen betrachten. Seien $f_o: X_o \longrightarrow Y_o$, $g_o: Y_o \longrightarrow Z_o$ holomorphe Abbildungen von komplexen Räumen. Unter einer Deformation von f_o relativ Z_o über dem Raum (S,s_o) verstehen wir eine Deformation $X \longrightarrow S$ von X_o, eine Deformation $Y \longrightarrow S$ von Y_o und S-Morphismen

$$f: X \longrightarrow Y, \quad g: Y \longrightarrow Z_o,$$

welche die Abbildungen f_o bzw. g_o auf den Fasern über s_o induzieren. Eine weitere Deformation

$$f': X' \longrightarrow Y', \quad g': Y' \longrightarrow Z_o$$

von f_o/Z_o über (S,s_o) wird dabei als isomorph zu der obigen Deformation angesehen, wenn es nach geeigneter Verkleinerung von S bzw. X,X' bzw. Y,Y' als Umgebungen von s_o bzw. X_o bzw. Y_o Isomorphismen von Deformationen $h_1: X' \longrightarrow X$ und $h_2: Y' \longrightarrow Y$ gibt mit

$$fh_1 = h_2 f' \quad \text{und} \quad gh_2 = g'.$$

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist es, die zugehörige infinitesimale Deformationstheorie darzustellen und für die wichtigsten Fälle verselle Deformationen zu konstruieren.

Im einzelnen läßt sich der Inhalt wie folgt beschreiben.

Zu Beginn von Kapitel I wird zunächst der Kotangentenkomplex für komplexe Räume eingeführt. Im algebraischen Fall ist diese Theorie wohlbekannt und wurde von André, Quillen u.a. für den affinen Fall und von Illusie in der allgemeinen Situation entwickelt. Dabei wird der Kotangentenkomplex über semisimpliziale Algebraauflösungen der Strukturgarbe definiert. In [38] stellte nun Quillen fest, daß man in der Charakteristik 0 anstelle semisimplizialer Auflösungen auch Auflösungen durch (DG)-Algebren wählen kann. Diese Beobachtung benutzte dann erstmals Palamodov in [34], um über solche Auflösungen mit (DG)-Algebren für komplexe Räume Tangentenfunktoren T^i, $i \geq 0$, und einen sogenannten Tangentenkomplex zu definieren, mit dessen Hilfe es ihm gelang, verselle Deformationen für kompakte komplexe Räume zu konstruieren.

Wir haben bei unserer Definition des Kotangentenkomplexes diesen Ansatz aufgegriffen. In §1 A,B,C entwickeln wir zunächst die Theorie für analytische Algebren und dann in §2 für komplexe Räume, wobei wir folgendermaßen vorgehen. Für einen Homomorphismus

$A \longrightarrow B$ von analytischen Algebren wird B durch eine freie (DG)-Algebra aufgelöst und dann $L^{\bullet}_{B/A}$ definiert als der zugehörige Differentialmodul $\Omega_{R/A} \otimes_R B$. Bei der Definition des globalen Kotangentenkomplexes verwenden wir die Methode der verbundenen Garbensysteme, die von Forster und Knorr in [12] eingeführt wurden. Dabei lösen wir für einen Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ von komplexen Räumen analog wie oben die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ durch ein geeignetes verbundenes Garbensystem $\{\mathcal{R}_\alpha\}_\alpha$ von (DG)-Algebren auf. Der Kotangentenkomplex ist dann der Komplex

$$C^{\bullet}(\Omega_{\mathcal{R}_\alpha/Y} \otimes_{\mathcal{R}_\alpha} \mathcal{O}_X)$$

wenn $C^{\bullet}(\cdots)$ den zu dem verbundenen Garbensystem gehörigen Čechkomplex bezeichnet. Es zeigt sich, daß dieser Komplex als Objekt der derivierten Kategorie D(X) von Mod(X) bis auf eindeutig bestimmte Isomorphie wohldefiniert ist und sich funktoriell in X und Y verhält ((2.17)). Ferner erhält man für einen weiteren Morphismus $Y \longrightarrow Z$ und geeignete Repräsentanten der Kotangentenkomplexe eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \underline{\underline{L}}f^*(L^{\bullet}_{Y/Z}) \longrightarrow L^{\bullet}_{X/Z} \longrightarrow L^{\bullet}_{X/Y} \longrightarrow 0$$

vgl. (2.25).

Der Kotangentenkomplex wird in §3 für den globalen Fall und vorbereitend in §1 D,E für analytische Algebren dazu benutzt, um für eine holomorphe Abbildang $f: X \longrightarrow Y$ von Räumen über einem weiteren komplexen Raum Z Tangentenfunktoren $T^i(f/Z,-)$ einzuführen, welche auf der Kategorie der $\mathcal{O}_Y$-Moduln definiert sind. Dabei sind diese Gruppen und die üblichen Tangentenfunktoren $T^i(X/Y,\mathcal{N})$, $T^i(Y/Z,\mathcal{N})$ für jeden $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{N}$ durch eine exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow T^{i-1}(Y/Z,\mathcal{N}) \longrightarrow T^i(X/Y,f^*(\mathcal{N})) \longrightarrow T^i(f/Z,\mathcal{N}) \longrightarrow T^i(Y/Z,\mathcal{N}) \longrightarrow \cdots$$

verbunden, vgl. (3.4). Nach Vorbereitungen in §3 B beschreiben wir dann in §3 C und D den Zusammenhang dieser Tangentenfunktoren mit der Deformationstheorie von Abbildungen: Wir zeigen, daß die Elemente von $T^0(f/Z,\mathcal{N})$ in natürlicher Weise als Automorphismen von Erweiterungen von f/Z durch $\mathcal{N}$ interpretiert werden können ((3.11)), daß die Gruppe $T^1(f/Z,\mathcal{N})$ die Isomorphieklassen von Erweiterungen beschreibt ((3.16)) und daß man mit den Funktoren $T^2(f/Z,\mathcal{N})$ eine Obstruktionstheorie für das Fortsetzen von Erweiterungen erhält ((3.18)). Es sei angemerkt, daß diese Ergebnisse insbesondere die analogen Interpretationen für die Tangentenfunktoren $T^I(X/Y,-)$ enthalten.

Im Jahre 1974 bewies M.Artin in [3] für die algebraische Geometrie unter sehr allgemeinen Voraussetzungen, daß bei hinreichend "schönen" Deformationstheorien die Versalität eine offene Eigenschaft ist. Die analoge Aussage in der analytischen Geometrie wurde kürzlich von J.Bingener gezeigt, wobei er die Methode von Artin auf die komplexe Analysis übertrug. Wir wollen in §4 für diesen Satz einen weiteren Beweis angeben, der zum einen einfacher ist als der von Artin und Bingener und zum anderen sich ohne wesentliche Änderungen auf den algebraischen Fall überträgt. Dabei erhalten wir die Offenheit der formalen Versalität - die äquivalent zur Versalität ist, wenn es überhaupt verselle Deformationen gibt (vgl. (8.1)) - durch geeignete Forderungen an die Moduln von Isomorphieklassen von Erweiterungen einer vorgegebenen Deformation und an eine Obstruktionstheorie, wobei sich diese Bedingungen in der Praxis sehr einfach nachprüfen lassen. Dieser Satz wird dann benutzt, um die Offenheit der Versalität in einigen wichtigen Beispielen nachzuweisen: bei Deformationen von Abbildungen zwischen kompakten Räumen, bei Deformationen kompakter komplexer Räume, bei Deformationen isolierter Singularitäten und schließlich bei Deformationen von Moduln. In einem Anhang E wird unter Zuhilfenahme des Kotangentenkomplexes eine Obstruktionstheorie für Deformationen von Moduln skizziert.

Mit Deformationen von Abbildungskeimen beschäftigen wir uns in Kapitel II, wobei das Hauptergebnis der folgende Satz (5.1) ist: Für einen Morphismus $f_o:(X_o,x_o)\longrightarrow(Y_o,y_o)$ von Keimen komplexer Räume über einem weiteren Raum Z_o existiert eine verselle Deformation, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:
(i) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}^1(f_o/Z_o,\mathcal{O}_{Y_o})_{x_o})<\infty$ (d.h. die Isomorphieklassen von Deformationen über dem Doppelpunkt bilden einen endlichdimensionalen Vektorraum) (ii) $\mathcal{T}^1(X_o/Y_o,\mathcal{O}_{X_o})$ liegt endlich über Y_o.-

Es sei angemerkt, daß für den wichtigen Spezialfall $Z_o=*$, das sei der einpunktige reduzierte komplexe Raum, dieser Satz von Retakh in [39] angekündigt wurde. Der mühselige Beweis stützt sich auf die banachanalytischen Methoden von Douady und auf die Arbeiten [35], [36] von Pourcin. In §6 werden zunächst vorbereitende Betrachtungen angestellt. In §7 C führen wir dann als

das entscheidende Hilfsmittel den Raum $G_m(Y_m\times K)$ ein, der in gewisser Weise alle "eingebetteten" Deformationen von f_o/Z_o enthält. Mit diesem Raum gelingt es, die gesuchte verselle Deformation zu konstruieren. Für den Spezialfall von Deformationen isolierter Singularitäten verläuft dabei der Beweis ähnlich wie in [35].

In Kapitel III beschäftigen wir uns mit einigen weiteren Modulproblemen. Zunächst zeigen wir in §8, daß für eine Abbildung $f_o:X_o\longrightarrow Y_o$ zwischen kompakten Räumen über dem (beliebigen) Raum Z_o stets eine verselle Deformation existiert (vgl. (8.5)). Es stellt sich heraus, daß dies eine einfache Folgerung aus dem Satz über die Existenz von Deformationen kompakter komplexer Räume (vgl. [6], [10], [16], [34]) und dem Satz von Douady und Pourcin über die Existenz des Hilbertschen Modulraumes (für den relativen Fall) ist. Mit einer ähnlichen Methode ergibt sich die Existenz von versellen Deformationen bei Moduln ((8.6)): Sei $X\to S$ eine flache eigentliche holomorphe Abbildung, $s_o\in S$ und $\mathcal{M}_o$ ein kohärenter $\mathcal{O}_{X_{s_o}}$-Modul. Dann gibt es einen Raum (T,t_o) über (S,s_o) und einen kohärenten Modul auf $X\times_S T$, welcher eine verselle Deformation von $\mathcal{M}_o\cong\mathcal{M}_{t_o}$ ist. Ein allgemeineres Resultat für den Fall $S=*$ wurde von Siu und Trautmann erzielt.

Sei $f:X\longrightarrow S$ weiter eine flache eigentliche holomorphe Abbildung. In seinem Vortrag: "Quelques problèmes des modules" im Séminaire Cartan stellte Grothendieck 1961 die Frage, ob der relative Picardfunktor $\mathrm{Pic}_{X/S}$ darstellbar ist, wenn f kohomologisch flach in der Dimension 0 ist. Das entsprechende Problem in der algebraischen Geometrie wurde 1968 von Artin in [2] gelöst.

Wir zeigen in §9, daß auch im analytischen Fall die Frage von Grothendieck positiv beantwortet werden kann. Die entscheidenden Hilfsmittel beim Beweis sind der Satz über die Offenheit der Versalität und der Satz über die Existenz von versellen Deformationen bei Moduln. Der Picardsche Modulraum wird dann ähnlich wie bei Artin aus den lokalen Deformationen von invertierbaren Garben zusammengesetzt.

Herrn Prof.Dr.U.Storch danke ich herzlich für die ständige Ermunterung zur Fertigstellung dieser Arbeit. Ganz besonders schulde ich Herrn Priv.-Doz.Dr.J.Bingener Dank für die zahlreichen Anregungen, die mir aus den Diskussionen mit ihm erwuchsen.

Bezeichnungen

<u>An</u>, <u>An</u>/S, <u>An</u>/(S,s_o)	Kategorie der komplexen Räume bzw. der komplexen Räume über S bzw. der komplexen Raumkeime über dem Raumkeim (S,s_o)
Tr($\mathcal{M}$)	Träger der Garbe $\mathcal{M}$
<u>Coh</u>(T)	Kategorie der kohärenten $\mathcal{O}_T$-Moduln
<u>Mod</u>(T)	Kategorie der $\mathcal{O}_T$-Moduln
<u>Ab</u>(T)	Kategorie der Garben von abelschen Gruppen auf T
$\varkappa(t)$	derjenige $\mathcal{O}_T$-Modul, welcher Null auf T\{t} ist und dessen Halm im Punkt t isomorph zu $\mathbb{C}$ ist.
X[$\mathcal{M}$]	Idealisierung von X durch den kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$
$*$	der einpunktige reduzierte Raum

Die betrachteten komplexen Räume seien separiert und abzählbar im Unendlichen, falls nichts anderes angegeben ist.

Die betrachteten Kategorien seien $\mathfrak{U}$-klein, wobei $\mathfrak{U}$ ein geeignetes Universum ist.

Zum Gebrauch der Begriffe versell, semiuniversell usw. siehe §4, S.66 oder auch §8 A.

Z-offen bzw. Z-abgeschlossen: offen bzw. abgeschlossen bzgl. der Zariski-Topologie.

Kapitel I. Der Kotangentenkomplex in der analytischen Geometrie

§1. Der Kotangentenkomplex für analytische Algebren

In diesem Paragraphen sei k stets ein bewerteter Körper der Charakteristik 0. Alle betrachteten analytischen k-Algebren mögen den Restekörper k besitzen.

A. Antikommutative graduierte Algebren

Unter einer graduierten antikommutativen analytischen k-Algebra wollen wir einen assoziativen Ring R mit Eins verstehen, der mit einer Graduierung $R = \coprod_{i \leq 0} R^i$ versehen ist derart, daß gilt:

(1) Für $x \in R^i$ und $y \in R^j$ ist

$$xy = (-1)^{ij}\, yx \in R^{i+j}$$

(2) R^o ist eine analytische k-Algebra im üblichen Sinne.

(3) Alle R^i sind endliche R^o-Moduln.

Unter einem Homomorphismus zwischen solchen Algebren wollen wir einen Ringhomomorphismus verstehen, welcher mit der Graduierung verträglich ist und auf der nullten homogenen Komponente ein Homomorphismus analytischer k-Algebren ist.

Wir definieren nun den Begriff des graduierten R-Moduls. Ein graduierter R-Modul ist ein R-Bimodul M mit einer Graduierung $M = \coprod_{i \in \mathbb{Z}} M^i$, so daß für $x \in R^i$ und $m \in M^j$ gilt:

$$xm = (-1)^{i \cdot j}\, mx \in M^{i+j}.$$

Ist M ein graduierter R-Modul, so wollen wir mit g(m) kurz den Grad eines homogenen Elementes m in M bezeichnen.

Sind M und N graduierte R-Moduln, so trägt das Tensorprodukt $M \otimes_R N$ eine Bimodul-Struktur. Für $x \in R$, $m \in M$ und $n \in N$ ist

$$x(m \otimes n) = (xm) \otimes n$$

und

$$(m \otimes n)x = m \otimes (nx).$$

Sind x,m,n homogen, so gilt offenbar

$$x(m\otimes n) = (-1)^{g(x)\cdot(g(m)+g(n))}(m\otimes n)x .$$

$M\otimes_R N$ trägt daher auf natürliche Weise die Struktur eines graduierten R-Moduls.

Unter einem Homomorphismus vom Grade p zwischen zwei graduierten R-Moduln M und N wollen wir einen Homomorphismus φ von Rechtsmoduln verstehen mit $\varphi(M^n)\subseteq N^{n+p}$ für alle $n\in\mathbb{Z}$. Es sei

$$\mathrm{Hom}_R(M,N) = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(M,N)^n ,$$

wobei $\mathrm{Hom}_R(M,N)^n$ die Menge aller Homomorphismen vom Grade n bezeichnet. Offenbar ist $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ eine Teilmenge der Menge aller Rechtsmodulhomomorphismen von M in N. Diese Mengen stimmen überein, wenn M endlicher R-Modul ist.

$\mathrm{Hom}_R(M,N)$ trägt die Struktur eines graduierten R-Moduls. Sind $\varphi\in\mathrm{Hom}_R(M,N)$, $x\in R$ und $m\in M$, so sei

$$(x\varphi)(m) := x\varphi(m)$$

und

$$(\varphi x)(m) := \varphi(xm) .$$

Offenbar ist dann für x,φ homogen $x\varphi = (-1)^{g(x)g(\varphi)}\varphi x$.

Seien $A\to B$ und $A\to C$ Homomorphismen graduierter antikommutativer analytischer k-Algebren. Dann kann man ein "analytisches" Tensorprodukt $B\tilde{\otimes}_A C$ wie folgt bilden. Es sei $B^o\tilde{\otimes}_{A^o}C^o$ das übliche analytische Tensorprodukt, $A' := A\otimes_{A^o}(B^o\tilde{\otimes}_{A^o}C^o)$, $B' := B\otimes_{B^o}(B^o\tilde{\otimes}_{A^o}C^o)$ und $C' := C\otimes_{C^o}(B^o\tilde{\otimes}_{A^o}C^o)$. Wir setzen $B\tilde{\otimes}_A C := B'\otimes_{A'}C'$. Offenbar ist $B\tilde{\otimes}_A C$ wieder eine graduierte antikommutative analytische k-Algebra.

Ähnlich wie für kommutative Ringe kann man über antikommutativen graduierten Algebren äußere und symmetrische Potenzen definieren, vgl. [38], p. 82. Wir skizzieren dies für die symmetrischen Potenzen. Ist M ein graduierter R-Modul, so sei $S^p_R(M)$ oder einfach $S^p(M)$ der Quotient von

$$M\otimes_R\cdots\otimes_R M \qquad (p\text{-mal})$$

nach dem Untermodul, der von den Elementen der Form

$$m_1\otimes\cdots\otimes m_i\otimes m_{i+1}\otimes\cdots\otimes m_p - (-1)^{g(m_i)g(m_{i+1})}\, m_1\otimes\cdots\otimes m_{i+1}\otimes m_i\otimes\cdots\otimes m_p$$

erzeugt wird. Man überlegt sich leicht, daß $S(M) := \coprod_{p\geq 0} S^p(M)$ eine graduierte antikommutative R-Algebra ist mit dem Produkt

$$(m_1\vee\cdots\vee m_p)(m'_1\vee\cdots\vee m'_q) := m_1\vee\cdots\vee m_p\vee m'_1\vee\cdots\vee m'_q .$$

Allerdings ist die nullte homogene Komponente von S(M) i.A. keine analytische Algebra.

Wir wollen nun eine modifizierte symmetrische Potenz $\tilde{S}(M)$ beschreiben, welche die Eigenschaft hat, daß $\tilde{S}(M)$ wieder eine graduierte antikommutative analytische k-Algebra ist. Sei M ein graduierter R-Modul mit $M^n=0$ für $n>0$ derart, daß M^n ein endlicher R-Modul ist für alle $n\in\mathbb{Z}$. Wir definieren dann $\tilde{S}(M)$ folgendermaßen. Sei $\tilde{R}^o$ die analytische R^o-Algebra, die zu der Lokalisierung von $S_{R^o}(M^o)$ nach dem homogenen maximalen Ideal gehört. Wir definieren dann

$$\tilde{S}(M) := S(M)\otimes_{S_{R^o}(M^o)}\tilde{R}^o .$$

Offenbar ist $\tilde{S}(M)^o = \tilde{R}^o$.

(1.1) Beispiele: 1) Sei A eine analytische k-Algebra und M ein A-Modul. Mit $M[n]$ wollen wir den graduierten A-Modul mit $M[n]^i = 0$ für $i\neq -n$ und $M[n]^{-n} = M$ bezeichnen. A fassen wir dabei als graduierte antikommutative Algebra auf, welche im Grad 0 konzentriert ist. Dann ist $S(M[n])$ isomorph zu der üblichen symmetrischen Algebra S(M) als A-Modul, falls n gerade ist, und es ist $S(M[n])\cong\bigwedge M$, der äußeren Algebra von M, falls n ungerade ist.

2) Sei E eine Menge und $g:E\to\mathbb{Z}_{\leq 0}$ eine Gradfunktion mit $|g^{-1}(n)|<\infty$ für $n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}$. Dann bezeichnen wir mit $R[E]$ die freie antikommutative graduierte analytische k-Algebra $\tilde{S}(R^E)$, wobei R^E der freie graduierte R-Modul mit der Basis E ist.

Wir wollen uns nun Derivationen von graduierten antikommutativen Algebren zuwenden. Sei R eine antikommutative graduierte analytische k-Algebra und M ein R-Rechtsmodul. Unter einer Derivation von R in M versteht man eine Abbildung $d:R\to M$, die der Produktregel

$$d(xy) = d(x)\cdot y + (-1)^{g(x)g(y)} d(y)\cdot x$$

genügt für homogene $x,y \in R$.

Die folgende Aussage beweist man wie im kommutativen Fall:

<u>(1.2) Lemma:</u> Sei $S:=R[E]$ eine freie R-Algebra und M ein graduierter S-Modul derart, daß M^i separierter S^o-Modul ist für alle i. Dann gibt es zu jeder Abbildung $d_o:E\to M$ genau eine R-Derivation $d:S\to M$ mit $d|E=d_o$.

Als Folgerung erhält man daraus leicht, daß es für jeden Homomorphismus antikommutativer graduierter Algebren $R\to S$ einen universell endlichen Differentialmodul gibt. Dabei wollen wir unter einem universell endlichen Differentialmodul einen graduierten S-Modul $\Omega_{S/R}$ und eine R-Derivation $d_{S/R}:S\to\Omega_{S/R}$ vom Grad 0 verstehen mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\Omega^i_{S/R}$ ist ein endlicher S^o-Modul für alle i.

(2) Sei M ein graduierter S-Modul, welcher als S^o-Modul separiert ist, und es sei $d:S\to M$ eine R-Derivation. Dann gibt es genau eine S-lineare Abbildung $h:\Omega_{S/R}\to M$ mit $d=h\cdot d_{S/R}$.

Ist $S=R[E]$ eine freie R-Algebra, so ist der universell endliche Differentialmodul $\Omega_{S/R}$ nichts anderes als der freie S-Modul mit der Basis E. Ist S ein Quotient der freien R-Algebra $R[E]$, so ist $\Omega_{S/R}$ der Quotient von $\Omega_{R[E]/R}\otimes_{R[E]} S$ nach dem Untermodul, der erzeugt wird von Elementen der Form

$$d_{R[E]/R}(x)$$

mit $x\in \mathrm{Ker}(R[E]\to S)$.

<u>B. Resolventen</u>

Unter einer <u>(DG)-Algebra</u> wollen wir im folgenden eine graduierte antikommutative analytische k-Algebra R verstehen zusammen mit einer R^o-Derivation $s:R\to R$ vom Grade 1 mit $s^2=0$.

Unter einem <u>Homomorphismus</u> von (DG)-Algebren wollen wir einen Homomorphismus von graduierten antikommutativen analytischen k-Algebren verstehen, welcher mit dem Differential verträglich ist. Sind $R\to T$, $S\to T$ Homomorphismen von (DG)-Algebren, so trägt offenbar auch $S\otimes_R T$ eine (DG)-Algebra-Struktur. Das Differential ist dabei gegeben durch

$$e(x\otimes y) := e(x)\otimes y + (-1)^{g(x)} x\otimes s(y).$$

<u>(1.3) Definition:</u> Sei $A\to B$ ein Homomorphismus von (DG)-Algebren. Eine (DG)-A-Algebra R zusammen mit einem surjektiven A-Homomorphismus $R\to B$ heißt eine <u>Resolvente</u> für B/A, wenn R eine freie A-Algebra und $R\to B$ ein Quasiisomorphismus von Komplexen ist.

Die Existenz einer Resolvente zeigt die folgende Aussage, vgl. auch [34], prop.(1.1).

<u>(1.4) Satz</u>: Jede (DG)-Algebra B über der (DG)-Algebra A besitzt eine Resolvente.

<u>Beweis:</u> Wir wollen rekursiv eine aufsteigende Folge von freien (DG)-Algebren über A

$$A\subseteq R_0\subseteq R_{-1}\subseteq\cdots$$

mit verträglichen A-Homomorphismen $R_k\to B$ konstruieren derart, daß $Z^i_k\to Z^i$ surjektiv ist für $i\geq k$ und $H^i(R_k)\to H^i(B)$ bijektiv ist für $i>k$. Dabei haben wir mit Z^i_k bzw. Z^i die Zykeln der Dimension i des Komplexes R_k bzw. B bezeichnet. Im Falle k=0 seien $x_\alpha\in \mathfrak{m}_{B^o}$ endlich viele Elemente derart, daß die Abbildung $A^o\{X_\alpha\}_\alpha \longrightarrow B^o$ mit $X_\alpha\mapsto x_\alpha$ surjektiv ist. Wir definieren dann $R_o:=A[X_\alpha]_\alpha$. Sei nun $k\leq 0$ und die Algebra R_k schon konstruiert. Wir setzen

$$I^j_k := \mathrm{Bild}(R^{j-1}_k \longrightarrow R^j_k)$$

und $H^j_k := Z^j_k / I^j_k$.

Analog definiert man I^j, H^j für den Komplex B. Seien $x_\sigma\in Z^k_k$ endlich viele Elemente, deren Restklassen in H^k_k den Kern der Abbildung $H^k_k\to H^k$ als R^o_k-Modul erzeugen. Es gibt dann Elemente $x'_\sigma\in B^{k-1}$ so daß die Bilder von x_σ und x'_σ in Z^k übereinstimmen. Wir wählen außerdem eine endliche Anzahl von Elementen $x'_\varrho \in Z^{k-1}$, welche Z^{k-1} als B^0-Modul erzeugen. Dann sel $R_{k-1} := R_k[e_\sigma, e_\varsigma]_{\sigma,\varsigma}$, wobel die e_σ und e_ς Erzeugende vom Grad k-1 seien. Die Derivation von R_k wird auf R_{k-1} fortgesetzt vermöge der Zuordnung $e_\sigma \mapsto x_\sigma$, $e_\varsigma \mapsto 0$. Man überlegt sioh leioht, daß R_{k-1} mit dieser Derivatlon eine (DG)-Algebra lst. Der Homomorphismus $R_{k-1} \longrightarrow B$ wird definlert duroh $e_\sigma \mapsto x'_\sigma$, $e_\varsigma \mapsto x'_\varsigma$. R_{k-1} hat dann die geforderten Eigensohaften, wie man leioht sieht.-

<u>(1.5) Bemerkung:</u> Sel $A \rightarrow B$ ein Homomorphismus analytisoher Algebren. Dann glbt es eine Resolvente R, welohe "minimal" lst, d.h. es gilt:

$$s(R^k) \subseteq J^2 + \mathfrak{m}_{R^0} J \qquad \text{für } k < -1$$

und

$$s(R^{-1}) \subseteq \mathfrak{m}^2_{R^0} + \mathfrak{m}_A R^0 .$$

Dabei haben wir mit J das homogene Ideal $\coprod_{i<0} R^i$ von R bezeiohnet.

<u>Beweis:</u> Es werden die Bezeiohnungen aus dem Beweis des vorausgegangenen Satzes überuommen. Wir konstruieren eine Resolvente $R = \varinjlim R_k$ folgendermaßen. Es sel $R_0 = A\{\underline{X}\}$ derart, daß die Bilder der X_i in $B/\mathfrak{m}_A B$ das maximale Ideal minimal erzeugen. Für $k \leq 0$ konstruieren wir $R_{k-1} = R_k[e_\sigma]_\sigma$ aus R_k so, daß die Restklassen der Elemente $s(e_\sigma)$ in H^k_k diesen R^0-Modul mininal erzeugen. Wir wollen für die so erhaltene Resolvente die Behauptung naohweisen.

Es reicht dazu offenbar zu zeigen, daß der Keru der Abbildung $R^0 \longrightarrow B$ in $\mathfrak{m}^2_{R^0} + \mathfrak{m}_A R^0$ liegt und daß für $k \leq 0$ der Kern der Abbildung $R^{k-1}_{k-1} \longrightarrow R^k_{k-1}$ in $J^2 + \mathfrak{m}_{R^0} J$ enthalten ist. Der erste Teil dieser Aussage folgt unmittelbar aus der Konstruktion. Sei nun $k \leq 0$. Der Keru der Abbildung $R^{k-1}_{k-1} \longrightarrow R^k_{k-1} = R^k_k$ liegt offenbar im Keru von $R^{k-1}_{k-1} \longrightarrow R^k_k$. Wegen $J^2 \cap R^{k-1}_{k-1} = R^{k-1}_k$ induziert der letztere Homomorphismus eine Abbildung

$$R^{k-1}_{k-1} / J^2 \cap R^{k-1}_{k-1} \cong \coprod_\sigma R^0 e_\sigma \longrightarrow H^k_k ,$$

welche modulo $\mathfrak{m}_{R^0}$ injektiv ist nach Konstruktion. Folglich ist sogar der Kern der Abbildung $R^{k-1}_{k-1} \longrightarrow H^k_k$ enthalten in $J^2 + \mathfrak{m}_{R^0} J$, q.e.d.

<u>(1.6) Satz:</u> Gegeben sei ein kommutatives Diagramm von (DG)-Algebren

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & S \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \beta \\ R & \xrightarrow[\gamma]{} & B \end{array}$$

wobei R eine freie A-Algebra und $S \longrightarrow B$ ein surjektlver Quasilsomorphismus ist. Dann gibt es einen A-Homomorphlsmus $\varphi: R \longrightarrow S$ mit $\beta\varphi = \gamma$.

<u>Beweis:</u> Sei R_k die durch alle homogenen Elemente vom Grad $\geq k$ erzeugte Unteralgebra von R. Es ist R_{k-1} eine freie R_k-Algebra, und alle R_k sind (DG)-Unteralgebren von R. Wlr konstruieren rekursiv verträgliche A-Homomorphismen $R_k \xrightarrow{\varphi_k} S$ mit $\beta\varphi_k = \gamma | R_k$. Für k=1 lst niohts zu zeigen. Nehmen wir an, die Behauptung ist für R_k sohon naohgewiesen. Seien $e_\sigma \in R^{k-1}_{k-1}$ ein freies homogenes Algebra-Erzeugendensystem für R_{k-1} über R_k. Mit s wollen wir die Differentiale der (DG)-Algebren bezeiohnen. Sei x_σ das Bild von $s(e_\sigma) \in R^k_k$ unter φ_k in S^k. Weil $S \longrightarrow B$ ein surjektiver Quasiisomorphismus ist, gibt es ein Element $y_\sigma \in S^{k-1}$ mit $s(y_\sigma) = x_\sigma$ derart, daß die Bilder von y_σ und e_σ in B übereinstimmen. Durch $e_\sigma \mapsto y_\sigma$ wird dann ein Homomorphismus $R_{k-1} \longrightarrow S$ mit den geforderten Eigenschaften definiert.-

Sei A eine (DG)-Algebra. Unter einem <u>(DG)-Modul</u> über A wollen wir einen graduierten A-Modul M zusammen mit einem Differential s auf M vom Grade 1 verstehen, welches der Produktregel

$$s(xm) = s(x)m + (-1)^{g(x)g(m)} s(m)x$$

genügt für homogene x in R und m in M.

Sind M und N (DG)-Moduln, so tragen auch $M \otimes_A N$ und $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ die Struktur von (DG)-Moduln. Die Differentiale sind dabei gegeben durch

$$s(m \otimes n) := s(m) \otimes n + (-1)^{g(m)} m \otimes s(n)$$

für homogene $m \in M$, $n \in N$, bzw. durch

$$s(f)\ (m) := s(f(m)) - (-1)^{g(f)} f(s(m))$$

für homogenes $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$.

Ist $A \to A'$ ein Homomorphismus von (DG)-Algebren, so ist $M' := M \otimes_A A'$ sogar ein (DG)-Modul über A'. Das Differential definiert man dabei wie oben.

Für einen (DG)-Modul M bezeichnen wir mit $M[k]$ den folgenden (DG)-Modul. Als A-Rechtsmodul sei $M[k] := M$. Die Graduierung definieren wir durch $M[k]^n := M^{n+k}$ und die Linksmultiplikation durch $x \cdot m := (-1)^{g(x)k} xm$

für $x \in R$ homogen und $m \in M$. Das Differential sei $(-1)^k s$. Man überlegt sich leicht, daß $M[k]$ wieder ein (DG)-Modul ist.

Für den nächsten Satz benötigen wir eine Hilfsaussage.

<u>(1.7) Lemma:</u> Sei $A \to A'$ ein Homomorphismus von (DG)-Algebren, welcher ein Quasiisomorphismus ist, und es sei M ein freier (DG)-A-Modul mit $M^i = 0$ für $i \gg 0$. Dann ist auch $M \to M' := M \otimes_A A'$ ein Quasiisomorphismus.

<u>Beweis:</u> Wir machen zunächst die folgende Vorbemerkung. Ist

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

eine exakte Sequenz von freien (DG)-Moduln und ist die Abbildung $M_i \to M_i' := M_i \otimes_A A'$ ein Quasiisomorphismus für $i = 1, 3$, so ist auch $M_2 \to M_2'$ ein Quasiisomorphismus.

Die Behauptung des Lemmas ist offenbar richtig für freie Moduln M vom Rang 1. Ist M ein endlicher freier Modul, so ergibt sich die Aussage leicht aus der Vorbemerkung, da es eine Filtrierung von M durch (DG)-Untermoduln

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \quad \cdots \subseteq M_n = M$$

gibt derart, daß die Quotienten M_i/M_{i-1} frei vom Rang 1 sind. Der allgemeine Fall folgt nun mit einem einfachen Limesargument.-

Wir können nun die folgende Aussage zeigen.

<u>(1.8) Satz:</u> Sei $B \to C$ ein Homomorphismus von (DG)-A-Algebren, $R_{B/A}$ eine Resolvente für B/A und $R_{C/A}$ eine Resolvente für C/A, welche eine freie $R_{B/A}$-Algebra ist. Dann ist

$$R_{C/B} := R_{C/A} \otimes_{R_{B/A}} B$$

eine Resolvente für C/B.

<u>Beweis:</u> Offenbar ist $R_{C/B}$ eine freie B-Algebra. Wir haben also nur zu zeigen, daß $R_{C/B} \to C$ ein Quasiisomorphismus ist. Hat $R_{C/A}$ über $R_{B/A}$ keine analytischen Algebra-Erzeugenden, so folgt die Aussage unmittelbar aus dem zuvor bewiesenen Lemma, da dann $R_{C/A}$ ein freier $R_{B/A}$-Modul ist. Der allgemeine Fall läßt sich leicht darauf zurückführen. Aus den Exaktheitseigenschaften des analytischen Tensorproduktes $\tilde{\otimes}$ folgt nämlich, daß

$$R'_{B/A} := R_{B/A} \tilde{\otimes}_{R^o_{B/A}} R^o_{C/A} \longrightarrow B' := B \tilde{\otimes}_{R^o_{B/A}} R^o_{C/A}$$

ein Quasiisomorphismus ist. Die Algebra $R_{C/A}$ ist eine freie Algebra über $R'_{B/A}$ und hat keine analytischen Algebra-Erzeugenden. Wir können also wie oben weiterschließen und erhalten die Behauptung auch im allgemeinen Fall.-

Sei nun R eine (DG)-Algebra über der (DG)-Algebra A. Dann trägt der Differentialmodul $\Omega_{R/A}$ auf natürliche Weise die Struktur eines (DG)-Moduls, wobei das Differential gegeben ist durch

$$s(yd(x)) = s(y)d(x) + (-1)^{g(y)} yds(x)$$

für homogene $x, y \in R$. Daß dies wohldefiniert ist, sieht man leicht, indem man R als Quotienten einer freien (DG)-Algebra darstellt! Als wichtig für die Definition des Kotangentenkomplexes wird sich die folgende Aussage erweisen.

<u>(1.9) Satz:</u> Sei R' eine freie R-Algebra derart, daß $R \to R'$ ein Quasiisomorphismus ist. Dann induziert diese Abbildung einen Quasiisomorphismus

$$\Omega_{R/A} \otimes_R R' \longrightarrow \Omega_{R'/A} \; .$$

<u>Beweis:</u> Wir betrachten zunächst den Fall, daß es ein $\beta \in R^1$ mit $s(\beta) = 1$ gibt. Dann ist jeder (DG)-Modul M nullhomotop. Eine Homotopie wird gegeben durch die Abbildung

$$m \longmapsto \beta m \; .$$

Daher ist die Behauptung in diesem Fall trivial. Nehmen wir also an, daß $s(R^1)$ im maximalen Ideal von R^o liegt. Wir zeigen, daß es eine (eventuell unendliche) aufsteigende Folge von (DG)-Algebren

$$R=R_o \subseteq R_1 \subseteq \cdots \subseteq R'$$

mit $R'=\varinjlim R_i$ gibt derart, daß gilt:

(1) R' ist freie R_{i+1}-Algebra.

(2) $R_i \to R_{i+1}$ ist ein Quasiisomorphismus.

(3) R_{i+1} ist freie Algebra über R_i mit zwei homogenen Algebraerzeugenden e und f derart, daß $s(e)=0$ und $s(f)=e$ ist.

Aus Bedingung (3) folgt leicht, daß

$$\Omega_{R_i/A}\otimes_{R_i}R' \longrightarrow \Omega_{R_{i+1}/A}\otimes_{R_{i+1}}R'$$

ein Quasiisomorphismus ist für alle i. Können wir daher die obige Behauptung beweisen, so folgt daraus der Satz mit einem einfachen Limesargument.

Es wird R_{i+1} aus R_i folgendermaßen konstruiert. Sei $e \in R'$ Teil eines freien homogenen Algebraerzeugendensystems von R' über R_i von maximalem Grad k. Weil $R_i \to R'$ ein Quasiisomorphismus ist, gibt es ein $x \in R_i^k$ mit $s(e-x)=0$. Sei $y \in R_i^k$ ein Zykel, welcher dieselbe Kohomologieklasse repräsentiert wie $e-x$, und sei $f \in R'^{k-1}$ ein Element mit $s(f)= e-x-y$. Da auch $e-x-y$ Teil einer freien Algebra-Basis von R' über R_i ist, dürfen wir o.E. $s(f)=e$ annehmen. Wie man leicht sieht, ist auch f Teil einer freien Algebra-Basis von R' über R_i. Wir setzen $R_{i+1}:=R_i[e,f]$. Die Bedingungen (1) und (3) sind dann nach Konstruktion erfüllt. Um (2) zu zeigen, betrachten wir zunächst den Fall, daß $k=g(e)$ ungerade ist. Dann handelt es sich bei R_{i+1} um den Einfachkomplex, welcher zu dem Doppelkomplex

$$\begin{array}{ccccccc}\cdots \xrightarrow{\sigma} & R_i f^j & \longrightarrow & R_i f^{j-1}e & \xrightarrow{\sigma} \cdots \xrightarrow{\sigma} & R_i f^o & \longrightarrow 0 \\ & xf^j & \longmapsto & jxf^{j-1}e & & & \end{array}$$

gehört. Aus den zu dem Doppelkomplex gehörigen Spektralsequenzen folgt leicht, daß $R_i \to R_{i+1}$ ein Quasiisomorphismus ist. Den Fall $g(e)$ gerade erledigt man analog.

C. Der Kotangentenkomplex

Sei $A \to B$ ein Homomorphismus analytischer Algebren und $R \to B$ eine Resolvente. Mit $\underline{\mathrm{Mod}}(B)$ wollen wir die Kategorie der B-Moduln bezeichnen und mit $\underline{D}^-(B)$ kurz die derivierte Kategorie von $\underline{\mathrm{Mod}}(B)$ (in der Notation von Hartshorne [21] $\underline{D}^-(\underline{\mathrm{Mod}}(B))$). Bezeichnet also $\underline{K}^-(B)$ die Kategorie der nach rechts beschränkten Komplexe, in welcher die Homomorphismen die Homotopieklassen von Homomorphismen zwischen Komplexen vom Grade 0 sind, so ist $\underline{D}^-(B)$ nichts anderes als $\underline{K}^-(B)_{Qis}$, die Lokalisierung von $\underline{K}^-(B)$ nach den Quasiisomorphismen.

(1.10) Definition: Der Komplex

$$\Omega_{R/A}\otimes_R B$$

in $\underline{D}^-(B)$ heißt der Kotangentenkomplex von B über A und wird mit $L^\bullet_{B/A}$ bezeichnet.

Wir müssen zeigen, daß $L^\bullet_{B/A}$ wohldefiniert ist, d.h. nicht von der Wahl der Resolvente R abhängt, und daß der Kotangentenkomplex funktoriell in A und in B ist. Das folgt mit den üblichen Schlüssen der homologischen Algebra aus dem folgenden

(1.11) Satz: Sei

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm analytischer Algebren, R eine Resolvente für B/A und R' eine Resolvente für B'/A'. Ferner seien $\varphi, \psi : R \to R'$ zwei Homomorphismen derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & R' \arrow[d] \\ R \arrow[r] \arrow[ur, shift left, "\varphi"] \arrow[ur, shift right, "\psi"'] & B' \end{tikzcd}$$

kommutiert für φ und für ψ. Dann induzieren φ und ψ dieselben Abbildungen (in $\underline{D}(B')$) zwischen $\Omega_{R/A}\otimes_R B'$ und $\Omega_{R'/A'}\otimes_{R'} B'$.

Beweis: Sei T eine Resolvente für $R\tilde{\otimes}_A R' \longrightarrow B'$. Dann ist $R' \longrightarrow T$ eine freie Algebraerweiterung, welche ein Quasiisomorphismus ist. Folglich induziert dieser Homomorphismus einen Quasiisomorphismus

$$\Omega_{R'/A'}\otimes_{R'}B' \xrightarrow{\gamma} \Omega_{T/A'}\otimes_T B' .$$

Weil T eine freie $R\otimes_A R'$-Algebra ist, gibt es Homomorphismen $\tilde{\varphi},\tilde{\psi}: T\longrightarrow R'$, welche das folgende Diagramm kommutativ machen:

$$\begin{tikzcd}
R\otimes_A R' \arrow[r, shift left, "\varphi\otimes 1"] \arrow[r, shift right, "\psi\otimes 1"'] \arrow[d] & R' \arrow[d] \\
T \arrow[ur, shift left, "\tilde{\varphi}"] \arrow[ur, shift right, "\tilde{\psi}"'] \arrow[r] & B'
\end{tikzcd} .$$

Es reicht offenbar zu zeigen, daß $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\psi}$ dieselben Abbildungen

$$\begin{tikzcd}
\Omega_T\otimes_T B' \arrow[r, shift left, "d\tilde{\varphi}"] \arrow[r, shift right, "d\tilde{\psi}"'] & \Omega_{R'}\otimes_{R'}B'
\end{tikzcd}$$

induzieren. Nun ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\Omega_T\otimes_T B' \arrow[r, shift left, "d\tilde{\varphi}"] \arrow[r, shift right, "d\tilde{\psi}"'] & \Omega_{R'}\otimes_{R'}B' \\
\Omega_{R'}\otimes_{R'}B' \arrow[u, "\gamma"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ, da $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\psi}$ nach Konstruktion R'-Morphismen sind. Ferner ist γ ein Quasiisomorphismus. Folglich stimmen die Abbildungen $d\tilde{\varphi}$ und $d\tilde{\psi}$ in $\underline{D}(B')$ überein.

Wir sind nun imstande, die Kotangentenfunktoren und Tangentenfunktoren T_i, T^i zu definieren.

<u>(1.12) Definition</u>: Für einen B-Modul M sei

$$T^i(B/A,M) := \mathrm{Ext}^i_B(L^\bullet_{B/A},M)$$

und

$$T_i(B/A,M) := \mathrm{Tor}^B_{-i}(L^\bullet_{B/A},M) .$$

Aus den Definitionen folgt sofort:

<u>(1.13) Satz</u>: Sei $0\longrightarrow M'\longrightarrow M\longrightarrow M''\longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von B-Moduln. Dann hat man lange exakte Kohomologiesequenzen

$$\cdots\longrightarrow T^i(B/A,M')\longrightarrow T^i(B/A,M)\longrightarrow T^i(B/A,M'')\longrightarrow T^{i+1}(B/A,M')\longrightarrow\cdots$$

$$\cdots\longrightarrow T_i(B/A,M')\longrightarrow T_i(B/A,M)\longrightarrow T_i(B/A,M'')\longrightarrow T_{i-1}(B/A,M')\longrightarrow\cdots$$

Wir wollen nun eine exakte Sequenz herleiten, welche die Kotangentenkomplexe dreier analytischer Algebren verbindet.

Sei $B\longrightarrow C$ ein Homomorphismus analytischer A-Algebren und $R_{B/A}$ eine Resolvente für B/A. Es gibt nach (1.4) eine freie $R_{B/A}$-Algebra $R_{C/A}$, welche eine Resolvente für C/A ist. Wegen (1.8) ist die freie B-Algebra $R_{C/B}:=R_{C/A}\otimes_{R_{B/A}}B$ eine Resolvente für C/B. Man hat daher eine exakte Sequenz

$$0\to\Omega_{R_{B/A}/A}\otimes_{R_{B/A}}C\to\Omega_{R_{C/A}/A}\otimes_{R_{C/A}}C\to\Omega_{R_{C/A}/R_{B/A}}\otimes_{R_{C/A}}C\to 0$$

d.h. eine exakte Sequenz

$$0\longrightarrow L^\bullet_{B/A}\otimes_B C\longrightarrow L^\bullet_{C/A}\longrightarrow L^\bullet_{C/B}\longrightarrow 0 .$$

Hieraus erhalten wir sofort:

<u>(1.14) Satz</u>: Es gibt für jeden C-Modul M lange exakte Kohomologiesequenzen

$$\cdots\longrightarrow T^i(C/B,M)\longrightarrow T^i(C/A,M)\longrightarrow T^i(B/A,M)\longrightarrow T^{i+1}(C/B,M)\longrightarrow\cdots$$

$$\cdots\longrightarrow T_i(B/A,M)\longrightarrow T_i(C/A,M)\longrightarrow T_i(C/B,M)\longrightarrow T_{i-1}(B/A,M)\longrightarrow\cdots .$$

Wir notieren nun einige einfache Eigenschaften der Funktoren T_i und T^i.

<u>(1.15) Satz:</u> (1) $T_0(B/A,M)\cong\Omega_{B/A}\otimes_B M$

$T^0(B/A,M)\cong \mathrm{Der}_A(B,M)$

(2) ist $A\longrightarrow B$ glatt, so ist

$$T^i(B/A,M) = T_i(B/A,M) = 0 \quad \text{für } i>0.$$

(3) Für $B=A\{\underline{X}\}/\underline{f}$ mit einer Primfolge $\underline{f}$ in $A\{\underline{X}\}$ ist

$$T^i(B/A,M) = T_i(B/A,M) = 0 \quad \text{für } i>1.$$

(4) ist $A\longrightarrow B$ surjektiv, so gilt mit $i:=\mathrm{Kern}(A\longrightarrow B)$:

$$T_1(B/A,M)\cong i/i^2\otimes_B M$$
$$T^1(B/A,M)\cong \mathrm{Hom}_B(i/i^2,M) .$$

(5) ist $T^1(B/A,k)$ oder $T_1(B/A,k)$ Null, so ist $A\longrightarrow B$ glatt.

(6) ist $T^2(B/A,k)$ oder $T_2(B/A,k)$ Null, so ist B von der Form $A\{\underline{X}\}/\underline{f}$ mit einer Primfolge $\underline{f}$ in $A\{\underline{X}\}$.

<u>Beweis</u>: Sei R eine Resolvente für B/A. Dann ist B der Quotient von R^0 nach dem Ideal, welches von $s(e_1),\dots,s(e_n)$ aufgespannt wird, wenn $e_1,\dots,e_n \in R^{-1}$ die freien Algebraerzeugenden vom Grad -1 sind. Aus der Konstruktion von $L^\bullet_{B/A}$ folgt, daß $L^0_{B/A}=\Omega_{R^0/A}\otimes_{R^0}B$ und $L^{-1}_{B/A}=\coprod_i Bd(e_i)$ ist mit dem Differential

$$de_i \longmapsto d(s(e_i)) \ .$$

Hieraus folgt sofort (1).

(2) ist trivial, da man als Resolvente $R=B$ wählen kann.

(3) folgt aus dem oben Gesagten und aus der Tatsache, daß für $B=A\{\underline{X}\}/\underline{f}$ mit einer Primfolge $\underline{f}$ der Koszulkomplex $K.(A\{\underline{X}\},\underline{f})$ eine Resolvente für B/A darstellt.

Im Fall (4) können wir eine Resolvente R mit $R^0=A$ wählen, so daß, wenn e_σ die Algebraerzeugenden vom Grad -1 und e_ς die Erzeugenden vom Grad -2 sind, die Sequenz von A-Moduln

$$\coprod_\varsigma Ae_\varsigma \longrightarrow \coprod_\sigma Ae_\sigma \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

exakt ist. Offenbar ist dann $L^\bullet_{B/A}$ der Komplex

$$\cdots \to \coprod_\varsigma Be_\varsigma \longrightarrow \coprod_\sigma Be_\sigma \longrightarrow 0 \ .$$

Daraus ergibt sich leicht (4).

Um die letzten beiden Aussagen zu zeigen, wählen wir eine minimale Resolvente R gemäß (1.5), d.h. es gilt:
$s(R^{-1})\subseteq \mathfrak{m}^2_{R^0}+\mathfrak{m}_A R^0$ und $s(R^k)\subseteq J^2+\mathfrak{m}_{R^0}J$ für $k<-1$.
Dabei sei J das homogene Ideal $\coprod_{i<0}R^i$ von R. Es folgt, daß die Differentiale in dem Komplex $\Omega_{R/A}\otimes_R B/\mathfrak{m}_B$ Null sind. Daher ist $\dim(T^i(B/A,k))=\dim(T_i(B/A,k))$ gerade die Anzahl der freien Algebraerzeugenden des Grades i von R über A. Verschwindet also $T^1(B/A,k)$ oder $T_1(B/A,k)$, so hat die Resolvente die Form

$$\cdots \to 0 \to R^0 \to 0 \ .$$

Es folgt, daß $B=R^0$ glatt über A ist. Verschwindet dagegen $T^2(B/A,k)$ oder $T_2(B/A,k)$, so treten keine Algebraerzeugenden vom Grad -2 auf. Sind daher $e_1,\dots e_n$ die Erzeugenden des Grades -1, so ist R der Komplex

$$\cdots \to R^{\binom{n}{2}} \xrightarrow{s} R^n \xrightarrow{s} R \longrightarrow 0 \ .$$

Hierbei handelt es sich aber gerade um das Ende des Koszulkomplexes in $s(e_1),\dots,s(e_n)$. Folglich bilden $s(e_1),\dots,s(e_n)$

eine Primfolge in R^0, vgl. [43] IV, prop.3.

Wir notieren zu Ende dieses Abschnitts noch eine weitere Eigenschaft, die den Basiswechsel betrifft.

<u>(1.16) Satz</u>: Seien $A\to B$, $A\to A'$ Homomorphismen analytischer Algebren und $B'=B\tilde{\otimes}_A A'$. Es sei $A\to A'$ oder $A\to B$ flach. Dann ist $L^\bullet_{B'/A'}\cong L^\bullet_{B/A}\underline{\otimes}_B B'$.

Dabei bezeichne $\underline{\otimes}$ das vollständige Tensorprodukt, vgl. [21], chap. II, §4.

<u>Beweis</u>: Ist R eine Resolvente für B/A, so ist wegen der Flachheit offenbar $R':=R\tilde{\otimes}_A A'$ eine Resolvente für B'/A'. Daraus folgt sofort die Behauptung.

Insbesondere ergibt sich aus dem Satz, daß in der beschriebenen Situation für jeden B'-Modul M die kanonischen Abbildungen

$$T^i(B/A,M) \longrightarrow T^i(B'/A',M)$$
$$T_i(B/A,M) \longrightarrow T_i(B'/A',M)$$

bijektiv sind.

<u>D. Die Funktoren $T^i(f/-;-)$</u>

Sei $f:B\to C$ ein A-Homomorphismus von analytischen Algebren. Wir wollen in diesem Abschnitt Tangentenfunktoren $T^i(f/A,-)$ für die Abbildung f einführen.

$\mathcal{C}$ bezeichne die folgende Kategorie. Ein Objekt von $\mathcal{C}$ sei ein Tupel (M_1,M_2,h) (oder auch kurz (M_1,M_2)), wobei M_1 ein B-Modul, M_2 ein C-Modul und $h:M_1\to M_2$ ein f-Homomorphismus ist. Die Homomorphismen in dieser Kategorie seien alle kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d] & M_2 \arrow[d] \\ M_1' \arrow[r, "h'"] & M_2' \end{tikzcd}$$

wobei die vertikalen Pfeile B- bzw. C-Modulhomomorphismen sind.

Man überlegt sich leicht, daß $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie ist. Ferner sieht man sofort, daß die Tupel (P_1,P_2,h), wobei P_1 ein freier B-Modul, P_2 ein freier C-Modul und $P_1\otimes_B C\hookrightarrow P_2$ ein direkter Summand ist, projektive Objekte in dieser Kategorie sind. Insbesondere gibt es genügend viele projektive Objekte, und daher ist der Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)$ ableitbar.

Seien nun $R\to B$ und $S\to C$ Resolventen über A derart, daß es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & C \end{array}$$

von (DG)-Algebren über A gibt. Es bezeichne $L^\bullet_f$ den Komplex

$$(\Omega_{R/A}\otimes_R B,\Omega_{S/A}\otimes_S C)$$

in $\underline{D}^-(\mathcal{C})$.

<u>(1.17) Definition</u>: Für einen B-Modul N sei

$$T^i(f/A;N) := \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(L^\bullet_f,(N,N\otimes_B C)).$$

Um zu zeigen, daß die Funktoren $T^i(f/A;-)$ wohldefiniert sind, muß man nachweisen, daß der Komplex $L^\bullet_f$ als Objekt von $\underline{D}^-(\mathcal{C})$ nicht von der Wahl der Resolventen abhängt. Dies sieht man aber leicht genauso wie die entsprechende Aussage (1.11).

Wir wählen nun Resolventen R, S derart, daß S zusätzlich noch eine freie R-Algebra ist. Dann ist $L^\bullet_f=(\Omega_{R/A}\otimes_R B,\Omega_{S/A}\otimes_S C)$ ein Komplex von projektiven Objekten in $\mathcal{C}$. Daher berechnen sich die $T^i(f/A,N)$ aus dem Komplex

$$D^\bullet_f(N):=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L^\bullet_f,(N,C\otimes_B N)).$$

Nun hat man eine exakte Sequenz von Komplexen

$$0\to\mathrm{Hom}_C(\Omega_{S/R}\otimes_S C,N\otimes_B C)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L^\bullet_f,(N,N\otimes_B C))\to$$
$$\mathrm{Hom}_B(\Omega_{R/A}\otimes_R B,N)\to 0$$

Aus dem ersten Komplex berechnen sich die Gruppen $T^i(C/B,N\otimes_B C)$, vgl. die Überlegungen von (1.14), und aus dem letzten Komplex die Gruppen $T^i(B/A,N)$. Daraus folgt:

<u>(1.18) Satz</u>: Es gibt eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$\cdots\to T^i(C/B,N\otimes_B C)\to T^i(f/A,N)\to T^i(B/A,N)\to T^{i+1}(C/B,N\otimes_B C)\to\cdots.$$

<u>(1.19) Beispiele</u>: (1) Offenbar ist $T^0(f/A,N)$ die Menge aller verträglichen A-Derivationen $(\delta_1,\delta_2)\in\mathrm{Der}_A(B,N)\times\mathrm{Der}_A(C,N\otimes_B C)$.

(2) Sei $A:=k$, $B:=k\{\underline{F}\}_r$ und $C:=k\{\underline{X}\}_n$, wobei der Homomorphismus $B\to C$ durch $F_\varrho\mapsto f_\varrho\in C$ gegeben sei. Wir wollen zeigen, daß sich $T^1(f/k,N)=:T^1(f,N)$ als Kokern der Abbildung

$$(C^n\times B^r)\otimes_B N\xrightarrow{\varphi\otimes 1}C^r\otimes_B N\ .$$

berechnet, wobei die Abbildung φ auf der ersten Komponente durch die Funktionalmatrix $\left(-\frac{\partial f_\varrho}{\partial x_\nu}\right)$ definiert sei und auf der zweiten die Einschränkung der Identität auf B^r ist. Sei $R^0=k\{\underline{X},\underline{F}\}$ und $R^0\to C$ durch $F_\varrho\mapsto f_\varrho$ definiert. Offenbar ist der Koszulkomplex R über R^0 bezüglich der Primfolge $(F_\varrho-f_\varrho)_\varrho$ eine Resolvente von C, welche eine freie B-Algebra ist. Ein Repräsentant des Kotangentenkomplexes $L^\bullet_B$ ist offenbar der Komplex

$$\cdots\to C\to C\to B^r\to C\to\cdots$$

und ein Repräsentant für $L^\bullet_C$ offenbar

$$\cdots\to C\to C^r\to C^n\times C^r\to C\to\cdots$$

Dabei ist die Abbildung $C^r\to C^n\times C^r$ in dem ersten Faktor durch die Matrix $\left(-\frac{\partial f_\varrho}{\partial x_\nu}\right)$ gegeben und in dem zweiten Faktor die Identität. Hieraus erhält man leicht die obige Aussage.

<u>(1.20) Bemerkungen:</u> (1) Analog kann man für eine Kette von Homomorphismen analytischer Algebren

$$A_0\xrightarrow{f_0}A_1\xrightarrow{f_1}\cdots\longrightarrow A_n\xrightarrow{f_n}A_{n+1}$$

und jeden A_1-Modul N Funktoren

$$T^i(f_1,\dots,f_n/A_0\ ,\ N)$$

definieren. Sei $R_i\to A_i$, $i=1,\dots,n+1$, Resolventen von A_i über A_0, so daß es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} R_1 \arrow[r] \arrow[d] & R_2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & R_{n+1} \arrow[d] \\ A_1 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A_{n+1} \end{tikzcd}$$

von (DG)-Algebren über A_o gibt, wobei R_{i+1} eine freie R_i-Algebra ist. Dann definiert man die Funktoren $T^i(f_1,\dots,f_n/A_o\ ,N)$ als die Kohomologie des Komplexes $D^\bullet(N)$, wobei $D^i(N)$ die Menge aller verträglichen Homomorphismen

$$\{\Omega_{R_\nu/A_o} \otimes_{R_\nu} A_\nu \longrightarrow N \otimes_{A_1} A_\nu\}_{\nu=1,\dots,n+1}$$

bezeichnet. Analog wie oben hat man exakte Sequenzen

$$\cdots \longrightarrow T^i(f_2,\dots,f_n/A_1,N\otimes_{A_1}A_2) \longrightarrow T^i(f_1,\dots,f_n/A_o,N) \longrightarrow T^i(A_1/A_o,N) \longrightarrow$$
$$T^{i+1}(f_2,\dots,f_n/A_1,N\otimes_{A_1}A_2) \longrightarrow \cdots$$

(2) Ist $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von B-Moduln, so erhält man eine lange exakte Kohomologiesequenz für die $T^i(f/A,-)$ nur dann, wenn auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow N'\otimes_B C \longrightarrow N\otimes_B C \longrightarrow N''\otimes_B C \longrightarrow 0$$

exakt ist. Das ist beispielsweise der Fall, wenn C flach über B ist.

(3) Für B=C und f=id ist offenbar

$$T^i(f/A,N) = T^i(B/A,N)\ .$$

Wir wollen nun zeigen, daß der graduierte B-Modul $T^*(f/A,B)$ die Struktur einer graduierten Lie-Algebra trägt. Dabei wollen wir unter einer graduierten Lie-Algebra einen graduierten Modul L mit einer bilinearen Verknüpfung

$$[\ ,\ ] : L \times L \longrightarrow L$$

verstehen, welche homogen ist und die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) $[x,y] = -(-1)^{g(x)g(y)}[y,x]$

(2) Jacobi Identität :

$$[x,[y,z]] + (-1)^{g(x)(g(y)+g(z))}[y,[z,x]]$$
$$+ (-1)^{g(z)(g(x)+g(y))}[z,[x,y]] = 0$$

für homogene $x,y,z \in L$.

Unter einer (DG)-Liealgebra versteht man eine graduierte

Liealgebra, welche ein (DG)-Modul ist, so daß die Lieoperation und das Differential s die Verträglichkeitsbedingung

$$(3)\quad s([x,y]) = [s(x),y] + (-1)^{g(x)}[x,s(y)]$$

erfüllen für homogene $x,y \in L$.

Ist L eine (DG)-Liealgebra, so ist offenbar $H^*(L)$ eine graduierte Liealgebra, wie man sich leicht überlegt.

<u>(1.21) Beispiel</u>: Sei R eine (DG)-Algebra über der (DG)-Algebra A. Dann ist

$$Der_A(R,R) := Hom_R(\Omega_{R/A},R)$$

eine (DG)-Liealgebra mit der Verknüpfung

$$[\delta_1,\delta_2](x) := \delta_1\delta_2(x) - (-1)^{g(\delta_1)g(\delta_2)}\delta_2\delta_1(x)$$

für homogene Derivationen $\delta_1, \delta_2 \in Der_A(R,R)$. (Man beachte, daß $Der_A(R,R)=\coprod_{i\in \mathbb{Z}} Der_A(R,R)^i$ i.A. nur eine Teilmenge der Menge aller A-Derivationen von R nach R ist.) Das Differential auf $Der_A(R,R)$ ist die Abbildung $\delta \longmapsto [s,\delta]$, wobei s das Differential auf R bezeichnet. Die Verträglichkeitsbedingung (3) folgt leicht aus der Jacobi-Identität.

Der folgende Satz zeigt nun, wie man eine Lie-Algebra-Struktur auf $T^*(f/A,B)$ erhält.

<u>(1.22) Satz</u>: Sei R eine Resolvente für B/A und S eine freie R-Algebra, welche eine Resolvente für C/A ist. Ferner sei L die (DG)-Liealgebra aller Paare von Derivationen

$$(\delta_1,\delta_2) \in Der_A(R,R) \times Der_A(S,S)\ ,$$

derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d, "\delta_1"'] & S \arrow[d, "\delta_2"] \\ R \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Dann berechnen sich die Tangentenmoduln $T^i(f/A,B)$ aus dem Komplex L.

<u>Beweis</u>: Wir haben zu zeigen, daß die durch die kanonische Abbildung

$$\mathrm{Hom}_R(\Omega_{R/A},R)\times \mathrm{Hom}_S(\Omega_{S/A},S)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\Omega_{R/A},B)\times \mathrm{Hom}_S(\Omega_{S/A},C)$$

induzierte Abbildung

$$L\longrightarrow D_f^{\cdot}(B)$$

ein Quasiisomorphismus ist. Wegen des Diagrammes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_S(\Omega_{S/R},S) \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(\Omega_{R/A},R) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_S(\Omega_{S/R},C) \arrow[r] & D_f^{\cdot}(B) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\Omega_{R/A},B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen reicht es zu zeigen, daß die äußeren senkrechten Pfeile Quasiisomorphismen sind Das ergibt sich aber aus dem folgenden Hilfssatz.

Wir benötigen für die folgende Aussage die Konstruktion des Abbildungszylinders. Sei $\varphi: M\longrightarrow N$ ein Homomorphismus von (DG)-Moduln über der (DG)-Algebra R. Mit $C(\varphi)$ bezeichnen wir dann den Abbildungszylinder von φ, d.h. den (DG)-Modul

$$C(\varphi):=N\times M[1]\quad ,$$

wobei das Differential auf $C(\varphi)$ gegeben wird durch

$$s(n,m):=(s(n)+\varphi(m),-s(m))$$

für homogene $n\in N$ und $m\in M$.

<u>(1.23) Lemma</u>: Sei R eine (DG)-Algebra, F ein freier (DG)-Modul mit $F^i=0$ für $i\gg 0$, dessen homogene Komponenten endliche R^0-Moduln sind, und $\varphi: M\longrightarrow N$ ein Quasiisomorphismus von (DG)-Moduln. Dann ist

$$\mathrm{Hom}_R(F,M)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F,N)$$

ein Quasiisomorphismus.

<u>Beweis</u>: Mit Hilfe des Abbildungszylinders überlegt man sich leicht, daß es die folgende Aussage zu zeigen gilt. Ist M ein (DG)-Modul, welcher als Komplex exakt ist, so ist auch $\mathrm{Hom}_R(F,M)$ exakt.

Zunächst sei bemerkt, daß es eine Filtrierung von F durch (DG)-Untermoduln

$$0=F_0\subseteq F_1\subseteq\cdots\subseteq F$$

gibt derart, daß F_{i+1} als R-Modul die direkte Summe $F_i\times Re_{i+1}$

für ein $e_{i+1}\in F_{i+1}$ mit $s(e_{i+1})\in F_i$ ist und $\varinjlim F_i=F$ gilt.

Wir zeigen nun die Exaktheit des Komplexes $\mathrm{Hom}_R(F,M)$. Sei $f: F\longrightarrow M$ ein Homomorphismus vom Grad k mit $s(f)=0$. Wir konstruieren sukzessive verträgliche Homomorphismen vom Grad k-1 $h_i: F_i\longrightarrow M$ mit $s(h_i)=f|F_i$. Für $i=0$ ist nichts zu zeigen. Sei nun $i>0$ und h_{i-1} schon konstruiert. Dann ist

$$\begin{aligned}
0 &= f(s(e_i)) - s(h_{i-1})(s(e_i))\\
&= (-1)^k s(f(e_i)) - s(h_{i-1}(s(e_i)))\\
&= s((-1)^k f(e_i) - h_{i-1}(s(e_i)))\ .
\end{aligned}$$

Weil M exakt ist, gibt es ein homogenes x in M mit $s(x)=f(e_i)-(-1)^k h_{i-1}(s(e_i))$. Wir definieren dann einen R-Modulhomomorphismus $h_i: F_i\longrightarrow M$ durch $h_i|F_{i-1}=h_{i-1}$ und $h_i(e_i)=x$. Offenbar hat h_i die geforderten Eigenschaften.

<u>E. Die Funktoren T^i und Erweiterungen analytischer Algebren</u>

Sei B eine analytische A-Algebra und N ein endlicher B-Modul. Unter einer Erweiterung von B über A durch N versteht man eine analytische A-Algebra B' zusammen mit einem surjektiven A-Homomorphismus $B'\xrightarrow{\pi} B$ und einem B'-Modulisomorphismus Kern $\pi\xrightarrow{\sim} N$. Sei M ein weiterer B-Modul, B" eine Erweiterung von B durch M und $\varphi: N\longrightarrow M$ ein B-Homomorphismus. Unter einem Morphismus von der Erweiterung B' nach B" über φ versteht man einen A-Homomorphismus $B'\longrightarrow B''$, welcher das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & B' \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & B'' \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Zwei Erweiterungen desselben Moduls N heißen isomorph, wenn es einen Morphismus zwischen diesen Erweiterungen über id_M gibt.

Wir wollen diesen wohlbekannten Begriff der Algebraerweiterung nun verallgemeinern. Seien $B_0,B_1,\cdots,B_n$ analytische A-Algebren und

$$B_\cdot : B_0\xrightarrow{f_1}\ \cdots\ \xrightarrow{f_n} B_n$$

eine Kette von A-Homomorphismen. Für einen endlichen B_0-Modul N_0

sei $N_i := N_o \otimes_{B_o} B_i$. Unter einer verträglichen Familie von A-Algebraerweiterungen von $B_\bullet = \{B_i\}_i$ durch N_o wollen wir eine Familie von A-Algebraerweiterungen B_i' von B_i durch N_i verstehen zusammen mit Homomorphismen $f_i' : B_{i-1}' \longrightarrow B_i'$ derart, daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd} B_{i-1}' \arrow[r] \arrow[d] & B_i' \arrow[d] \\ B_{i-1} \arrow[r] & B_i \end{tikzcd}$$

kommutieren und die Homomorphismen f_i' auf N_{i-1} die kanonische Abbildung $N_{i-1} \longrightarrow N_i \cong N_{i-1} \otimes_{B_{i-1}} B_i$ induzieren. In naheliegender Weise erklärt man auch hier wieder den Begriff des Morphismus und Isomorphismus. Die Menge der Isomorphieklassen von solchen Erweiterungen sei im folgenden mit $Ex(B_\bullet/A, N_o)$ bezeichnet.–

Mit dem Fall n=1 werden wir uns im folgenden besonders beschäftigen. In dieser Situation wollen wir kurz von Erweiterungen von $f := f_1$ über A durch N_o sprechen und die Menge der Isomorphieklassen von Erweiterungen mit $Ex(f/A, N_o)$ bezeichnen.

In diesem Abschnitt sollen die Zusammenhänge zwischen den Erweiterungen von f durch N_o und den Tangentenfunktoren $T^i(f/A, N_o)$ untersucht werden. Zunächst wollen wir zeigen, daß die Elemente von $T^o(f/A, N_o)$ in natürlicher Weise als Automorphismen von Erweiterungen interpretiert werden können.

<u>(1.24) Satz</u>: Sei

$$\begin{tikzcd} & B_o' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & B_1' \arrow[d] \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & B_o \arrow[r, "f"] & B_1 \end{tikzcd}$$

eine Erweiterung von f über A durch den B_o-Modul N_o. Dann gibt es eine natürliche Bijektion zwischen den Elementen von $T^o(f/A, N_o)$ und den Automorphismen obiger Erweiterung.

<u>Beweis</u>: $T^o(f/A, N_o)$ ist die Menge aller verträglichen A-Derivationen (δ_o, δ_1) in

$$Der_A(B_o, N) \times Der_A(B_1, N) \subseteq Der_A(B_o', N) \times Der_A(B_1', N).$$

Jedem solchen Paar können wir die verträglichen Automorphismen

$$1 + \delta_o : B_o' \longrightarrow B_o', \quad 1 + \delta_1 : B_1' \longrightarrow B_1'$$

zuordnen. Man sieht leicht, daß diese Zuordnung bijektiv ist.–

Wir wollen als nächstes eine natürliche Bijektion zwischen den Elementen von $T^1(f/A, N_o)$ und $Ex(f/A, N_o)$ herleiten. Wir benötigen dazu einige Vorbereitungen.

<u>(1.25)</u>: Sei B eine analytische A-Algebra und R eine Resolvente von B über A. Ist N ein B-Modul und B' eine Erweiterung von B über A durch N, so gibt es einen A-Homomorphismus $R \xrightarrow{\eta} B'$, welcher das Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr] & & B' \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Die Abbildung $\eta s : R \longrightarrow N$ ist dann eine A-Derivation vom Grad 1, welche ein Zykel ist. Man sieht leicht, daß die Kohomologieklasse von ηs nicht von der Wahl von η abhängt. Wir erhalten somit eine Abbildung

$$Ex(B/A, N) \xrightarrow{\Phi} H^1(Der(R, N)).$$

Es gilt:

<u>(1.26) Lemma:</u> Die oben konstruierte Abbildung Φ ist bijektiv.

<u>Beweis</u>: Wir werden eine Umkehrabbildung zur obigen Abbildung konstruieren. Sei $\delta : R \longrightarrow N$ eine Derivation vom Grad 1, welche ein Zykel ist. Wir betrachten das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & R^1 \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & R^o \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dabei sei B' die A-Algebra $R^o \coprod_{R_1} N$, versehen mit der Algebrastruktur

$$(x,m)(y,n) := (xy, xn+ym).$$

Offenbar ist B' eine analytische A-Algebra und die untere Zeile im obigen Diagramm ist exakt. Daher ist B' eine Erweiterung von B durch N, welche nur von der Kohomologieklasse von δ in $H^1(Der_A(R,N))$ abhängt, wie man leicht sieht. Die so konstruierte Abbildung

$$H^1(Der_A(R,N)) \longrightarrow Ex(B/A,N)$$

Wir wollen die obigen Überlegungen nun verallgemeinern auf Ketten von A-Homomorphismen

$$B_\bullet : B_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_n .$$

Sei N_0 ein endlicher B_0-Modul und $N_i := N_0 \otimes_{B_0} B_i$. Ferner seien R_i Resolventen von B_i über A derart, daß es ein kommutatives Diagramm von A-Algebren

$$\begin{tikzcd} R_0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & R_n \arrow[d] \\ B_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & B_n \end{tikzcd}$$

gibt, wobei R_{i+1} eine freie R_i-Algebra ist. Es bezeichne $D^\bullet$ den Komplex aller verträglichen A-Derivationen in

$$Der_A(R_0,N_0)\times \cdots \times Der_A(R_n,N_n).$$

Wie oben kann man jeder verträglichen Erweiterung

$$\{B'_\nu\}_\nu \in Ex(B_\bullet/A,N_0)$$

eine Kohomologieklasse in $H^1(D^\bullet)$ zuordnen. Zunächst gibt es einen A-Homomorphismus $R_0 \xrightarrow{\eta_0} B'_0$, welcher mit der Projektion auf B_0 verträglich ist. Weil R_1 eine freie R_0-Algebra ist, gibt es einen R_0-Homomorphismus $R_1 \xrightarrow{\eta_1} B'_1$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} R_0 \arrow[r] \arrow[d, "\eta_0"'] & R_1 \arrow[d, "\eta_1"'] \arrow[dr] & \\ B'_0 \arrow[r] & B'_1 \arrow[r] & B_1 \end{tikzcd}$$

kommutiert. So fortfahrend erhalten wir eine Folge von verträglichen A-Homomorphismen $\eta_i : R_i \longrightarrow B'_i$. Offenbar sind dann die Abbildungen $\eta_i \circ s : R_i \longrightarrow N_i$ verträgliche Derivationen vom Grad 1, welche einen Zykel in $D^\bullet$ bilden. Wie man leicht sieht, hängt dieser Zykel nur von der Erweiterung $\{B'_\nu\}_\nu$ ab. Man erhält somit eine Abbildung

$$Ex(B_\bullet/A,N) \xrightarrow{\;\Phi\;} H^1(D^\bullet) .$$

Wie oben sieht man:

<u>(1.27) Lemma</u>: Die oben konstruierte Abbildung Φ ist bijektiv.-

Betrachten wir diese Aussage für den Spezialfall n=1, so ergibt sich:

<u>(1.28) Satz</u>: Es gibt eine natürliche bijektive Beziehung zwischen den Elementen von $T^1(f/A;N_0)$ und den Elementen von $Ex(f/A,N_0)$.-

Wir wollen uns nun mit dem Problem der Fortsetzung von Erweiterungen beschäftigen. Sei $B \longrightarrow C$ ein Homomorphismus analytischer A-Algebren und $A' \longrightarrow A$ eine Erweiterung von A durch einen endlichen A-Modul N. Wir wollen untersuchen, wann es Erweiterungen $B' \longrightarrow B$, $C' \longrightarrow C$ von B durch $N \otimes_A B$ bzw. von C durch $N \otimes_A C$ gibt, so daß A', B', C' verträgliche Erweiterungen bilden. Unser Ziel ist es, einen Homomorphismus

$$T^1(A,N) \xrightarrow{\;o_1\;} T^2(f/A,N \otimes_A B)$$

zu konstruieren derart, daß die zu A' gehörige Kohomologieklasse $\xi(A')$ unter o_1 genau dann verschwindet, wenn sich die Erweiterung A' fortsetzen läßt zu einer verträglichen Erweiterung $A' \longrightarrow B' \longrightarrow C'$.

Allgemeiner konstruieren wir Homomorphismen

$$o_i : T^i(A,N) \longrightarrow T^{i+1}(f/A,N \otimes_A B)$$

wie folgt. Sei R eine Resolvente für A, S eine freie R-Algebra, welche eine Resolvente für B ist, und T eine freie S-Algebra, welche eine Resolvente für C ist. Sei $D_1^\bullet$ die Menge aller verträglichen Derivationen in

$$Der(R,N) \times Der(S,N \otimes_A B) \times Der(T,N \otimes_A C)$$

und $D_2^\bullet$ die Menge aller verträglichen Derivationen in

$$Der_R(S,N \otimes_A B) \times Der_R(T,N \otimes_A C)$$
$$= Der_A(S \otimes_R A, N \otimes_A B) \times Der_A(T \otimes_R A, N \otimes_A C).$$

Weil S eine freie R-Algebra ist, bildet $S \otimes_R A$ eine Resolvente von B über A, vgl. (1.14). Analog ist $T \otimes_R A$ eine freie $S \otimes_R A$-Algebra, welche eine Resolvente für C/A ist. Daher berechnen sich aus dem Komplex $D_2^\bullet$ die Gruppen $T^i(f/A,N \otimes_A B)$. Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow D_2^\bullet \longrightarrow D_1^\bullet \longrightarrow Der(R,N) \longrightarrow 0$$

erhalten wir eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$\cdots \longrightarrow H^i(Der(R,N)) \xrightarrow{\;o_i\;} H^{i+1}(D_2^\bullet) \longrightarrow \cdots .$$

Wegen $H^i(Der(R,N)) \cong T^i(A,N)$ und $H^{i+1}(D_2^\bullet) \cong T^{i+1}(f/A,N \otimes_A B)$

erhalten wir so eine Abbildung

$$o_1 : T^i(A,N) \longrightarrow T^{i+1}(f/A,N \otimes_A B) \ .$$

Wir wollen nun die oben beschriebene Aussage zeigen:

(1.29) Satz: Sei $B \longrightarrow C$ ein Homomorphismus analytischer A-Algebren, $A' \longrightarrow A$ eine Erweiterung von A durch den endlichen A-Modul N und $\Phi(A') \in T^1(A,N)$ die zu A' gehörige Kohomologieklasse. Dann verschwindet

$$o_1(\Phi(A')) \in T^2(f/A,N \otimes_A B)$$

genau dann, wenn es Erweiterungen B' von B über A' durch $N \otimes_A B$ und C' von C über B' durch $N \otimes_A C$ gibt derart, daß $A' \longrightarrow B' \longrightarrow C'$ verträgliche Erweiterungen von $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ sind.

Beweis: Wir betrachten mit den Bezeichnungen des letzten Abschnitts die lange exakte Kohomologiesequenz

$$\begin{array}{ccccc} H^1(D_2^{\cdot}) & \xrightarrow{\pi} & H^1(\mathrm{Der}(R,N)) & \xrightarrow{o_1} & H^2(D_1^{\cdot}) \\ & & \wr\Vert & & \wr\Vert \\ & & T^1(A,N) & & T^1(f/A,N \otimes_A B). \end{array}$$

Der Modul $H^1(D_2^{\cdot})$ ist isomorph zu $Ex(A \longrightarrow B \longrightarrow C,N)$ und der Modul $T^1(A,N)$ zu $Ex(A,N)$. Dabei ist $\pi : Ex(A \longrightarrow B \longrightarrow C,N) \longrightarrow Ex(A,N)$ diejenige Abbildung, welche einer verträglichen Erweiterung $A' \longrightarrow B' \longrightarrow C'$ von $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ durch N die Erweiterung A' von A zuordnet, wie man leicht sieht. Hieraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

§2 Der Kotangentenkomplex für komplexe Räume

A. Simpliziale Schemata steinscher Kompakta

Unter einem simplizialen Schema versteht man eine Menge A_o und ein System A von Teilmengen von A_o, genannt die Simplices, so daß A alle einelementigen Teilmengen von A_o enthält und mit jedem Simplex α in A auch jede Teilmenge von α ein Simplex ist.

(2.1) Definition: Ein simpliziales Schema geringter Räume besteht aus einem simplizialen Schema A, einer Familie $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$

von geringten Räumen und aus Morphismen

$$p_{\alpha\beta} : W_\beta \longrightarrow W_\alpha$$

für je zwei Simplices α, β mit $\alpha \leq \beta$, welche miteinander verträglich sind.

Sind die Räume W_α komplexe Räume, so wollen wir von einem simplizialen Schema komplexer Räume sprechen. Analog soll von einem simplizialen Schema steinscher Kompakta die Rede sein, wenn es zu jedem α einen komplexen Raum X und eine steinsche kompakte Teilmenge K von X gibt, so daß W_α isomorph zu $(K, \mathcal{O}_X/K)$ ist. Ist $W_* := \{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ein simpliziales Schema komplexer Räume oder steinscher Kompakta, so wollen wir unter einem Unterraum von W_* stets ein simpliziales Schema $V_* = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ verstehen derart, daß $V_\alpha \subseteq W_\alpha$ durch ein kohärentes Ideal in $\mathcal{O}_{W_\alpha}$ definiert wird. Ein simpliziales Schema komplexer Räume oder steinscher Kompakta soll kurz glatt heißen, wenn alle Halmringe regulär lokale Ringe sind.

In naheliegender Weise definiert man Morphismen zwischen simplizialen Schemata geringter Räume $W_* = \{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $V_* = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$. Ein Morphismus $g_* : W_* \longrightarrow V_*$ besteht aus einer Abbildung $\tau : A_o \longrightarrow B_o$, so daß für jedes Simplex $\alpha \in A$ auch $\tau(\alpha)$ ein Simplex ist, und aus einer Familie von Morphismen

$$g_\alpha : W_\alpha \longrightarrow V_{\tau(\alpha)} \ ,$$

welche miteinander verträglich sind.

Wir definieren nun noch das kartesische Produkt zweier simplizialer Schemata geringter Räume (bzw. komplexer Räume, bzw. steinscher Kompakta) $W_* = \{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $V_* = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$. Sei $C_o := A_o \times B_o$. Eine Teilmenge $\gamma \subseteq C_o$ sei ein Simplex, wenn $\pi_1(\gamma)$ und $\pi_2(\gamma)$ Simplices sind. Es sei dann

$$(W_* \times V_*)_\gamma := W_{\pi_1(\gamma)} \times V_{\pi_2(\gamma)}$$

Die Morphismen $p_{\gamma\delta}$ seien in naheliegender Weise definiert. Ähnlich läßt sich auch ein gefasertes Produkt definieren.

Sei W_* ein simpliziales Schema geringter Räume. Unter einem $\mathcal{O}_{W_*}$-Modul versteht man eine Familie von $\mathcal{O}_{W_\alpha}$-Moduln $\mathcal{M}_\alpha$ zusammen mit verträglichen Abbildungen $p^*_{\alpha\beta}(\mathcal{M}_\alpha) \longrightarrow \mathcal{M}_\beta$ für

$\alpha \le \beta$. Für zwei $\mathcal{O}_{W_*}$-Moduln $\mathcal{M}_*$ und $\mathcal{N}_*$ sei $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{W_*}}(\mathcal{M}_*, \mathcal{N}_*)$ die Menge aller Familien von $\mathcal{O}_{W_\alpha}$-Homomorphismen $f_\alpha : \mathcal{M}_\alpha \longrightarrow \mathcal{N}_\alpha$, welche verträglich sind. Man sieht leicht, daß die $\mathcal{O}_{W_*}$-Moduln eine abelsche Kategorie $\underline{\mathrm{Mod}}(W_*)$ bilden.

Analog kann man den Begriff des kohärenten Moduls fassen. Die kohärenten $\mathcal{O}_{W_*}$-Moduln bilden eine abelsche Unterkategorie $\underline{\mathrm{Coh}}(W_*)$ von $\underline{\mathrm{Mod}}(W_*)$.

Seien nun $W_* = \{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $V_* = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ simpliziale Schemata geringter Räume und $f: W_* \longrightarrow V_*$ ein Morphismus. $\tau : A_0 \longrightarrow B_0$ sei die zugehörige Abbildung der Indexmengen. Dann lassen sich wie üblich adjungierte Funktoren

$$f_* : \underline{\mathrm{Mod}}(W_*) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(V_*)$$

$$f^* : \underline{\mathrm{Mod}}(V_*) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(W_*)$$

definieren derart, daß man für einen $\mathcal{O}_{W_*}$-Modul $\mathcal{F}_*$ und einen $\mathcal{O}_{V_*}$-Modul $\mathcal{G}_*$ eine bijektive Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{W_*}}(f^*(\mathcal{G}_*), \mathcal{F}_*) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{V_*}}(\mathcal{G}_*, f_*(\mathcal{F}_*))$$

hat. Der Funktor f^* ist einfach zu definieren. Es sei

$$f^*(\mathcal{G}_*)_\alpha := f_\alpha^*(\mathcal{G}_{\tau(\alpha)}),$$

wobei die Übergangshomomorphismen in naheliegender Weise definiert werden. Sei nun $\mathcal{F}_*$ ein $\mathcal{O}_{W_*}$-Modul und $\beta \in B$ fest. Für $\alpha \in A$ mit $\beta \le \tau(\alpha)$ bezeichne $f_{\beta\alpha} : W_\alpha \longrightarrow V_\beta$ die Komposition von $f_\alpha : W_\alpha \longrightarrow V_{\tau(\alpha)}$ mit dem kanonischen Homomorphismus $V_{\tau(\alpha)} \longrightarrow V_\beta$. Sind $\alpha, \gamma \in A$ mit $\alpha \le \gamma$ und $\beta \le \tau(\alpha)$, so hat man einen Homomorphismus

$$f_{\beta\alpha *}(\mathcal{F}_\alpha) \xrightarrow{\psi_{\gamma\alpha}} f_{\beta\gamma *}(\mathcal{F}_\gamma),$$

induziert durch den Verbundhomomorphismus von $\mathcal{F}_*$. Sei dann $f_*(\mathcal{F}_*)_\beta$ der Kern der Abbildung

$$\prod_{\substack{\alpha \in A \\ \beta \le \tau(\alpha)}} f_{\beta\alpha *}(\mathcal{F}_\alpha) \xrightarrow{\varphi} \prod_{\substack{\alpha, \gamma \in A \\ \beta \le \tau(\alpha) \\ \alpha \le \gamma}} f_{\beta\gamma *}(\mathcal{F}_\gamma)$$

mit

$$\varphi(x)(\alpha, \gamma) = \psi_{\gamma\alpha}(x(\alpha)) - x(\gamma) .$$

Man sieht leicht, daß $f_*(\mathcal{F}_*)$ ein $\mathcal{O}_{V_*}$-Modul ist und daß die

Funktoren f_* und f^* adjungiert sind.

Wir wollen uns von nun an auf den Fall beschränken, daß W_* ein simpliziales Schema steinscher Kompakta ist.

Für jedes $\alpha \in A$ gibt es Funktoren

$$p_* : \underline{\mathrm{Mod}}(W_\alpha) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(W_*)$$

und

$$p^* : \underline{\mathrm{Mod}}(W_\alpha) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(W_*) .$$

Dabei sei für einen $\mathcal{O}_{W_\alpha}$-Modul $\mathcal{M}_\alpha$

$$p_*(\mathcal{M}_\alpha)_\beta := \begin{cases} p_{\beta\alpha *}(\mathcal{M}_\alpha) & \text{für } \beta \le \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$p^*(\mathcal{M}_\alpha)_\beta := \begin{cases} p^*_{\alpha\beta}(\mathcal{M}_\alpha) & \text{für } \alpha \le \beta \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Die Übergangshomomorphismen seien in naheliegender Weise definiert. Offenbar ist dann für einen $\mathcal{O}_{W_*}$-Modul $\mathcal{N}_*$

(1) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{W_*}}(\mathcal{N}_*, p_*(\mathcal{M}_\alpha)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{W_\alpha}}(\mathcal{N}_\alpha, \mathcal{M}_\alpha)$

und

(2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{W_*}}(p^*(\mathcal{M}_\alpha), \mathcal{N}_*) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{W_\alpha}}(\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)$.

Hieraus erhält man: Ist $\mathcal{J}_\alpha$ ein injektiver $\mathcal{O}_{W_\alpha}$-Modul, so ist $p_*(\mathcal{J}_\alpha)$ ein injektiver $\mathcal{O}_{W_*}$-Modul. Analog gilt: Ist $\mathcal{F}_\alpha$ ein projektiver $\mathcal{O}_{W_\alpha}$-Modul in $\underline{\mathrm{Coh}}(W_\alpha)$, so ist $p^*(\mathcal{F}_\alpha)$ ein projektiver Modul in $\underline{\mathrm{Coh}}(W_*)$. Der folgende Hilfssatz ist nun leicht zu zeigen.

__(2.2) Lemma__: (1) In $\underline{\mathrm{Mod}}(W_*)$ gibt es genügend viele injektive Objekte.

(2) In $\underline{\mathrm{Coh}}(W_*)$ gibt es genügend viele projektive Objekte.

__Beweis__: zu (1): Sei $\mathcal{M}_*$ ein $\mathcal{O}_{W_*}$-Modul und $\mathcal{J}_\alpha$ ein injektiver $\mathcal{O}_{W_\alpha}$-Modul, welcher $\mathcal{M}_\alpha$ enthält. Zu der Injektion $\mathcal{M}_\alpha \hookrightarrow \mathcal{J}_\alpha$ gehört eine Abbildung $\mathcal{M}_* \longrightarrow p_*(\mathcal{J}_\alpha)$. Offenbar ist $\mathcal{J}_* := \prod_\alpha p_*(\mathcal{J}_\alpha)$ ein injektiver $\mathcal{O}_{W_*}$-Modul, welcher $\mathcal{M}_*$ enthält.
zu (2): Ist $\mathcal{M}_*$ ein kohärenter $\mathcal{O}_{W_*}$-Modul, so wählen wir für

jedes α einen freien kohärenten $\mathcal{O}_{W_\alpha}$-Modul $\mathcal{F}_\alpha$ zusammen mit einer surjektiven Abbildung $\mathcal{F}_\alpha \longrightarrow \mathcal{M}_\alpha$ (Theorem A). Zu dieser Abbildung gehört ein Homomorphismus $p^*(\mathcal{F}_\alpha) \longrightarrow \mathcal{M}_*$. Offenbar ist dann $\mathcal{M}_*$ ein Quotient des projektiven kohärenten $\mathcal{O}_{W_*}$-Moduls $\mathcal{F}_* := \coprod_\alpha p^*(\mathcal{F}_\alpha)$.

(2.3) Bemerkungen: (1) Ist $\mathcal{J}_*$ ein injektiver $\mathcal{O}_{W_*}$-Modul, so muß nicht notwendig $\mathcal{J}_\alpha$ ein injektiver $\mathcal{O}_{W_\alpha}$-Modul sein. Sei beispielsweise $\beta \geq \alpha$ und $\mathcal{J}_\beta$ ein injektiver $\mathcal{O}_{W_\beta}$-Modul. Dann ist $p_*(\mathcal{J}_\beta)$ ein injektiver $\mathcal{O}_{W_*}$-Modul, aber $p_*(\mathcal{J}_\beta)_\alpha = p_{\alpha\beta *}(\mathcal{J}_\beta)$ ist i.A. nur ein welker $\mathcal{O}_{W_\alpha}$-Modul. Ist allerdings $p_{\alpha\beta}$ flach für alle $\alpha \leq \beta$, so ist p^* ein exakter Funktor und daher wegen (2) $\mathcal{J}_\alpha$ ein injektiver $\mathcal{O}_{W_\alpha}$-Modul für jeden injektiven $\mathcal{O}_{W_*}$-Modul $\mathcal{J}_*$.

(2) Für jeden injektiven $\mathcal{O}_{W_*}$-Modul $\mathcal{J}_*$ ist $\mathcal{J}_\alpha$ ein welker $\mathcal{O}_{W_\alpha}$-Modul. Beweis: Für Moduln der Form $p_*(\mathcal{J}_\beta)$ mit einem injektiven $\mathcal{O}_{W_\beta}$-Modul $\mathcal{J}_\beta$ ist die Aussage wohlbekannt, vgl. [14], §7. Ist $\mathcal{J}_*$ ein beliebiger injektiver $\mathcal{O}_{W_*}$-Modul, so ist $\mathcal{J}_*$ ein direkter Summand eines direkten Produktes von Moduln der obigen Form, vgl. den Beweis von (2.2). Daraus folgt die Behauptung auch im allgemeinen Fall.

(3) Ist $\mathcal{P}_*$ ein beliebiger projektiver Modul in Coh(W_*), so gibt es projektive $\mathcal{O}_{W_\alpha}$-Moduln $\mathcal{Q}_\alpha$ und einen Isomorphismus $\mathcal{P}_* \cong \coprod_\alpha p^*(\mathcal{Q}_\alpha)$. Um dies einzusehen, reicht es offenbar, die folgende Aussage zu zeigen. Ist $\alpha \in A$ derart, daß für $\beta \subsetneq \alpha$ $\mathcal{P}_\beta = 0$ gilt, so ist $p^*(\mathcal{P}_\alpha) \hookrightarrow \mathcal{P}_*$ ein direkter Summand.
Beweis: Da $\mathcal{P}_*$ projektiv ist und die kanonische Abbildung

$$\coprod_\gamma p^*(\mathcal{P}_\gamma) \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathcal{P}_*$$

surjektiv ist, gibt es einen Homomorphismus

$$\mathcal{P}_* \xrightarrow{\ \psi\ } \coprod_\gamma p^*(\mathcal{P}_\gamma)$$

mit $\varphi\psi = \mathrm{id}_{\mathcal{P}_*}$. Aus der Voraussetzung folgt: $(\coprod_\gamma p^*(\mathcal{P}_\gamma))_\alpha = \mathcal{P}_\alpha$. Daher ist ψ_α die Identität, und die Komposition von ψ mit der Projektion

$$\coprod_\gamma p^*(\mathcal{P}_\gamma) \longrightarrow p^*(\mathcal{P}_\alpha)$$

ist offenbar ein Linksinverses zu $p^*(\mathcal{P}_\alpha) \longrightarrow \mathcal{P}_*$!

Da Mod(W_*) genügend viele injektive Objekte hat, kann man wie üblich den Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{W_*}}(-,-)$ ableiten. Die entstehenden

Funktoren wollen wir mit $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{W_*}}(-,-)$ bezeichnen. Wir wollen uns überlegen, daß man für kohärente $\mathcal{O}_{W_*}$-Moduln $\mathcal{M}_*, \mathcal{N}_*$ die Gruppen $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{W_*}}(\mathcal{M}_*, \mathcal{N}_*)$ auch mit projektiven Auflösungen von $\mathcal{M}_*$ berechnen kann. Dies ergibt sich aus dem folgenden

(2.4) Lemma: Sei $\mathcal{P}_*$ ein projektiver $\mathcal{O}_{W_*}$-Modul. Dann ist $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{W_*}}(\mathcal{P}_*, \mathcal{N}_*) = 0$ für $i > 0$ und jeden kohärenten $\mathcal{O}_{W_*}$-Modul $\mathcal{N}_*$. Insbesondere kann man $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{W_*}}(\mathcal{M}_*, \mathcal{N}_*)$ für kohärente $\mathcal{O}_{W_*}$-Moduln $\mathcal{M}_*$ und $\mathcal{N}_*$ mit einer projektiven Auflösung von $\mathcal{M}_*$ berechnen.

Beweis: Wegen (2.3),(3) reicht es zu zeigen, daß die Behauptung für Moduln von der Form $p^*(\mathcal{P}_\alpha)$ gilt, wobei $\mathcal{P}_\alpha$ ein projektiver $\mathcal{O}_{W_\alpha}$-Modul ist. Weil $\mathcal{P}_\alpha$ direkter Summand eines freien $\mathcal{O}_{W_\alpha}$-Moduls ist, reduziert man die Aussage leicht auf den Fall $\mathcal{P}_\alpha = \mathcal{O}_{W_\alpha}$. Ist dann $\mathcal{N}_* \longrightarrow \mathcal{J}^\cdot_*$ eine injektive Auflösung von $\mathcal{N}_*$, so ist

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{W_*}}(\mathcal{P}_*, \mathcal{J}^\cdot_*) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{W_\alpha}}(\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{J}^\cdot_\alpha) = \Gamma(W_\alpha, \mathcal{J}^\cdot_\alpha).$$

Weil $\mathcal{J}^\cdot_\alpha$ eine welke Auflösung von $\mathcal{N}_\alpha$ ist, berechnen sich aus diesem Komplex die Kohomologiegruppen $H^i(W_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)$, die aber nach Theorem B für $i > 0$ verschwinden. Daraus ergibt sich die Behauptung.-

(2.5) Beispiel: Sei X ein komplexer Raum und $\mathcal{K} = (K_i)_{i \in I}$ eine lokal endliche Überdeckung von X durch steinsche Kompakta. Dann erhält man zu $\mathcal{K}$ auf folgende Weise ein simpliziales Schema steinscher Kompakta $X_* = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Sei $A_0 := I$ und A die Menge aller $\alpha \subseteq A_0$ mit $X_\alpha := \bigcap_{i \in \alpha} K_i \neq \emptyset$. Für $\alpha \in A$ versehen wir X_α mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X | X_\alpha$. Die Inklusionen $X_\beta \hookrightarrow X_\alpha$ für $\alpha \leq \beta$ sind dann offenbar miteinander verträglich.

Die Inklusionen $j_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow X$ induzieren einen Morphismus $X_* \xrightarrow{\ j\ } X$. Wir betrachten den oben eingeführten Funktor

$$j_* : \underline{\mathrm{Mod}}(X_*) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(X).$$

Weil Mod(X_*) genügend viele injektive Objekte hat, läßt sich dieser Funktor ableiten zu einem Funktor

$$\underline{R}j_* : \underline{D}^+(X_*) \longrightarrow \underline{D}^+(X).$$

Es gibt nun eine einfache Beschreibung für diesen derivierten

Funktor.

Wir definieren zunächst für jeden $\mathcal{O}_{X_*}$ -Modul $\mathcal{M}_*$ einen Čechkomplex $C^\bullet(\mathcal{M}_*)$. Bezeichnet I^n die Menge aller geordneten n-Simplices von A, d.h. aller Tupel $i=(i_0,\dots,i_n)\in A_0^{n+1}$ mit $|i| := \{i_0,\dots,i_n\} \in A$, so sei

$$C^n(\mathcal{M}_*) := \prod_{i\in I^n} j_{|i|*}(\mathcal{M}_{|i|}) .$$

Für $\alpha \le \beta$ hat man eine Abbildung $p^*_{\alpha\beta}(\mathcal{M}_\alpha) \longrightarrow \mathcal{M}_\beta$, wozu ein Homomorphismus $j_{\alpha *}(\mathcal{M}_\alpha) \longrightarrow j_{\beta *}(\mathcal{M}_\beta)$ gehört. Die Abbildungen $C^n(\mathcal{M}_*) \longrightarrow C^{n+1}(\mathcal{M}_*)$ definiert man wie beim üblichen Cechkomplex, vgl. [14], 1 (3.5). Offenbar gilt dann: $H^0(C^\bullet(\mathcal{M}_*)) = j_*(\mathcal{M}_*)$. Wir definieren nun den Funktor $C^\bullet$ für Komplexe von $\mathcal{O}_{X_*}$ -Moduln. Für einen Komplex $\mathcal{M}^\bullet_*$ von $\mathcal{O}_{X_*}$ -Moduln sei $C^\bullet(\mathcal{M}^\bullet_*)$ der zu dem Doppelkomplex $(C^i(\mathcal{M}^j_*))_{i,j}$ gehörige Einfachkomplex. Der Funktor $C^\bullet$ überführt Quasiisomorphismen in Quasiisomorphismen. Das folgt leicht aus der Spektralsequenz

$$E_1^{pq} = C^q(H^p(\mathcal{M}^\bullet_*)) \Rightarrow H^{p+q}(C^\bullet(\mathcal{M}^\bullet_*)) ,$$

welche konvergiert, weil die Überdeckung $\mathcal{K}$ lokal endlich war. Hieraus folgt nun, daß $C^\bullet(-)$ einen Funktor der derivierten Kategorie induziert; wir wollen diesen Funktor ebenfalls mit $C^\bullet(-)$ bezeichnen. Aus der universellen Eigenschaft von $\underline{\underline{R}}j_*$ erhält man einen Morphismus $\underline{\underline{R}}j_* \longrightarrow C^\bullet(-)$. Wir wollen zeigen:

<u>(2.6) Lemma</u>: (1) Der Morphismus $\underline{\underline{R}}j_* \longrightarrow C^\bullet$ ist ein Isomorphismus.

(2) Sind $\mathcal{M},\mathcal{N}$ zwei $\mathcal{O}_X$-Moduln, so ist

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X_*}}(j^*(\mathcal{M}),j^*(\mathcal{N})) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}).$$

<u>Beweis</u>: zu (1): Es reicht offenbar zu zeigen, daß für einen injektiven $\mathcal{O}_{X_*}$ -Modul $\mathcal{I}_*$ der Homomorphismus $j_*(\mathcal{I}_*) \cong \underline{\underline{R}}j_*(\mathcal{I}_*) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{I}_*)$ ein Isomorphismus ist. Nun ist jeder injektive $\mathcal{O}_{X_\alpha}$ -Modul ein direkter Summand eines direkten Produkts von Moduln der Form $p_*(\mathcal{I}_\alpha)$, wobei $\mathcal{I}_\alpha$ ein injektiver $\mathcal{O}_{X_\alpha}$ -Modul ist. Ferner sind die Funktoren j_* und $C^\bullet$ mit direkten Produkten verträglich. Daher dürfen wir uns auf injektive Moduln der Gestalt $p_*(\mathcal{I}_\alpha)$ beschränken, wobei $\mathcal{I}_\alpha$

ein injektiver $\mathcal{O}_{X_\alpha}$ -Modul ist. In diesem Fall ist aber $C^\bullet(\mathcal{I}_*)$ nichts anderes als der übliche (Garben)-Čechkomplex von $\mathcal{I}_\alpha$ bezüglich der Überdeckung $\{X_\alpha \cap K_i\}_{i\in\alpha}$ von X_α, fortgesetzt zu C auf X. Daher folgt in diesem Fall die Behauptung aus [14], Th.5.2.1.

zu (2): Der Funktor $C^\bullet$ überführt Komplexe injektiver Moduln in Komplexe injektiver Moduln, vgl. (2.3),(1). Daraus und aus (1) ergibt sich für jeden $\mathcal{O}_{X_*}$ -Modul $\mathcal{N}_*$ und jeden $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$ ein Isomorphismus

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X_*}}(j^*(\mathcal{M}),\mathcal{N}_*) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},C^\bullet(\mathcal{N}_*)).$$

Ist $\mathcal{N}_*$ ein Modul der Form $j^*(\mathcal{N})$ mit einem $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{N}$, so ist $C^\bullet(j^*(\mathcal{N}))$ eine Auflösung von $\mathcal{N}$. Daher ist in diesem Fall die rechte Seite isomorph zu $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$. —

<u>B. Resolventen</u>

Sei W_* weiter ein simpliziales Schema steinscher Kompakta. Es sollen in diesem Abschnitt die Begriffe von §1,A,B auf verbundene Garbensysteme übertragen werden.

Unter einer graduierten antikommutativen $\mathcal{O}_{W_*}$ -Algebra wollen wir eine graduierte $\mathcal{O}_{W_*}$ -Algebra $\mathcal{A}_* = \coprod_{i \le 0} \mathcal{A}^i_*$ mit kohärenten homogenen Komponenten $\mathcal{A}^i_*$ verstehen, so daß die Multiplikation antikommutativ ist und $\mathcal{A}^0_*$ ein <u>Quotient</u> von $\mathcal{O}_{W_*}$ ist. Das soll natürlich insbesondere beinhalten, daß die Verbundhomomorphismen

$$p^*_{\alpha\beta}(\mathcal{A}_\alpha) \longrightarrow \mathcal{A}_\beta$$

für $\alpha \le \beta$ mit der Algebra-Struktur verträglich sind. In naheliegender Weise definiert man den Begriff des $\mathcal{A}_*$ -Moduls. Die betrachteten $\mathcal{A}_*$-Moduln seien alle graduiert mit kohärenten homogenen Komponenten.

Ein $\mathcal{A}_*$-Modul heiße <u>frei</u>, wenn er eine direkte Summe von Moduln der Form $p^*(\mathcal{F}_\alpha) \otimes_{\mathcal{O}_{W_*}} \mathcal{A}_*$ mit freien $\mathcal{O}_{W_\alpha}$-Moduln $\mathcal{F}_\alpha$ ist.

Eine $\mathcal{A}_*$-Algebra nennen wir frei, wenn sie isomorph ist zu der symmetrischen Algebra $S_{\mathcal{A}_*}(\mathcal{F}_*)$ über einem freien $\mathcal{A}_*$-Modul $\mathcal{F}_*$, wobei $\mathcal{F}_*^i = 0$ für $i \geq 0$. Im Gegensatz dazu soll eine $\mathcal{A}_*$-Algebra $\mathcal{B}_*$ lokal frei heißen, wenn $\mathcal{B}_{\alpha,x}$ eine freie $\mathcal{A}_{\alpha,x}$-Algebra ist für jedes $\alpha \in A$ und $x \in W_\alpha$.

Analog überträgt man den Begriff der (DG)-Algebra. Eine (DG)-Algebra sei eine graduierte antikommutative $\mathcal{O}_{W_*}$-Algebra zusammen mit einem System verträglicher $\mathcal{O}_{W_\alpha}$-Derivationen $s_\alpha : \mathcal{A}_\alpha \longrightarrow \mathcal{A}_\alpha$ vom Grade 1 mit $s^2=0$. Wie in §1 definiert man auch den Begriff des Homomorphismus von (DG)-Algebren, des (DG)-Moduls, etc.

Sei $\mathcal{A}_* \longrightarrow \mathcal{B}_*$ ein Homomorphismus von (DG)-Algebren. Wie in §1 wollen wir unter einer Resolvente von $\mathcal{B}_*$ über $\mathcal{A}_*$ eine lokal freie $\mathcal{A}_*$-Algebra $\mathcal{R}_*$ zusammen mit einem surjektiven $\mathcal{A}_*$-Homomorphismus $\mathcal{R}_* \longrightarrow \mathcal{B}_*$ verstehen, welcher als Homomorphismus von Komplexen ein Quasiisomorphismus ist. Eine freie Resolvente habe noch die zusätzliche Eigenschaft, daß $\mathcal{R}_*$ eine freie $\mathcal{A}_*$-Algebra im obigen Sinne ist.

Es sollen nun die Sätze (1.4) und (1.6) auf unsere neue Situation übertragen werden. Dabei werden wir die folgende Konstruktion benötigen. Für eine (DG)-Algebra $\mathcal{R}_\alpha$ über $\mathcal{O}_{W_\alpha}$ sei

$$q^*(\mathcal{R}_\alpha)_\beta := \begin{cases} p^*_{\alpha\beta}(\mathcal{R}_\alpha) & \text{falls } \beta \supseteq \alpha \\ \mathcal{O}_{W_\beta} & \text{sonst} \end{cases}$$

$q^*(\mathcal{R}_\alpha)$ ist in naheliegender Weise eine (DG)-Algebra über $\mathcal{O}_{W_*}$. Ähnlich wie bei dem Funktor p^* bei Moduln hat man für jede weitere $\mathcal{O}_{W_*}$-Algebra $\mathcal{S}_*$ eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{W_*}\text{-Alg}}(q^*(\mathcal{R}_\alpha), \mathcal{S}_*) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{W_\alpha}\text{-Alg}}(\mathcal{R}_\alpha, \mathcal{S}_\alpha).$$

Dabei bezeichne $\mathrm{Hom}_{\dots}$ auf beiden Seiten die Menge der (DG)-Homomorphismen.

(2.7) Satz: Jede (DG)-Algebra $\mathcal{B}_*$ über der (DG)-Algebra $\mathcal{A}_*$ besitzt eine freie Resolvente.

Beweis: Wir bemerken zunächst, daß die Behauptung für jedes α gilt, daß es also stets eine Resolvente $\mathcal{R}_\alpha$ von $\mathcal{B}_\alpha$ über $\mathcal{A}_\alpha$ gibt. Dies beweist man völlig analog wie (1.4), wobei man noch Theorem A und Theorem B für steinsche Kompakta zu verwenden hat.

Den allgemeinen Fall reduziert man mit einem einfachen Induktionsargument auf die folgende Aussage: Ist $\mathcal{A}_* \longrightarrow \mathcal{B}_*$ ein (DG)-Morphismus und ist $\mathcal{A}_\alpha \longrightarrow \mathcal{B}_\alpha$ ein surjektiver Quasiisomorphismus für $|\alpha| \leq n_0$, so gibt es eine freie $\mathcal{A}_*$-Algebra $\mathcal{R}_*$ und einen $\mathcal{A}_*$-Homomorphismus $\mathcal{R}_* \longrightarrow \mathcal{B}_*$ derart, daß $\mathcal{R}_\alpha \longrightarrow \mathcal{B}_\alpha$ ein surjektiver Quasiisomorphismus für $|\alpha| \leq n_0+1$ ist. Zum Beweis dieser Aussage wählen wir für $|\alpha| = n_0+1$ eine freie $\mathcal{A}_\alpha$-Algebra $\mathcal{R}_\alpha$, welche eine Resolvente für $\mathcal{B}_\alpha$ ist. Dann ist $\mathcal{R}_{\alpha *} := q^*(\mathcal{R}_\alpha) \otimes_{q^*(\mathcal{A}_\alpha)} \mathcal{A}_*$ eine freie $\mathcal{A}_*$-Algebra, und der Homomorphismus $\mathcal{R}_\alpha \longrightarrow \mathcal{B}_\alpha$ induziert einen $\mathcal{A}_*$-Algebramorphismus $\mathcal{R}_{\alpha *} \longrightarrow \mathcal{B}_*$. Offenbar leistet dann $\mathcal{R}_* := \bigotimes_{|\alpha| = n_0+1} \mathcal{R}_{\alpha *}$ das Gewünschte. Dabei sei $\otimes$ das gefaserte Tensorprodukt über $\mathcal{A}_*$. Man beachte, daß dieses Tensorprodukt für jeden Index endlich ist!

(2.8) Satz: Gegeben sei ein kommutatives Diagramm von (DG)-Algebren

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_* \arrow[r, dash] \arrow[d] & \mathcal{S}_* \arrow[d, "\beta"] \\ \mathcal{R}_* \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{B}_* \end{tikzcd}$$

wobei $\mathcal{R}_*$ eine freie $\mathcal{A}_*$-Algebra und β ein surjektiver Quasiisomorphismus ist. Dann gibt es einen $\mathcal{A}_*$-Homomorphismus $\varphi : \mathcal{R}_* \longrightarrow \mathcal{S}_*$ von (DG)-Algebren mit $\beta\varphi = \gamma$.

Beweis: Mit einem einfachen Induktionsargument sieht man, daß es ausreicht, die Behauptung für den Fall $\mathcal{R}_* = S_{\mathcal{A}_*}(p^*(\mathcal{F}_\alpha) \otimes_{\mathcal{O}_{W_*}} \mathcal{A}_*)$ mit einem freien $\mathcal{O}_{W_\alpha}$-Modul $\mathcal{F}_\alpha$ zu zeigen. Dann ist aber $\mathcal{R}_* = q^*(\mathcal{R}_\alpha) \otimes_{q^*(\mathcal{A}_\alpha)} \mathcal{A}_*$. Es genügt daher, einen $\mathcal{A}_\alpha$-Homomorphismus $\mathcal{R}_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} \mathcal{S}_\alpha$ zu konstruieren mit $\beta_\alpha \varphi_\alpha = \gamma_\alpha$. Das beweist man aber völlig analog wie (1.6), wobei man wieder Theorem A und Theorem B für steinsche Kompakta zu verwenden hat!

(2.9) Bemerkungen: (1) Ist $\mathcal{R}_*$ eine freie (DG)-Algebra über $\mathcal{A}_*$, so ist offenbar $\Omega_{\mathcal{R}_*/\mathcal{A}_*}$ ein freier (DG)-Modul über $\mathcal{R}_*$. Dies wird im folgenden häufig stillschweigend benutzt.

(2) Seien $W_* = \{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $V_* = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ simpliziale Schemata steinscher Kompakta und $g: W_* \longrightarrow V_*$ ein Morphismus mit der zugehörigen Abbildung $\tau: A_0 \to B_0$ der Indexmengen. Seien $\mathcal{A}_*$ eine (DG)-Algebra über $\mathcal{O}_{V_*}$ und $\mathcal{R}_*$ eine freie $\mathcal{A}_*$-Algebra. Dann ist i.A. $g^*(\mathcal{R}_*)$ keine freie $g^*(\mathcal{A}_*)$-Algebra. Ist allerdings τ injektiv, so sieht man leicht, daß mit $\mathcal{R}_*$ auch $g^*(\mathcal{R}_*)$ frei über $g^*(\mathcal{A}_*)$ ist. Die entsprechende Bemerkung gilt auch für Moduln.

(2.10) Definition: Sei $f: X \longrightarrow Y$ ein Morphismus komplexer Räume. Unter einer Resolvente $\mathcal{G}$ von X über Y verstehen wir

(1) Eine lokal endliche Überdeckung $\mathcal{K} = (K_i)_{i \in I}$ von X durch steinsche Kompakta. X_* sei das zugehörige simpliziale Schema steinscher Kompakta.

(2) Ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_* \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & W_* \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

wobei W_* ein simpliziales Schema steinscher Kompakta, i eine abgeschlossene Einbettung und $\tilde{f}$ eine glatte Abbildung ist.

(3) Eine Resolvente $\mathcal{R}_*$ von $\mathcal{O}_{X_*}$ über $\mathcal{O}_{W_*}$.

Dabei nennen wir $\tilde{f}$ glatt, wenn für jedes $\alpha \in A$ und jedes $x \in W_\alpha$ $\mathcal{O}_{W_\alpha, x}$ ein freier Potenzreihenring über $\mathcal{O}_{Y, \tilde{f}_\alpha(x)}$ ist.

Sei

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y' \arrow[r, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von komplexen Räumen und $\mathcal{G}'$ bzw. $\mathcal{G}$ eine Resolvente von X' über Y' bzw. von X über Y. Unter einem Morphismus $\mathcal{G}' \xrightarrow{G} \mathcal{G}$ über (g,h) verstehen wir

(1) Eine Abbildung $I' \xrightarrow{\tau} I$ mit $g(K'_i) \subseteq K_{\tau(i)}$ für $i \in I'$.

(2) Einen Morphismus $W'_* \xrightarrow{\tilde{g}} W_*$, welcher das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X'_* \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & W'_* \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{g}"'] & Y' \arrow[d, "h"] \\ X_* \arrow[r] & W_* \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

(3) Einen Morphismus von (DG)-Algebren $\tilde{g}^*(\mathcal{R}_*) \longrightarrow \mathcal{R}'_*$, welcher das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{g}^*(\mathcal{R}_*) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{R}'_* \arrow[d] \\ \tilde{g}^*(\mathcal{O}_{X_*}) \arrow[r] & \mathcal{O}_{X'_*} \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Wir wollen zeigen:

(2.11) Lemma: (a) Jeder Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ zwischen komplexen Räumen besitzt eine Resolvente.

(b) Ist

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm komplexer Räume und $\mathcal{G}$ eine Resolvente von X über Y, so gibt es eine Resolvente $\mathcal{G}'$ von X' über Y' und einen Morphismus $\mathcal{G}' \xrightarrow{G} \mathcal{G}$ über (g,h).

(c) Sind $\mathcal{G}' \overset{G_1}{\underset{G_2}{\rightrightarrows}} \mathcal{G}$ zwei Morphismen über (g,h), so gibt es eine Resolvente $\mathcal{G}''$ von X' über Y' und ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{G}' \arrow[dl, "id"'] \arrow[dr, "G_i"] \arrow[dd, "H_i"] & \\ \mathcal{G}' & & \mathcal{G} \\ & \mathcal{G}'' \arrow[ul, "\pi'"] \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

welches für i=1,2 kommutativ ist und wobei die Morphismen zwischen $\mathcal{G}'$ und $\mathcal{G}''$ über der Identität liegen.

(d) Sei $\mathcal{G}$ eine Resolvente von X über Y und $\mathcal{G}'$ eine Resolvente von X' über Y'. Dann gibt es eine Resolvente $\mathcal{G}''$ von X' über Y' und Morphismen $\mathcal{G}''\longrightarrow\mathcal{G}'$ sowie $\mathcal{G}''\longrightarrow\mathcal{G}$ über (id,id) bzw. (g,h).

Beweis: Wir zeigen zunächst (b). Sei $\mathcal{G}$ durch die Daten $\mathcal{K}=(K_i)_{i\in I}$, X_*, $W_*=\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ und $\mathcal{R}_*$ gegeben. Wir wählen eine lokal endliche Überdeckung $\mathcal{K}'=(K'_j)_{j\in J}$ von X' durch steinsche Kompakta, welche feiner als die Überdeckung $(g^{-1}(K_i))_{i\in I}$ ist. $\tau:J\longrightarrow I$ sei eine Verfeinerungsabbildung. Ferner sei die Überdeckung so gewählt, daß es Umgebungen U'_j von K'_j in X' und abgeschlossene Einbettungen $\varphi'_j:U'_j\longrightarrow G'_j$ in offene Teilmengen eines $\mathbb{C}^{N_j}$ gibt. Sei $X'=\{X'_\beta\}_{\beta\in B}$ das zu $\mathcal{K}'$ gehörige simpliziale Schema. Für $\beta\in B$ sei

$$W'_\beta := (X'_\beta, \mathcal{O}_{G'_\beta\times Y'\times_Y W_{\tau(\beta)}})$$

mit $G'_\beta := \prod_{j\in\beta} G'_j$. Dabei betten wir X'_β in $G'_\beta\times Y'\times_Y W_{\tau(\beta)}$ ein vermöge der Abbildung $\prod_{j\in\beta}\varphi'_j\times f'\times\sigma$, wobei $\sigma:X'_\beta\longrightarrow W_{\tau(\beta)}$ die Komposition von $X'_\beta\xrightarrow{f}X_{\tau(\beta)}$ mit der Einbettung $X_{\tau(\beta)}\hookrightarrow W_{\tau(\beta)}$ bezeichne. Daß X'_β in $G'_\beta\times Y'\times_Y W_{\tau(\beta)}$ ein steinsches Kompaktum ist, folgt aus dem Satz von Siu [44]. Die Abbildungen $W'_\beta\longrightarrow W'_\gamma$ für $\gamma\le\beta$ seien die durch die Projektion

$$G'_\beta\times Y'\times_Y W_{\tau(\beta)}\longrightarrow G'_\gamma\times Y'\times_Y W_{\tau(\gamma)}$$

induzierten Morphismen. Die Projektionen auf Y' bzw. $W_{\tau(\beta)}$ ergeben Morphismen $W'_*\longrightarrow Y'$ bzw. $W'_*\xrightarrow{\tilde{g}}W_*$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X'_* \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & W'_* \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{g}"'] & Y' \arrow[d, "h"] \\
X_* \arrow[r] & W_* \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Sei $\mathcal{R}'_*$ eine $\tilde{g}^*(\mathcal{R}_*)$-Algebra, welche eine Resolvente von $\mathcal{O}_{X'_*}$ über $\mathcal{O}_{W'_*}$ ist. Offenbar definieren die Daten $\mathcal{K}'$, W'_*, $\mathcal{R}'_*$ eine Resolvente $\mathcal{G}'$ von X' über Y' mit den verlangten Eigenschaften.

Wählt man in der Aussage von (b) für X und Y den einpunktigen reduzierten komplexen Raum und für $\mathcal{G}$ die triviale Resolvente, so folgt aus (b) insbesondere die Existenz einer Resolvente für X'/Y'. (a) ist daher ein Spezialfall von (b).

zu (c): Die Resolventen $\mathcal{G}'$ bzw. $\mathcal{G}$ seien durch die Daten $\mathcal{K}'$, W'_*, $\mathcal{R}'_*$ bzw. $\mathcal{K}$, W_*, $\mathcal{R}_*$ gegeben. Sei dann $W''_* := W'_*\times_Y W_*$ und $\pi':W''_*\longrightarrow W'_*$ bzw. $\pi:W''_*\longrightarrow W_*$ die Projektion sowie X''_*

der zu der Überdeckung $\mathcal{K}'' := (K'_j\cap g^{-1}(K_i))_{i,j}$ gehörige Unterraum von W''_*. Ferner sei

$$\mathcal{R}''_* := \pi'^*(\mathcal{R}'_*)\otimes_{\mathcal{O}_{W''_*}}\pi^*(\mathcal{R}_*)$$

und $\mathcal{T}_*$ eine freie $\mathcal{R}''_*$-Algebra, welche eine Resolvente für $\mathcal{O}_{X''_*}$ über $\mathcal{O}_{W''_*}$ ist. Wir definieren dann $\mathcal{G}''$ als die zu den Daten $\mathcal{K}''$, W''_*, $\mathcal{T}_*$ gehörige Resolvente von X' über Y'. Es seien Π und Π' die durch die Projektionen induzierten Morphismen. Der Morphismus H_1 sei folgendermaßen definiert. Die Abbildung $\tilde{h}_1:W'_*\longrightarrow W''_*$ sei der Graph des Morphismus $\tilde{g}_1:W'_*\longrightarrow W_*$. Da die zugehörige Abbildung der Indexmengen offenbar injektiv ist, haben wir in $\tilde{h}_1^*(\mathcal{T}_*)$ eine freie $\tilde{h}_1^*(\mathcal{R}''_*)$-Algebra, vgl. (2.9),(2). Nun induziert die Abbildung $\tilde{g}_1^*(\mathcal{R}_*)\longrightarrow\mathcal{R}'_*$ einen Homomorphismus $\tilde{h}_1^*(\mathcal{R}''_*)\longrightarrow\mathcal{R}'_*$, welcher das Diagramm mit den durchgezogenen Pfeilen

$$\begin{tikzcd}
\tilde{h}_1^*(\mathcal{R}''_*) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{R}'_* \arrow[d] \\
\tilde{h}_1^*(\mathcal{T}_*) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathcal{O}_{X'_*}
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Daher gibt es einen Morphismus von (DG)-Algebren $\tilde{h}_1^*(\mathcal{T}_*)\longrightarrow\mathcal{R}'_*$, wie gestrichelt angedeutet, derart, daß obiges Diagramm kommutativ bleibt. Analog definiert man den Morphismus H_2. Damit ist auch Aussage (c) gezeigt.

Der Beweis der Aussage (d) verläuft völlig analog wie der erste Teil des Beweises von (c)!

(2.12) Bemerkung: Die obige Konstruktion zeigt insbesondere die Existenz von Resolventen von X/Y, für die $\Omega_{\mathcal{R}_*/Y}$ ein projektiver $\mathcal{R}_*$-Modul ist. Betrachtet man in (b) den Fall Y=Y', so zeigt der Beweis, daß es stets Resolventen $\mathcal{G}'$ von X'/Y' über $\mathcal{G}$ gibt, für die $\Omega_{\mathcal{R}'_*/\mathcal{R}_*}$ ein projektiver $\mathcal{R}'_*$-Modul ist.

Im nächsten Paragraphen werden wir Tangentenfunktoren für Morphismen komplexer Räume definieren. Wir werden dazu den Begriff der Resolvente einer Abbildung benötigen. Sei $f:X\longrightarrow Y$ ein Morphismus komplexer Räume über Z.

(2.13) Definition: Unter einer Resolvente $\mathcal{G}_*=(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2,F)$ von f/Z verstehen wir eine Resolvente $\mathcal{G}_1$ von X/Z, eine Resolvente $\mathcal{G}_2$ von Y/Z und einen Morphismus

$$F: \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2$$

über (f,id).

Seien $\mathcal{G}_*$ und $\mathcal{G}_*' = (\mathcal{G}_1', \mathcal{G}_2', F')$ Resolventen von f/Z. Unter einem Morphismus von $\mathcal{G}_*'$ nach $\mathcal{G}_*$ versteht man Morphismen $\mathcal{G}_i' \longrightarrow \mathcal{G}_i$ über (id,id) (i=1,2), welche das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_1' \arrow[r] \arrow[d, "F'"'] & \mathcal{G}_1 \arrow[d, "F"] \\ \mathcal{G}_2' \arrow[r] & \mathcal{G}_2 \end{tikzcd}$$

kommutativ machen.

Ähnlich wie oben gilt:

(2.14) Lemma: (a) Es gibt stets Resolventen von f/Z.

(b) Sind $\mathcal{G}_*'$, $\mathcal{G}_*$ Resolventen von f/Z, so gibt es eine Resolvente $\mathcal{G}_*''$ und Morphismen $\mathcal{G}_*'' \longrightarrow \mathcal{G}_*'$, $\mathcal{G}_*'' \longrightarrow \mathcal{G}_*$.

(c) Sind $\mathcal{G}_*'$, $\mathcal{G}_*$ Resolventen von f/Z und $\mathcal{G}_*' \rightrightarrows \mathcal{G}_*$ zwei Morphismen, so gibt es eine Resolvente $\mathcal{G}_*''$ von f/Z und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{G}_*' \arrow[dl, "id"'] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \\ \mathcal{G}_*' & \mathcal{G}_*'' \arrow[l, "\pi'"] \arrow[r, "\pi"'] & \mathcal{G}_* \end{tikzcd}$$

Beweis: (a) folgt leicht aus (2.11),(b). Die Beweise von (b) und (c) verlaufen entsprechend wie die Beweise von (2.11),(c),(d)!

C. Der Kotangentenkomplex

Sei $f: X \longrightarrow Y$ ein Morphismus komplexer Räume und $\mathcal{G}$ eine Resolvente von X über Y, gegeben durch die Daten $\mathcal{K} = (K_i)_{i \in I}$, W_*, $\mathcal{R}_*$. Mit $\underline{D}(X)$ wollen wir im folgenden die derivierte Kategorie von $\underline{\text{Mod}}(X)$, den $\mathcal{O}_X$-Moduln bezeichnen. Ferner sei

$\underline{D}^-(X)$ bzw. $\underline{D}^+(X)$ die Unterkategorie von $\underline{D}(X)$ der nach rechts bzw. nach links beschränkten Komplexe.

(2.15) Definition: Der Komplex

$$C^\bullet(\Omega_{\mathcal{R}_*/Y} \otimes_{\mathcal{R}_*} \mathcal{O}_{X_*})$$

in $\underline{D}(X)$ heißt der Kotangentenkomplex von X über Y und wird mit $L^\bullet_{X/Y}$ bezeichnet.

Dabei sei $C^\bullet(\cdots)$ der zu $\cdots$ gehörige Čechkomplex, vgl. (2.5).

Wir müssen zeigen, daß $L^\bullet_{X/Y}$ wohldefiniert ist, d.h. nicht von der Wahl der Resolvente abhängt. Ferner wollen wir zeigen, daß der Kotangentenkomplex funktoriell in X und Y ist. Dazu stellen wir die folgenden Betrachtungen an. Sei

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm komplexer Räume. Wir wählen Resolventen $\mathcal{G}'$ von X' über Y' und $\mathcal{G}$ von X über Y derart, daß es einen Morphismus $\mathcal{G}' \xrightarrow{G} \mathcal{G}$ über (g,h) gibt. $\mathcal{G}$ bzw. $\mathcal{G}'$ seien durch die Daten $\mathcal{K} = (K_i)_{i \in I}, X_*, W_* = \{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ bzw. $\mathcal{K}' = (K_j')_{j \in J}, X_*', W_*' = \{W_\beta'\}_{\beta \in B}$ gegeben. Es bezeichne $L^\bullet_{\mathcal{G}}$ den Komplex

$$C^\bullet(\Omega_{\mathcal{R}_*/Y} \otimes_{\mathcal{R}_*} \mathcal{O}_{X_*}),$$

entsprechend $L^\bullet_{\mathcal{G}'}$. Man überlegt sich leicht, daß der Morphismus der Resolventen einen $\mathcal{O}_{X'}$-Homomorphismus

$$g^*(L^\bullet_{\mathcal{G}}) \xrightarrow{dG} L^\bullet_{\mathcal{G}'}$$

induziert. Wir wollen zeigen:

(2.16) Lemma: (a) Sind $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ Resolventen von X über Y und ist $G: \mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus über der Identität, so ist $dG: L^\bullet_{\mathcal{G}} \longrightarrow L^\bullet_{\mathcal{G}'}$ ein Quasiisomorphismus.

(b) Sind $G_1, G_2: \mathcal{G}' \rightrightarrows \mathcal{G}$ zwei Morphismen über (g,h), so sind die induzierten Abbildungen

$$dG_1, dG_2: g^*(L^\bullet_{\mathcal{G}}) \rightrightarrows L^\bullet_{\mathcal{G}'}$$

als Morphismen in $\underline{D}^-(X')$ gleich.

Beweis: zu (a): Es bezeichne $\tau: J \longrightarrow I$ die zu G gehörige Abbildung der Indexmengen. Für $x \in X$ und $j \in J$ mit $x \in K'_j$ betrachten wir das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} L^\bullet_{\mathcal{G},x} & \xrightarrow{\varrho_1} & (\Omega_{\mathcal{R}_i/Y} \otimes_{\mathcal{R}_i} \mathcal{O}_{X_i})_x \\ {\scriptstyle dG}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle dG_i} \\ L^\bullet_{\mathcal{G}',x} & \xrightarrow{\varrho_2} & (\Omega_{\mathcal{R}'_j/Y} \otimes_{\mathcal{R}'_j} \mathcal{O}_{X_j})_x \end{array} \quad ,$$

wobei $j := \tau(i)$ sei und ϱ_1 bzw. ϱ_2 die Projektion bezeichne. Nun ist aufgrund der Aussagen von §1 dG_i ein Quasiisomorphismus, da die beiden rechten Komplexe nach Konstruktion offenbar Kotangentenkomplexe für den lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ über $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ sind. Es reicht daher zu zeigen, daß die Abbildungen ϱ_1 und ϱ_2 Quasiisomorphismen sind. Wir zeigen dies für die obere Abbildung. Für jedes $\alpha \in A$ mit $x \in X_\alpha$ sind die Moduln $(\Omega_{\mathcal{R}_\alpha/Y} \otimes_{\mathcal{R}_\alpha} \mathcal{O}_{X_\alpha})_x$ Kotangentenkomplexe der analytischen Algebra $\mathcal{O}_{X,x}$ über $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$. Aus der zu dem Doppelkomplex $C^\bullet(\Omega_{\mathcal{R}_*/Y} \otimes_{\mathcal{R}_*} \mathcal{O}_{X_*})$ gehörigen Spektralsequenz folgt daher leicht, daß ϱ_1 ein Quasiisomorphismus ist. Man beachte, daß diese Spektralsequenz konvergiert, da die Überdeckung $\mathcal{K}$ lokal endlich war!

zu (b): Nach (2.11) gibt es eine weitere Resolvente $\mathcal{G}''$ von X' über Y' und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{G}' \arrow[dl, "id"'] \arrow[d, shift right, "H_1"'] \arrow[d, shift left, "H_2"] \arrow[dr, shift left, "G_2"] \arrow[dr, shift right, "G_1"'] & \\ \mathcal{G}' & \mathcal{G}'' \arrow[l, "\pi'"] \arrow[r, "\pi"'] & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

wobei die Morphismen zwischen $\mathcal{G}'$ und $\mathcal{G}''$ über der Identität liegen. Hieraus ergibt sich ein kommutatives Diagramm von Komplexen

$$\begin{tikzcd} & L^\bullet_{\mathcal{G}'} & \\ L^\bullet_{\mathcal{G}'} \arrow[ur, "id"] \arrow[dr] & & g^*(L^\bullet_{\mathcal{G}}) \arrow[ul, shift left, "dG_2"'] \arrow[ul, shift right, "dG_1"] \arrow[dl] \\ & L^\bullet_{\mathcal{G}''} \arrow[uu, shift right, "dH_1"] \arrow[uu, shift left, "dH_2"'] & \end{tikzcd}$$

wobei die Morphismen zwischen $L^\bullet_{\mathcal{G}'}$ und $L^\bullet_{\mathcal{G}''}$ aufgrund von (a)

Quasiisomorphismen sind. Daraus ergibt sich leicht die Behauptung.

Aus dem obigen Lemma erhalten wir nun mit üblichen Schlüssen die Wohldefiniertheit des Kotangentenkomplexes $L^\bullet_{X/Y}$. Da ferner der Komplex $L^\bullet_{\mathcal{G}}$ ein flacher $\mathcal{O}_X$-Modul ist, stellt $g^*(L^\bullet_{\mathcal{G}})$ einen Repräsentanten von $\underline{\underline{L}}g^*(L^\bullet_{X/Y})$ dar.

Wir fassen das gewonnene Ergebnis zusammen:

(2.17) Satz: Der Kotangentenkomplex $L^\bullet_{X/Y}$ ist wohldefiniert. Für jedes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

hat man eine kanonische Abbildung

$$\underline{\underline{L}}g^*(L^\bullet_{X/Y}) \xrightarrow{L^\bullet(g)} L^\bullet_{X'/Y'} \quad .$$

Diese Abbildungen sind mit Kompositionen verträglich, d.h. ist

$$\begin{array}{ccc} X'' & \xrightarrow{h} & X' \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ Y'' & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

ein weiteres kommutatives Diagramm, so ist

$$L^\bullet(h) \circ h^*(L^\bullet(g)) = L^\bullet(g \circ h) \quad .$$

(2.18) Bemerkung: Der Beweis von (2.16),(a) zeigte, daß $L^\bullet_{X/Y}$ halmweise ein Kotangentenkomplex für die zugehörige Abbildung analytischer Algebren $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ ist. Daraus folgt speziell, daß die Gruppen $H^i(L^\bullet_{X/Y})$ verschwinden für $i > 0$. Daher ist $L^\bullet_{X/Y}$ in $\underline{D}^-(X)$.

Wir können nun die Tangentenfunktoren und Kotangentenfunktoren T^i, T_i, $\mathcal{T}^i$, $\mathcal{T}_i$ definieren.

(2.19) Definition: Sei $f: X \longrightarrow Y$ ein Morphismus komplexer Räume und $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann sei

$$T^i(X/Y, \mathcal{M}) := \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(L^\bullet_{X/Y}, \mathcal{M})$$

$$\mathcal{T}^i(X/Y, \mathcal{M}) := \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(L^\bullet_{X/Y}, \mathcal{M})$$

$$\mathcal{T}_i(X/Y,\mathcal{M}) := \mathcal{T}or_{-i}^{\mathcal{O}_X}(L^\bullet_{X/Y},\mathcal{M}) .$$

Ist X endlichdimensional, so kann man auch Funktoren $T_i(X/Y,\mathcal{M})$ definieren durch

$$T_i(X/Y,\mathcal{M}) := H^{-i}(\underline{\underline{R}}\Gamma(L^\bullet_{X/Y}\underline{\underline{\otimes}}\mathcal{M}))$$

vgl. [21] II §2.

Aus den Definitionen folgt sofort:

<u>(2.20) Satz</u>: Sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Dann hat man lange exakte Kohomologiesequenzen

$$\cdots\longrightarrow \mathcal{T}^i(X/Y,\mathcal{M}')\longrightarrow \mathcal{T}^i(X/Y,\mathcal{M})\longrightarrow \mathcal{T}^i(X/Y,\mathcal{M}'')\longrightarrow \mathcal{T}^{i+1}(X/Y,\mathcal{M}')\longrightarrow\cdots$$

$$\cdots\longrightarrow \mathcal{T}_i(X/Y,\mathcal{M}')\longrightarrow \mathcal{T}_i(X/Y,\mathcal{M})\longrightarrow \mathcal{T}_i(X/Y,\mathcal{M}'')\longrightarrow \mathcal{T}_{i-1}(X/Y,\mathcal{M}')\longrightarrow\cdots$$

Analoge exakte Sequenzen gibt es für die Funktoren T^i und, falls X endlichdimensional ist, auch für die Funktoren T_i.

Wir wollen nun einige elementare Eigenschaften des Kotangentenkomplexes herleiten.

<u>(2.21) Satz</u>: (1) Man hat kanonische Isomorphismen

$$\mathcal{T}_o(X/Y,\mathcal{M}) = \Omega_{X/Y}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{M}$$

$$\mathcal{T}^o(X/Y,\mathcal{M}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/Y},\mathcal{M})$$

$$T^o(X/Y,\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/Y},\mathcal{M}) .$$

(2) Es gibt eine Spektralsequenz

$$E_2^{pq} = H^q(X,\mathcal{T}^p(X/Y,\mathcal{M})) \Rightarrow T^{p+q}(X/Y,\mathcal{M}) .$$

(3) Die Garben $\mathcal{T}^p$, $\mathcal{T}_p$ sind kohärent und verschwinden für $p<0$.

(4) $L^\bullet_{X/Y,x}$ ist ein Kotangentenkomplex für

$$\mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} .$$

(5) Für einen glatten Morphismus $X\xrightarrow{f}Y$ gilt

$$\mathcal{T}^i(X/Y,\mathcal{M}) = \mathcal{T}_i(X/Y,\mathcal{M}) = 0$$

für $i\neq 0$.

(6) Ist $X\xrightarrow{f}Y$ eine abgeschlossene Einbettung mit $\mathcal{O}_X=(\mathcal{O}_Y/\mathcal{J})|X$,

so ist

$$\mathcal{T}_1(X/Y,\mathcal{M}) = \mathcal{J}/\mathcal{J}^2\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{M}$$

$$\mathcal{T}^1(X/Y,\mathcal{M}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2,\mathcal{M})$$

$$T^1(X/Y,\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2,\mathcal{M}) .$$

<u>Beweis</u>: Wir verwenden weiter die zu Beginn dieses Abschnitts eingeführten Bezeichnungen. Ist $\mathcal{R}_*$ eine Resolvente für $\mathcal{O}_{X_*}$ über $\mathcal{O}_{W_*}$, so ist wie im letzten Teil des Beweises von (2.16) die Projektion

$$C^\bullet(\Omega_{\mathcal{R}_*/Y}\otimes_{\mathcal{R}_*}\mathcal{O}_{X_*})|K_i \longrightarrow \Omega_{\mathcal{R}_i/Y}\otimes_{\mathcal{R}_i}\mathcal{O}_{X_i}$$

ein Quasiisomorphismus. Da die rechte Seite ein Garbenkomplex kohärenter $\mathcal{O}_{X_i}$-Moduln ist, welche halmweise einen Kotangentenkomplex bilden, erhalten wir unmittelbar (3) und (4) und aus den entsprechenden Aussagen für den lokalen Fall (vgl. (1.15)) auch die Aussage (5). Die Spektralsequenz (2) ist die übliche Spektralsequenz für das Ext von Komplexen. Zeigen wir nun (1). Wir haben eine kanonische Abbildung

$$C^\bullet(\Omega_{\mathcal{R}_*/Y}\otimes_{\mathcal{R}_*}\mathcal{O}_{X_*})\longrightarrow C^\bullet(\Omega_{X_*/Y}) .$$

Da $C^\bullet(\Omega_{X_*/Y})$ eine Auflösung von $\Omega_{X/Y}$ ist, erhalten wir in $\underline{D}(X)$ eine Abbildung

$$L^\bullet_{X/Y}\longrightarrow \Omega_{X/Y}$$

welche halmweise einen Isomorphismus $\mathcal{T}_o(X/Y,\mathcal{O}_X)\longrightarrow\Omega_{X/Y}$ induziert, wie aus dem lokalen Fall (1.15) folgt. Daraus ergibt sich (1).

Um (6) zu zeigen, wählen wir eine lokalendliche Überdeckung $\mathcal{K}=\{K_i\}_{i\in I}$ von X durch steinsche Kompakta. Sei A die Menge aller Teilmengen $\alpha\subseteq I$ mit $K_\alpha := \bigcap_{i\in\alpha} K_i\neq\emptyset$ und X_* das zugehörige simpliziale Schema steinscher Kompakta. Ferner sei $W_*=\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ gegeben durch

$$W_\alpha := (K_\alpha, \mathcal{O}_Y|K_\alpha)$$

und $\mathcal{R}_*\longrightarrow\mathcal{O}_{X_*}$ eine Resolvente von $\mathcal{O}_{X_*}$ über $\mathcal{O}_{W_*}$. Offenbar liefern dann die Daten $\mathcal{K}, W_*, \mathcal{R}_*$ eine Resolvente von X über Y. Das Differential auf $\mathcal{R}_*$ induziert eine kanonische Abbildung

$$\Omega_{\mathcal{R}_*/Y}\otimes_{\mathcal{R}_*}\mathcal{O}_{X_*}\longrightarrow j^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$$

wobei $j^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$ den $\mathcal{O}_{X_*}$-Modul $\{(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)|K_\alpha\}_\alpha$ bezeichne.

Hieraus erhält man einen Morphismus

$$L^\bullet_{X/Y} \longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$$

in $\mathbf{D}(X)$, welcher halmweise einen Isomorphismus $H^1(L^\bullet_{X/Y}) \longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ induziert, wie aus der entsprechenden lokalen Aussage folgt. Wegen $H^0(L^\bullet_{X/Y})=0$ ergibt sich daraus (6).

<u>(2.22) Bemerkungen</u>: (1) Die Funktoren T_i verschwinden i.A. nicht für $i<0$. Sei beispielsweise $*$ der einpunktige Raum mit reduzierter Struktur und X eine glatte kompakte Riemannsche Fläche. Dann ist $T_{-1}(X/*, \mathcal{O}_X) = H^1(X,\Omega_X) \cong H^0(X,\mathcal{O}_X)' \cong \mathbb{C} \neq 0$!

(2) Die kanonische Abbildung

$$T_0(X/Y,\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega_{X/Y}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{M}$$

ist i.A. kein Isomorphismus. Ist etwa $X \hookrightarrow Y$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit, welche durch das Ideal $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{O}_Y$ definiert wird, so ist $L^\bullet_{X/Y}\cong \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$, wobei wir $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ als Komplex auffassen, welcher im Grad -1 konzentriert ist. Folglich verschwindet $T_0(X/Y,\mathcal{O}_X)=H^1(X,\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$ i.A. nicht. Für eine elliptische Kurve $X\subseteq Y:=\mathbb{P}^2$ beispielsweise ist $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2\cong\mathcal{O}_X(-3)$, wie man leicht ausrechnet. Daher ist $H^1(X,\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)=H^0(X,\mathcal{O}_X(3))$ ein Vektorraum positiver Dimension.

Wir wollen nun eine zu (1.14) analoge Sequenz herleiten, welche die Kotangentenkomplexe dreier komplexer Räume verbindet. Wir fixieren zunächst die Bezeichnungen.

<u>(2.23)</u>: Sei $f:X\longrightarrow Y$ ein Morphismus komplexer Räume über Z und $\mathcal{G}_* = (\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2,F)$ eine Resolvente für f/Z. Es sei $\mathcal{G}_1$ bzw. $\mathcal{G}_2$ durch die Daten $\mathcal{K}=(K_i)_{i\in I}$, $W_* = \{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\mathcal{R}_*$ bzw. $\mathcal{L}=(L_j)_{j\in J}$, $V_*=\{V_\beta\}_{\beta\in B}$, $\mathcal{S}_*$ gegeben. Wir wollen voraussetzen, daß $\Omega_{\mathcal{S}_*/Z}$ und $\Omega_{\mathcal{R}_*/\mathcal{S}_*}$ projektive Moduln über $\mathcal{S}_*$ bzw. $\mathcal{R}_*$ sind, vgl. (2.12). Insbesondere ist dann natürlich $W_* \xrightarrow{\tilde f} V_*$ eine glatte Abbildung. Es bezeichne $\tau: A_0\longrightarrow B_0$ die zu $\tilde f$ gehörige Abbildung der Indexmengen. Sei $\overline{W}_*$ der Unterraum $\{W_\alpha \times_{V_{\tau(\alpha)}} Y_{\tau(\alpha)}\}_{\alpha\in A}$ von W_*. Offenbar induziert die Projektion auf Y eine glatte Abbildung $\overline{W}_*\longrightarrow Y$, und die (DG)-Algebra $\overline{\mathcal{R}}_* := \{\mathcal{R}_\alpha \otimes_{\mathcal{S}_{\tau(\alpha)}} \mathcal{O}_{Y_{\tau(\alpha)}}\}_{\alpha\in A}$ ist eine Resolvente für $\mathcal{O}_{\overline{W}_*}\longrightarrow\mathcal{O}_{X_*}$, wie aus dem entsprechenden lokalen

Fall (1.8) folgt. Daher bilden die Daten $\mathcal{K}$, $\overline{W}_*$, $\overline{\mathcal{R}}_*$ eine Resolvente für X/Y. Man hat eine exakte Sequenz

$$0\longrightarrow \tilde f^*(\Omega_{\mathcal{S}_*/Z}\otimes_{\mathcal{S}_*}\mathcal{O}_{Y_*}) \longrightarrow \Omega_{\mathcal{R}_*/Z}\otimes_{\mathcal{R}_*}\mathcal{O}_{X_*} \longrightarrow \Omega_{\overline{\mathcal{R}}_*/Y}\otimes_{\overline{\mathcal{R}}_*}\mathcal{O}_{X_*}\longrightarrow 0$$

woraus sich eine exakte Sequenz von Čechkomplexen ergibt:

$$0\longrightarrow C^\bullet(\tilde f^*(\Omega_{\mathcal{S}_*/Z}\otimes_{\mathcal{S}_*}\mathcal{O}_{Y_*}))\longrightarrow L^\bullet_{X/Z}\longrightarrow L^\bullet_{X/Y}\longrightarrow 0 .$$

Wir wollen zeigen, daß der linke Komplex ein Repräsentant für $\underline{L}f^*(L^\bullet_{Y/Z})$ ist. Das ergibt sich aus dem folgenden.

<u>(2.24) Lemma</u>: Die kanonische Abbildung

$$f^*(C^\bullet(\Omega_{\mathcal{S}_*/Z}\otimes_{\mathcal{S}_*}\mathcal{O}_{Y_*}))\longrightarrow C^\bullet(\tilde f^*(\Omega_{\mathcal{S}_*/Z}\otimes_{\mathcal{S}_*}\mathcal{O}_{Y_*}))$$

ist ein Quasiisomorphismus.

<u>Beweis</u>: Sei $x\in X$ und $y:=f(x)$. Man hat halmweise gegen die Kohomologie beider Komplexe Spektralsequenzen mit $E_2^{pq}=0$ für $p\neq 0$ und

$$E_2^{0q}=T_q(\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{O}_{Z,z},\mathcal{O}_{X,x})$$

da die $(\Omega_{\mathcal{S}_*/Z}\otimes_{\mathcal{S}_*}\mathcal{O}_{Y})_y$ flache $\mathcal{O}_{Y,y}$-Moduln sind, welche Kotangentenkomplexe für $\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{O}_{Z,z}$ sind.

Damit haben wir gezeigt:

<u>(2.25) Satz</u>: Seien $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ holomorphe Abbildungen komplexer Räume. Dann gibt es für geeignete Repräsentanten der Kotangentenkomplexe eine exakte Sequenz

$$0\longrightarrow\underline{L}f^*(L^\bullet_{Y/Z})\longrightarrow L^\bullet_{X/Z}\longrightarrow L^\bullet_{X/Y}\longrightarrow 0.$$

Hieraus erhält man beispielsweise für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$ lange exakte Sequenzen

$$\cdots\longrightarrow T^i(X/Y,\mathcal{M})\longrightarrow T^i(X/Z,\mathcal{M})\longrightarrow \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\underline{L}f^*(L^\bullet_{Y/Z}),\mathcal{M})\longrightarrow T^{i+1}(X/Y,\mathcal{M})\longrightarrow\cdots,$$

analog für die Funktoren $\mathcal{T}_i$, $\mathcal{T}^i$.

Wir wollen nun noch das Verhalten des Kotangentenkomplexes bei Basiswechsel untersuchen.

(2.26) Satz: Seien $X \xrightarrow{f} Y$, $Y' \xrightarrow{g} Y$ Morphismen komplexer Räume, $X' := X \times_Y Y'$ und g' die Projektion auf den ersten Faktor. Es sei f oder g flach. Dann ist die kanonische Abbildung

$$\underline{\underline{L}}g'^{*}(L^{\bullet}_{X/Y}) \longrightarrow L^{\bullet}_{X'/Y'}$$

ein Quasiisomorphismus.

Der Beweis ergibt sich sofort aus der entsprechenden lokalen Aussage (1.16).

§3 Die Funktoren T^i und Deformationen von holomorphen Abbildungen

A. Die Funktoren $T^i(f/Z,-)$

Wir wollen in diesem Abschnitt ähnlich wie in §1 D für holomorphe Abbildungen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ zwischen komplexen Räumen Funktoren $T^i(f/Z,-)$ definieren. Wir benötigen dazu einige Vorbereitungen.

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien und

$$G: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$$

ein additiver Funktor. Wir bilden die folgende Kategorie $\mathcal{C}$. Die Objekte von $\mathcal{C}$ seien die Tupel $(\mathcal{M},\mathcal{N},\varphi)$, wir schreiben häufig auch nur kurz $(\mathcal{M},\mathcal{N})$, wobei $\mathcal{M}$ ein Objekt von $\mathcal{A}$, $\mathcal{N}$ ein Objekt von $\mathcal{B}$ und φ ein Element von $Hom_{\mathcal{A}}(G(\mathcal{N}),\mathcal{M})$ ist. Sind $L=(\mathcal{M},\mathcal{N},\varphi)$ und $L'=(\mathcal{M}',\mathcal{N}',\varphi')$ Objekte in $\mathcal{C}$, so sei $Hom_{\mathcal{C}}(L,L')$ die Menge aller Homomorphismen $(\alpha,\beta) \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{M},\mathcal{M}') \times Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{N},\mathcal{N}')$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G(\mathcal{N}) \arrow[r, "G(\beta)"] \arrow[d, "\varphi"'] & G(\mathcal{N}') \arrow[d, "\varphi'"] \\ \mathcal{M} \arrow[r, "\alpha"] & \mathcal{M}' \end{tikzcd}$$

kommutiert. Man sieht leicht, daß auch $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie ist. Ferner gilt:

(3.1) Lemma: (a) Besitzen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ genügend projektive Objekte, so auch $\mathcal{C}$.

(b) Jedes projektive Objekt von $\mathcal{C}$ hat die Gestalt

$(\mathcal{P},0,0)\oplus(G(\mathcal{Q}),\mathcal{Q},id)$, wobei $\mathcal{P}$ ein projektives Objekt von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{Q}$ ein projektives Objekt von $\mathcal{B}$ ist.

(c) Es gebe einen zu G adjungierten Funktor F derart, daß für $\mathcal{M} \in Ob(\mathcal{A})$ und $\mathcal{N} \in Ob(\mathcal{B})$ gilt:

$$Hom_{\mathcal{A}}(G(\mathcal{N}),\mathcal{M}) \cong Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{N},F(\mathcal{M})) .$$

Ferner mögen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ genügend viele injektive Objekte besitzen. Dann besitzt auch $\mathcal{C}$ genügend viele injektive Objekte.

(d) Unter den Voraussetzungen von (c) hat jedes injektive Objekt in $\mathcal{C}$ die Gestalt $(\mathcal{I},F(\mathcal{I}))\oplus(0,\mathcal{J})$, wobei $\mathcal{I}$ ein injektives Objekt von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{J}$ ein injektives Objekt von $\mathcal{B}$ ist.

Der Beweis dieser Aussage verläuft ähnlich wie der Beweis von (2.2) und (2.3), Bemerkung (3) und sei dem Leser überlassen.

Sei $f:X \longrightarrow Y$ ein Morphismus komplexer Räume über Z. Wir wenden die obige Konstruktion an auf die Kategorie $\mathcal{A} = \underline{Mod}(X)$, $\mathcal{B} = \underline{Mod}(Y)$ und die Funktoren $F=f_*$, $G=f^*$. Nach dem obigen Lemma besitzt dann $\mathcal{C}$ genügend viele injektive Objekte. Daher ist der Funktor $Hom_{\mathcal{C}}(-,-)$ ableitbar.

(3.2) Lemma: Sei $\mathcal{G}=(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2,H)$ eine Resolvente von f/Z. Dann ist der Komplex

$$L^{\bullet}_{\mathcal{G}} := (L^{\bullet}_{\mathcal{G}_1}, L^{\bullet}_{\mathcal{G}_2})$$

als Objekt von $D^-(\mathcal{C})$ (bis auf eindeutig bestimmte Isomorphie) unabhängig von der Wahl der Resolvente $\mathcal{G}$ von f/Z.

Der Beweis dieser Aussage verläuft völlig analog zum Beweis von (2.16).

Die folgende Definition ist nun sinnvoll.

(3.3) Definition: Für einen $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{N}$ sei

$$T^i(f/Z,\mathcal{N}) := Ext^i_{\mathcal{C}}(L^{\bullet}_{\mathcal{G}}, (f^*(\mathcal{N}),\mathcal{N})) .$$

Wir wollen nun wie im lokalen Fall (1.18) lange exakte Kohomologiesequenzen herleiten, welche die Tangentenfunktoren von Abbildungen mit den in §2 definierten Tangentenfunktoren von Räumen verbinden.

<u>(3.4) Satz</u>: Für jeden $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{N}$ gibt es lange exakte Sequenzen

$$\cdots \longrightarrow T^i(X/Y, f^*(\mathcal{N})) \longrightarrow T^i(f/Z,\mathcal{N}) \longrightarrow T^i(Y/Z,\mathcal{N}) \longrightarrow T^{i+1}(X/Y,f^*(\mathcal{N})) \longrightarrow \cdots .$$

<u>Beweis</u>: Für eine offene Teilmenge U von Y bezeichne $\mathcal{O}_{Y,U}$ die Garbe, welche $\mathcal{O}_U$ auf U und 0 außerhalb von U ist. Jeder Komplex von $\mathcal{O}_Y$-Moduln mit nach rechts beschränkter Kohomologie läßt sich auflösen durch einen nach rechts beschränkten Komplex, welcher direkte Summe von Moduln des obigen Typs ist, vgl. [21] Chapt. II, prop. 1.2. Sei nun $\mathcal{G}_* = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, F)$ eine Resolvente von f/Z und $\mathcal{N}^\cdot \xrightarrow{\alpha} L^\cdot_{\mathcal{G}_2}$ eine Auflösung der beschriebenen Art. $\varphi : f^*(\mathcal{N}^\cdot) \longrightarrow L^\cdot_{\mathcal{G}_1}$ bezeichne die Komposition von $f^*(\alpha)$ mit dem durch F induzierten Homomorphismus $f^*(L^\cdot_{\mathcal{G}_2}) \longrightarrow L^\cdot_{\mathcal{G}_1}$. Aus (2.25) folgt, daß der Abbildungskegel von φ isomorph zu $L^\cdot_{X/Y}$ ist. Daher ergibt sich die Aussage aus dem nachfolgenden Lemma.–

<u>(3.5) Lemma</u>: Seien X,Y,f,$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$,$\mathcal{C}$ wie oben, ferner $(\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{N}^\cdot)$ bzw. $(\mathcal{R}^\cdot,\mathcal{S}^\cdot)$ nach rechts bzw. nach links beschränkte Komplexe in $\mathcal{C}$. Dabei sei $\mathcal{N}^\cdot$ als $\mathcal{O}_Y$-Modul eine direkte Summe von Moduln der Form $\mathcal{O}_{Y,U}$, wobei U in Y offen ist. Ferner sei $\mathcal{F}^\cdot$ der Abbildungskegel über dem Homomorphismus $f^*(\mathcal{N}^\cdot) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}^\cdot$. Dann gibt es eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}^\cdot,\mathcal{R}^\cdot) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{C}}((\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{N}^\cdot),(\mathcal{R}^\cdot,\mathcal{S}^\cdot)) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{N}^\cdot,\mathcal{S}^\cdot) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}^\cdot,\mathcal{R}^\cdot) \longrightarrow \cdots$$

<u>Beweis</u>: Offenbar dürfen wir zum Beweis ohne Einschränkung annehmen, daß $(\mathcal{R}^\cdot,\mathcal{S}^\cdot)$ ein Komplex von injektiven Objekten in $\mathcal{C}$ ist. Aus der exakten Sequenz

$$0 \to \mathcal{M}^\cdot[-1] \to \mathcal{F}^\cdot[-1] \xrightarrow{\pi} f^*(\mathcal{N}^\cdot) \to 0$$

erhält man einen Quasiisomorphismus $\mathcal{M}^\cdot \xrightarrow{\alpha} C^\cdot(\pi)$, wenn $C^\cdot(\pi)$ den Abbildungskegel über π bezeichnet. Ferner hat man eine exakte Sequenz

$$(*)\qquad 0 \to f^*(\mathcal{N}^\cdot) \xrightarrow{\beta} C^\cdot(\pi) \to \mathcal{F}^\cdot \to 0 .$$

Nun gibt es eine Homotopie h von $C^\cdot(\pi)$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}^\cdot \arrow[r, "\alpha"] & C^\cdot(\pi) \\ f^*(\mathcal{N}^\cdot) \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\beta"] & C^\cdot(\pi) \arrow[u, "-\mathrm{id}+h\partial+\partial h"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert. Man wähle etwa für h den Homomorphismus

$$C^n(\pi) = \mathcal{M}^n \oplus f^*(\mathcal{N}^{n+1}) \oplus f^*(\mathcal{N}^n) \longrightarrow C^{n-1}(\pi) = \mathcal{M}^{n-1} \oplus f^*(\mathcal{N}^n) \oplus f^*(\mathcal{N}^{n-1})$$
$$(x,y,z) \longmapsto (0,z,0).$$

Daher sind die Objekte $(\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{N}^\cdot,\varphi)$ und $(C^\cdot(\pi),\mathcal{N}^\cdot,\beta)$ in $D^-(\mathcal{C})$ isomorph. Aus der exakten Sequenz (*) erhalten wir eine exakte Sequenz von Komplexen

$$0 \to \operatorname{Hom}^\cdot_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}^\cdot,\mathcal{R}^\cdot) \to \operatorname{Hom}^\cdot_{\mathcal{C}}((C^\cdot(\pi),\mathcal{N}^\cdot),(\mathcal{R}^\cdot,\mathcal{S}^\cdot)) \to \operatorname{Hom}^\cdot_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{N}^\cdot,\mathcal{S}^\cdot) \to 0.$$

Aus dem ersten Komplex berechnen sich die Gruppen $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}^\cdot,\mathcal{R}^\cdot)$, aus dem zweiten die Moduln $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{C}}((\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{N}^\cdot),(\mathcal{R}^\cdot,\mathcal{S}^\cdot))$, so daß wir nur noch zeigen müssen, daß sich die Gruppen $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{N}^\cdot,\mathcal{S}^\cdot)$ aus dem letzten Komplex berechnen. Hierzu reicht es offenbar zu zeigen, daß für einen Modul der Form $\mathcal{O}_{Y,U}$ und einen welken $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{L}$ die Gruppen

$$\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_{Y,U},\mathcal{L})$$

verschwinden für $i > 0$. Nun hat man aber eine Funktorisomorphie

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_{Y,U},-) = H^0(U,-) .$$

Daher ist $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_{Y,U},\mathcal{L}) = H^i(U,\mathcal{L}) = 0$ für $i > 0$.–

<u>(3.6) Bemerkungen</u>: (1) Man sieht leicht, daß $T^0(f/Z,\mathcal{N})$ nichts anderes ist als die Menge aller verträglichen Derivationen in

$$\operatorname{Der}_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{O}_X, f^*(\mathcal{N})) \times \operatorname{Der}_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{O}_Y,\mathcal{N})$$

ist.

(2) Für X=Y ist offenbar $T^i(f/Z,\mathcal{N}) = T^i(X/Z,\mathcal{N})$!

<u>B. Die Liealgebrastruktur</u>

Sei $f: X \longrightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung komplexer Räume über Z und $\mathcal{G}_* = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, F)$ eine Resolvente für f/Z, wobei $\mathcal{G}_1$ bzw. $\mathcal{G}_2$ durch die Daten $\mathcal{X}$, W_*, $\mathcal{R}_*$ bzw. $\mathcal{L}$, V_*, $\mathcal{S}_*$ gegeben sei. Wir wollen voraussetzen, daß $\Omega_{\mathcal{R}_*/\mathcal{S}_*}$ und $\Omega_{\mathcal{S}_*/Z}$ projektive Moduln über $\mathcal{R}_*$ bzw. $\mathcal{S}_*$ sind. Dann gilt:

<u>(3.7) Satz</u>: (1) Sei $\mathcal{M}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul. Dann berechnen sich die $T^i(f/Z,\mathcal{M})$ aus dem Komplex

$$Der_Z((\mathcal{R}_*, \mathcal{S}_*), (f^*(\mathcal{M})_*, \mathcal{M}_*))$$

aller verträglichen Derivationen in

$$Der_Z(\mathcal{R}_*, f^*(\mathcal{M})_*) \times Der_Z(\mathcal{S}_*, \mathcal{M}_*) .$$

(2) Die kanonische Abbildung

$$Der_Z((\mathcal{R}_*, \mathcal{S}_*), (\mathcal{R}_*, \mathcal{S}_*)) \longrightarrow Der_Z((\mathcal{R}_*, \mathcal{S}_*), (\mathcal{O}_{X_*}, \mathcal{O}_{Y_*}))$$

ist ein Quasiisomorphismus.

Insbesondere erhält man aus (2) eine Liealgebrastruktur auf $T^*(f/Z, \mathcal{O}_Y)$, da der Komplex $Der_Z((\mathcal{R}_*, \mathcal{S}_*), (\mathcal{R}_*, \mathcal{S}_*))$ die Struktur einer (DG)-Liealgebra trägt. Zum Beweis benötigen wir einige Vorbereitungen.

Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie aller Tupel $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \varphi)$, wobei $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul, $\mathcal{N}$ ein $\mathcal{O}_Y$-Modul und $\varphi \in Hom_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathcal{N}), \mathcal{M})$ ist. $\mathcal{C}_*$ bzw. $\tilde{\mathcal{C}}_*$ sei die analog aus <u>Mod</u>(X_*) und <u>Mod</u>(Y_*) bzw. <u>Coh</u>(X_*) und <u>Coh</u>(Y_*) gebildete Kategorie. Wegen (3.1) besitzen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}_*$ genügend viele injektive Objekte und $\tilde{\mathcal{C}}_*$ genügend viele projektive Objekte. Ähnlich wie in §2,A hat man Funktoren

$$j^* : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_*$$
$$j_* : \mathcal{C}_* \longrightarrow \mathcal{C}$$

und einen Funktor $O^\cdot : \underline{D}(\mathcal{C}_*) \longrightarrow \underline{D}(\mathcal{C})$, wobei man für $(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \in Ob(\mathcal{C})$

$$j^*((\mathcal{M}, \mathcal{N})) := (j^*(\mathcal{M}), j^*(\mathcal{N}))$$

definiert, entsprechend für j_*, $O^\cdot$. Genau wie dort sind die Funktoren j_* und j^* adjungiert. Die folgende Aussage beweist man wie den analogen Hilfssatz (2.6):

<u>(3.8) Lemma</u>: (1) Es ist $O^\cdot(-)$ der derivierte Funktor von j_*.
(2) Sind M und N in $\mathcal{C}$, so ist

$$Ext^i_{\mathcal{C}_*}(j^*(M), j^*(N)) = Ext^i_{\mathcal{C}}(M,N) .$$

<u>(3.9) Lemma:</u> Sei P ein projektives Objekt in $\tilde{\mathcal{C}}_*$. Dann ist

$$Ext^i_{\mathcal{C}_*}(P,N) = 0 \qquad (i > 0)$$

für jedes weitere Objekt N in $\tilde{\mathcal{C}}_*$. Insbesondere kann man die Gruppen

$$Ext^i_{\mathcal{C}_*}(M,N)$$

für jedes weitere Objekt M in $\tilde{\mathcal{C}}_*$ mit projektiven Auflösungen berechnen.

<u>Beweis</u>: Jedes projektive Objekt P in $\tilde{\mathcal{C}}_*$ hat die Form $(\mathcal{P}_*, 0) \oplus (f^*(\mathcal{Q}_*), \mathcal{Q}_*)$ mit projektiven Moduln $\mathcal{P}_*$ und $\mathcal{Q}_*$. Wie im Beweis von (2.4) reduziert man die Behauptung leicht auf die Fälle $P = (p^*(\mathcal{O}_{W_\alpha}), 0)$ und $P = (f^*(p^*(\mathcal{O}_{V_\beta})), p^*(\mathcal{O}_{V_\beta}))$. Sei $(\mathcal{R}^\cdot_*, \mathcal{S}^\cdot_*)$ eine injektive Auflösung von $N = (\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$. Dann berechnen sich im ersten Fall aus dem Komplex

$$Hom_{\mathcal{C}_*}(P, (\mathcal{R}^\cdot_*, \mathcal{S}^\cdot_*)) = Hom_{\mathcal{O}_{W_*}}(p^*(\mathcal{O}_{W_\alpha}), \mathcal{R}^\cdot_*)$$
$$= \Gamma(W_\alpha, \mathcal{R}^\cdot_\alpha)$$

die Gruppen $H^i(W_\alpha, \mathcal{N}_{1\alpha})$, welche wegen Theorem B für $i > 0$ verschwinden. Analog sind im zweiten Fall die Gruppen $Ext^i_{\mathcal{C}_*}(P,N)$ isomorph zu $H^i(V_\beta, \mathcal{N}_{2\beta})$, welche ebenfalls Null sind für $i > 0$!

Wir zeigen nun noch eine Aussage, welche dem lokalen Hilfssatz (1.24) entspricht:

<u>(3.10) Lemma:</u> Sei W_* ein simpliziales Schema steinscher Kompakta, $\mathcal{R}_*$ eine (DG)-Algebra über $\mathcal{O}_{W_*}$, $\mathcal{F}_*$ ein freier (DG)-Modul über $\mathcal{R}_*$, sowie $\mathcal{M}_* \longrightarrow \mathcal{N}_*$ ein Quasiisomorphismus von (DG)-Moduln. Dann ist auch

$$Hom_{\mathcal{R}_*}(\mathcal{F}_*, \mathcal{M}_*) \longrightarrow Hom_{\mathcal{R}_*}(\mathcal{F}_*, \mathcal{N}_*)$$

ein Quasiisomorphismus von (DG)-Moduln.

<u>Beweis</u>: Mit Hilfe des Abbildungszylinders reduziert man die Aussage leicht auf den Fall $\mathcal{N}_* = 0$. Es gibt eine Filtrierung

$$0 = \mathcal{F}_{0*} \subseteq \mathcal{F}_{1*} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_*$$

durch freie (DG)-Untermoduln mit $\varinjlim \mathcal{F}_{\nu *} = \mathcal{F}_*$ derart, daß die

Quotienten $\mathcal{F}_{\nu+1*}/\mathcal{F}_{\nu*}$ die Form $p^*(\mathcal{G}_\alpha)\otimes_{q^*(\mathcal{R}_\alpha)}\mathcal{R}_*$ haben mit einem freien $\mathcal{R}_\alpha$-Modul $\mathcal{G}_\alpha$. Haben wir die Behauptung für einen Modul der obigen Form gezeigt, so können wir folgendermaßen weiterschließen. Wegen der exakten Sequenz

$$0\longrightarrow\mathcal{F}_{\nu*}\longrightarrow\mathcal{F}_{\nu+1*}\longrightarrow\mathcal{F}_{\nu+1*}/\mathcal{F}_{\nu*}\longrightarrow 0$$

hat man eine entsprechende exakte Sequenz

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_*}(\mathcal{F}_{\nu+1*}/\mathcal{F}_{\nu*},\mathcal{M}_*)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_*}(\mathcal{F}_{\nu+1*},\mathcal{M}_*)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_*}(\mathcal{F}_{\nu*},\mathcal{M}_*)\longrightarrow 0.$$

Durch Induktion nach ν sieht man daher leicht, daß jeder der Komplexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_*}(\mathcal{F}_{\nu*},\mathcal{M}_*)$ exakt ist. Wegen

$$\varprojlim_{\nu} \mathrm{Hom}^k_{\mathcal{R}_*}(\mathcal{F}_{\nu*},\mathcal{M}_*)=\mathrm{Hom}^k_{\mathcal{R}_*}(\mathcal{F}_*,\mathcal{M}_*)$$

folgt daraus schon der allgemeine Fall unter Zuhilfenahme von [20] I, prop. (4.4). Wir können uns daher beim Beweis auf den Fall $\mathcal{F}=p^*(\mathcal{F}_\alpha)\otimes_{q^*(\mathcal{R}_\alpha)}\mathcal{R}_*$ beschränken. Dann ist aber

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_*}(p^*(\mathcal{F}_\alpha)\otimes_{q^*(\mathcal{R}_\alpha)}\mathcal{R}_*,\mathcal{M}_*)\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_\alpha}(\mathcal{F}_\alpha,\mathcal{M}_\alpha).$$

Aus dem lokalen Fall (1.23) folgt, daß der Komplex $\mathcal{H}om_{\mathcal{R}_\alpha}(\mathcal{F}_\alpha,\mathcal{M}_\alpha)$ exakt ist. Daher folgt die Behauptung aus Theorem B.▪

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, den Beweis von (3.7) durchzuführen.

zu(2): Sei zur Abkürzung

$$\mathcal{L}_*:=\Omega_{\mathcal{R}_*/\mathcal{O}_Z}\otimes_{\mathcal{R}_*}\mathcal{O}_{X_*}$$
$$\mathcal{L}'_*:=\Omega_{\mathcal{S}_*/\mathcal{O}_Z}\otimes_{\mathcal{S}_*}\mathcal{O}_{Y_*}.$$

Wir haben eine exakte Sequenz

$$0\longrightarrow f^*(\mathcal{L}'_*)\longrightarrow\mathcal{L}_*\longrightarrow\Omega_{\mathcal{R}_*/\mathcal{S}_*}\otimes_{\mathcal{R}_*}\mathcal{O}_{X_*}\longrightarrow 0.$$

Nun sind aufgrund der Voraussetzungen $\Omega_{\mathcal{S}_*/\mathcal{O}_Z}$ und $\Omega_{\mathcal{R}_*/\mathcal{S}_*}$ freie Moduln. Daher ist auch $(\mathcal{L}_*,\mathcal{L}'_*)$ in $\mathcal{C}_*$ ein projektives Objekt, vgl. (3.1). Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\Omega_{\mathcal{R}_*/\mathcal{S}_*},\mathcal{R}_*) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}((\Omega_{\mathcal{R}_*/\mathcal{O}_Z},\Omega_{\mathcal{S}_*/\mathcal{O}_Z}),(\mathcal{R}_*,\mathcal{S}_*)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\Omega_{\mathcal{S}_*/\mathcal{O}_Z},\mathcal{S}_*) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\Omega_{\mathcal{R}_*/\mathcal{S}_*},\mathcal{O}_{X_*}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}((\mathcal{L}_*,\mathcal{L}'_*),(\mathcal{O}_{X_*},\mathcal{O}_{Y_*})) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathcal{L}'_*,\mathcal{O}_{Y_*}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Weil die beiden äußeren senkrechten Pfeile wegen (3.10) Quasi-isomorphismen sind, gilt dies auch für die mittlere Abbildung, womit (2) gezeigt ist.

zu(1): Aus (3.9) folgt, daß sich aus dem Komplex $\mathrm{Hom}((\mathcal{L}_*,\mathcal{L}'_*),(f^*(\mathcal{M})_*,\mathcal{M}_*))$ die Gruppen

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}_*}((\mathcal{L}_*,\mathcal{L}'_*),(f^*(\mathcal{M})_*,\mathcal{M}_*))$$

berechnen. Wir haben nun induziert durch den Čechfunktor $C^\cdot(-)$ eine kanonische Abbildung von diesem Modul in

$$T^i(f/Z,\mathcal{M})=\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(C^\cdot(\mathcal{L}_*,\mathcal{L}'_*),(f^*(\mathcal{M}),\mathcal{M}))$$

Es ist zu zeigen, daß diese Abbildung bijektiv ist. Gegen den oberen Modul hat man eine Spektralsequenz mit

$$E_2^{pq}=\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{C}_*}((H^q(\mathcal{L}_*),H^q(\mathcal{L}'_*)),(f^*(\mathcal{M})_*,\mathcal{M}_*))$$

und gegen den unteren eine Spektralsequenz mit

$$\tilde{E}_2^{pq}=\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{C}}((\mathcal{T}_q(X/Z,\mathcal{O}_X),\mathcal{T}_q(Y/Z,\mathcal{O}_Y)),(f^*(\mathcal{M}),\mathcal{M})).$$

Wegen $H^q(\mathcal{L}_*)=j^*(\mathcal{T}_q(X/Z,f^*(\mathcal{M})))$ und $H^q(\mathcal{L}'_*)=j^*(\mathcal{T}_q(Y/Z,\mathcal{M}))$, folgt nun aus (3.8), (2), daß $E_2^{pq}=\tilde{E}_2^{pq}$ gilt. Daher stimmen auch die ∞-Terme beider Spektralsequenzen überein, was zu beweisen war.▪

C. Die Funktoren T^i und Erweiterungen

Sei $g:Y\longrightarrow Z$ eine holomorphe Abbildung komplexer Räume und $\mathcal{N}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul. Unter einer Erweiterung von Y über Z durch $\mathcal{N}$ versteht man einen Raum Y' über Z, eine abgeschlossene Einbettung $Y\hookrightarrow Y'$, welche verträglich mit der Strukturabbildung nach Z ist, und einen $\mathcal{O}_{Y'}$-linearen Isomorphismus $\mathcal{J}_Y\cong\mathcal{N}$, wobei $\mathcal{J}_Y$ in $\mathcal{O}_{Y'}$ das Ideal von Y in Y' bezeichne. Sei $\mathcal{M}$ ein weiterer $\mathcal{O}_Y$-Modul, Y" eine Erweiterung von Y durch $\mathcal{M}$ und $\varphi:\mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{M}$ ein Homomorphismus. Unter einem Morphismus von der Erweiterung Y" nach Y' über φ versteht man einen Z-Morphismus $Y"\longrightarrow Y'$, welcher auf Y die Identität und auf $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{O}_{Y'}$ die

Abbildung φ induziert. Zwei Erweiterungen desselben Moduls $\mathcal{N}$ heißen isomorph, wenn es einen Morphismus zwischen diesen Erweiterungen über $\mathrm{id}_{\mathcal{N}}$ gibt. Die Menge der Isomorphieklassen aller Erweiterungen von Y über Z durch $\mathcal{N}$ werden wir im folgenden mit $\mathrm{Ex}(Y/Z,\mathcal{N})$ bezeichnen.

Wir wollen die obigen Begriffe nun verallgemeinern. Seien $Y_o, Y_1, \ldots, Y_n$ komplexe Räume über Z und

$$Y_{\bullet}: Y_n \xrightarrow{f_n} \cdots \xrightarrow{f_1} Y_o$$

eine Kette von Z-Morphismen. Für einen kohärenten $\mathcal{O}_{Y_o}$-Modul $\mathcal{N}_o$ bezeichne $\mathcal{N}_i$ das inverse Bild von $\mathcal{N}_o$ unter dem Morphismus $Y_i \longrightarrow Y_o$. Unter einer verträglichen Familie $Y'_{\bullet} = \{Y'_i\}_i$ von Erweiterungen von $Y_{\bullet}$ über Z durch $\mathcal{N}_o$ wollen wir eine Familie von Erweiterungen Y'_i von Y_i/Z durch $\mathcal{N}_i$ zusammen mit Z-Morphismen $Y'_i \xrightarrow{f'_i} Y'_{i-1}$ verstehen, welche auf Y_i die Abbildung f_i und auf $\mathcal{N}_{i-1} \subseteq \mathcal{O}_{Y'_{i-1}}$ die kanonische Abbildung nach $\mathcal{N}_i = f_i^*(\mathcal{N}_{i-1})$ induzieren. In naheliegender Weise erklärt man wieder Morphismen und Isomorphismen zwischen solchen Erweiterungen. Die Menge der Isomorphieklassen von Erweiterungen von $Y_{\bullet}/Z$ durch $\mathcal{N}_o$ wollen wir mit $\mathrm{Ex}(Y_{\bullet}/Z,\mathcal{N}_o)$ bezeichnen.

Der Fall $n=1$ wird uns im folgenden besonders interessieren. In dieser Situation wollen wir kurz von Erweiterungen von $f:=f_1$ über Z durch $\mathcal{N}_o$ sprechen und die Menge der Isomorphieklassen von Erweiterungen von f/Z mit $\mathrm{Ex}(f/Z,\mathcal{N}_o)$ bezeichnen.

In diesem Abschnitt soll der Zusammenhang zwischen den Erweiterungen von f/Z durch $\mathcal{N}_o$ und den Tangentenfunktoren $T^i(f/Z,\mathcal{N}_o)$ untersucht werden. Zunächst wollen wir zeigen, daß die Elemente von $T^o(f/Z,\mathcal{N}_o)$ in natürlicher Weise als Automorphismen von Erweiterungen interpretiert werden können.

<u>(3.11) Satz:</u> Sei

$$\begin{tikzcd}
Y'_1 \arrow[r, "f'"] \arrow[d, leftrightarrow] & Y'_o \arrow[d] \arrow[dr] & \\
Y_1 \arrow[r, "f"] & Y_o \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

eine Erweiterung von f/Z durch den kohärenten $\mathcal{O}_{Y_o}$-Modul $\mathcal{N}_o$. Dann gibt es eine natürliche bijektive Beziehung zwischen den Automorphismen dieser Erweiterung und den Elementen von $T^o(f/Z,\mathcal{N}_o)$.

<u>Beweis</u>: $T^o(f/Z,\mathcal{N}_o)$ ist nichts anderes als die Menge der verträglichen $\mathcal{O}_Z$-Derivationen (δ_1, δ_o) in

$$\mathrm{Der}_Z(\mathcal{O}_{Y_1},\mathcal{N}_1) \times \mathrm{Der}_Z(\mathcal{O}_{Y_o},\mathcal{N}_o)\,.$$

Jedes solche Paar ergibt durch Komposition mit der Restklassenabbildung verträgliche Derivationen $\tilde{\delta}_i: \mathcal{O}_{Y'_i} \longrightarrow \mathcal{N}_i$. Die Abbildungen $1+\tilde{\delta}_i: \mathcal{O}_{Y'_i} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y'_i}$, $i=1,0$, sind dann ein Automorphismus obiger Erweiterung. Man sieht leicht, daß die so konstruierte Abbildung von $T^o(f/Z,\mathcal{N}_o)$ in die Menge der Automorphismen der Erweiterung bijektiv ist.-

Wir wollen nun zeigen, daß es eine natürliche bijektive Abbildung zwischen den Mengen $\mathrm{Ex}(f/Z,\mathcal{N}_o)$ und $T^1(f/Z,\mathcal{N}_o)$ gibt. Hierzu benötigen wir einige Vorbereitungen.

<u>(3.12)</u>: Sei Y ein komplexer Raum über Z und $\mathcal{G}$ eine durch die Daten $\mathcal{K}$, W_*, $\mathcal{R}_*$ gegebene Resolvente von Y/Z, wobei der $\mathcal{R}_*$-Modul $\Omega_{\mathcal{R}_*/Z}$ projektiv ist. Sei $\mathcal{N}$ ein $\mathcal{O}_Y$-Modul und $\mathcal{N}_*$ der zugehörige $\mathcal{O}_{Y_*}$-Modul. Wir wollen jedem Zykel

$$\delta \in Z^1(\mathrm{Der}_Z(\mathcal{R}_*, \mathcal{N}_*))$$

folgendermaßen eine Erweiterung von Y durch $\mathcal{N}$ zuordnen. In dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{R}^1_* \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\delta"] & \mathcal{R}^o_* \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{Y_*} \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{N}_* \arrow[r] & \mathcal{O}_{Y'_*} \arrow[r] & \mathcal{O}_{Y_*} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

sei $\mathcal{O}_{Y'_*}$ die kohärente $\mathcal{O}_{W_*}$-Algebra $\mathcal{R}^o_* \coprod_{\mathcal{R}^1_*} \mathcal{N}_*$, wobei die Multiplikation durch

$$(x,n)\cdot(y,m) := (xy, xm+yn)$$

gegeben sei. Die untere Zeile in dem Diagramm ist exakt, weil δ ein Zykel ist. Daher verklebt sich die Garbe $\mathcal{O}_{Y'_*}$ auf Y zu einer analytischen Garbe $\mathcal{O}_{Y'}$, welche eine Erweiterung von

Y durch $\mathcal{N}$ definiert. Man sieht leicht, daß die so konstruierte Erweiterung bis auf Isomorphie nur von der Kohomologieklasse von δ abhängt. Wir erhalten somit eine Abbildung

$$\Psi : H^1(\mathrm{Der}_Z(\mathcal{R}_*, \mathcal{N}_*)) \longrightarrow \mathrm{Ex}(Y/Z, \mathcal{N}).$$

Es gilt:

<u>(3.13) Lemma</u>: Die oben konstruierte Abbildung Ψ ist bijektiv.

<u>Beweis</u>: Wir werden eine Abbildung

$$\Phi : \mathrm{Ex}(Y/Z, \mathcal{N}) \longrightarrow H^1(\mathrm{Der}_Z(\mathcal{R}_*, \mathcal{N}_*))$$

konstruieren, die invers zu Ψ ist. Sei Y' eine Erweiterung von Y über Z durch $\mathcal{N}$. Hieraus erhalten wir eine Erweiterung $\mathcal{O}_{Y'_*}$ von $\mathcal{O}_{Y_*}$ durch $\mathcal{N}_*$. Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{N}_* \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{W'_*} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{W_*} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{N}_* \arrow[r] & \mathcal{O}_{Y'_*} \arrow[r] & \mathcal{O}_{Y_*} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dabei sei $\mathcal{O}_{W'_*} := \mathcal{O}_{W_*} \times_{\mathcal{O}_{Y_*}} \mathcal{O}_{Y'_*}$. Aus [42], Satz (2.7) folgt leicht, daß W_*, versehen mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}_{W'_*}$, wieder ein simpliziales Schema steinscher Kompakta ist. Ferner ist $\mathcal{O}_{W'_*}$ halmweise eine triviale Erweiterung von $\mathcal{O}_{W_*}$ durch $\mathcal{N}_*$, weil W_* glatt über Z ist. Aus der oberen exakten Sequenz erhält man daher eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_* \longrightarrow \Omega_{W'_*/Z} \otimes_{\mathcal{O}_{W'_*}} \mathcal{O}_{W_*} \longrightarrow \Omega_{W_*/Z} \longrightarrow 0$$

Weil $\Omega_{W_*/Z}$ nach Voraussetzung ein projektiver Modul ist, spaltet diese Sequenz auf. Es gibt daher eine $\mathcal{O}_Z$-Derivation $\gamma : \mathcal{O}_{W'_*} \longrightarrow \mathcal{N}_*$ mit $\gamma|\mathcal{N}_* = \mathrm{id}_{\mathcal{N}_*}$. Daher ist die Erweiterung $\mathcal{O}_{W'_*}$ trivial, d.h. es ist $\mathcal{O}_{W'_*}$ isomorph zu der Idealisierung $\mathcal{O}_{W_*}[\mathcal{N}_*]$ von $\mathcal{O}_{W_*}$ durch $\mathcal{N}_*$. Hiermit ist insbesondere gezeigt, daß es einen Morphismus $\mathcal{O}_{W_*} \xrightarrow{\eta} \mathcal{O}_{Y'_*}$ gibt derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "s"] & \mathcal{R}^1_* \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\delta := \eta\circ s"'] & \mathcal{R}^o_* \arrow[r] \arrow[d, "\eta"'] & \mathcal{O}_{Y_*} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{N}_* \arrow[r] & \mathcal{O}_{Y'_*} \arrow[r] & \mathcal{O}_{Y_*} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Sei dann $\delta : \mathcal{R}_* \longrightarrow \mathcal{N}_*$ die Derivation $\eta \circ s$. Offenbar ist δ ein Zykel, dessen Kohomologieklasse nicht abhängt von der Wahl von η. Wir können daher der Erweiterung Y' die durch δ repräsentierte Kohomologieklasse in $H^1(\mathrm{Der}_Z(\mathcal{R}_*, \mathcal{N}_*))$ zuordnen. Man sieht leicht, daß die so konstruierte Abbildung von $\mathrm{Ex}(Y/Z, \mathcal{N})$ in $H^1(\mathrm{Der}_Z(\mathcal{R}_*, \mathcal{N}_*))$ invers zu Ψ ist.-

<u>(3.14)</u>: Wir wollen die oben gewonnene Beziehung nun verallgemeinern auf Ketten holomorpher Abbildungen. Seien $Y_o, \dots, Y_n$ komplexe Räume über Z,

$$Y. : Y_n \xrightarrow{f_n} \dots \xrightarrow{f_1} Y_o$$

eine Kette von Z-Morphismen, $\mathcal{N}_o$ ein kohärenter $\mathcal{O}_{Y_o}$-Modul und $\mathcal{N}_i$ das inverse Bild von $\mathcal{N}_o$ unter dem Morphismus $Y_i \longrightarrow Y_o$. Ferner seien $\mathcal{G}_\nu$ durch die Daten $\mathcal{K}_\nu$, $W_{\nu *}$, $\mathcal{R}_{\nu *}$ gegebene Resolventen für Y_ν über Z derart, daß man eine Kette von Morphismen

$$\mathcal{G}_n \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{G}_o$$

über den Abbildungen f_ν hat. Wir wollen voraussetzen, daß $\Omega_{\mathcal{R}_{\nu *}/\mathcal{R}_{\nu-1 *}}$ projektive $\mathcal{R}_{\nu *}$-Moduln sind. Es bezeichne $D^\cdot$ den Komplex aller Familien verträglicher Derivationen

$$(\delta_\nu)_\nu \in \prod\nolimits_\nu \mathrm{Der}_Z(\mathcal{R}_{\nu *}, \mathcal{N}_{\nu *}).$$

Wie in (3.12) kann man jedem Zykel $(\delta_\nu)_\nu$ in $Z^1(D^\cdot)$ eine Familie verträglicher Erweiterungen $\mathcal{O}_{Y'_{\nu *}}$ von $\mathcal{O}_{Y_{\nu *}}$ durch $\mathcal{N}_{\nu *}$ zuordnen:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{R}^1_{\nu *} \arrow[r] \arrow[d, "\delta_\nu"'] & \mathcal{R}^o_{\nu *} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{Y_{\nu *}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{N}_{\nu *} \arrow[r] & \mathcal{O}_{Y'_{\nu *}} \arrow[r] & \mathcal{O}_{Y_{\nu *}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Es seien dabei $\mathcal{O}_{Y'_{\nu *}} := \mathcal{R}^o_{\nu *} \coprod_{\mathcal{R}^1_{\nu *}} \mathcal{N}_{\nu *}$. Die so erhaltenen Erweiterungen $\mathcal{O}_{Y'_{\nu *}}$ verkleben sich zu analytischen Garben $\mathcal{O}_{Y'_\nu}$ auf Y_ν, welche eine Familie verträglicher Erweiterungen $\{Y'_\nu\}_\nu$ von $\{Y_\nu\}_\nu$ durch $\mathcal{N}_o$ definieren. Man sieht leicht, daß die so konstruierte Erweiterung von Y./Z bis auf Isomorphie nur von der Kohomologieklasse von $(\delta_\nu)_\nu$ in $H^1(D^\cdot)$ abhängt. Wie oben gilt dann:

<u>(3.15) Lemma</u>: Die obige Konstruktion liefert eine bijektive

Abbildung $H^1(D^\cdot) \longrightarrow \mathrm{Ex}(Y./Z, \mathcal{N}_o)$.

Der Beweis verläuft analog zum Beweis von (3.13) und sei daher fortgelassen.-

Wir betrachten die obige Aussage nun im Spezialfall n=1. Aus (3.7),(1) erhalten wir, daß $H^1(D^\cdot)$ isomorph ist zu $T^1(f/Z, \mathcal{N}_o)$. Somit ergibt sich als Folgerung:

(3.16) Satz: Es gibt eine natürliche bijektive Abbildung

$$\Phi : \mathrm{Ex}(f/Z, \mathcal{N}_o) \longrightarrow T^1(f/Z, \mathcal{N}_o) \text{ .-}$$

Bemerkung: Sei $\mathcal{M}_o$ ein weiterer kohärenter $\mathcal{O}_{Y_o}$-Modul und $\varphi : \mathcal{M}_o \longrightarrow \mathcal{N}_o$ ein Homomorphismus. Einer Extension $Y_1' \xrightarrow{f'} Y_o'$ von f durch $\mathcal{M}_o$ kann man die Erweiterung $Y_1'' \xrightarrow{\varphi_*(f')} Y_o''$ von f durch $\mathcal{N}_o$ zuordnen, wobei

$$\mathcal{O}_{Y_1''} := \mathcal{O}_{Y_1'} \coprod_{\mathcal{M}_1} \mathcal{N}_1 \quad .$$

Andererseits definiert φ eine Abbildung $T^1(\varphi)$. Man sieht leicht, daß diese beiden Abbildungen die Bijektion Φ respektieren, d.h. daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} T^1(f/Z, \mathcal{M}_o) \arrow[r, "T^1(\varphi)"] & T^1(f/Z, \mathcal{N}_o) \\ \mathrm{Ex}(f/Z, \mathcal{M}_o) \arrow[u, "\Phi"] \arrow[r, "\varphi_*"] & \mathrm{Ex}(f/Z, \mathcal{N}_o) \arrow[u, "\Phi"'] \end{tikzcd} \text{ .-}$$

Wir wollen uns nun mit dem folgenden Problem beschäftigen. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Morphismus komplexer Räume über Z, $\mathcal{N}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Z$-Modul und $\mathcal{N}_X$ bzw. $\mathcal{N}_Y$ das inverse Bild von $\mathcal{N}$ unter der Strukturabbildung $X \to Z$ bzw. $Y \to Z$. Wann läßt sich eine Erweiterung Z' von Z durch $\mathcal{N}$ fortsetzen zu Erweiterungen Y' von Y/Z' durch $\mathcal{N}_Y$ und X' von X/Y' durch $\mathcal{N}_X$ derart, daß $X' \to Y' \to Z'$ verträgliche Erweiterungen sind? Unser Ziel ist es, einen Homomorphismus $T^1(Z, \mathcal{N}) \xrightarrow{c_1} T^2(f/Z, \mathcal{N}_Y)$ zu konstruieren, so daß die zu der Erweiterung Z' gehörige Kohomologieklasse $\Phi(Z')$ genau dann unter c_1 verschwindet, wenn sich diese Erweiterung im obigen Sinne fortsetzen läßt.

Allgemeiner wollen wir für jedes i Abbildungen

$$c_i : T^i(Z, \mathcal{N}) \longrightarrow T^{i+1}(f/Z, \mathcal{N}_Y)$$

angeben. Dazu gehen wir wie folgt vor.

Seien $\mathcal{G}_X$, $\mathcal{G}_Y$, $\mathcal{G}_Z$ Resolventen von X,Y,Z derart, daß es Morphismen

$$\mathcal{G}_X \longrightarrow \mathcal{G}_Y \longrightarrow \mathcal{G}_Z$$

über den gegebenen Abbildungen der komplexen Räume gibt. Die Resolvente $\mathcal{G}_X$ sei durch die Daten $\mathcal{R}_*$, $W_* = \{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$, gegeben, analog $\mathcal{G}_Y$ durch $\mathcal{S}_*$, $V_* = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ und $\mathcal{G}_Z$ durch $\mathcal{T}_*$, $U_* = \{U_\gamma\}_{\gamma \in C}$. Wir wollen voraussetzen, daß die Moduln $\Omega_{\mathcal{T}_*}$, $\Omega_{\mathcal{S}_*/\mathcal{T}_*}$, $\Omega_{\mathcal{R}_*/\mathcal{S}_*}$ projektiv sind. Sei $D_1^\cdot$ die Menge aller verträglichen Derivationen in

$$\mathrm{Der}'_{\mathcal{T}_*}(\mathcal{S}_*, \mathcal{N}_{Y_*}) \times \mathrm{Der}_{\mathcal{T}_*}(\mathcal{R}_*, \mathcal{N}_{X_*})$$

sowie $D_2^\cdot$ die Menge aller verträglichen Derivationen in

$$\mathrm{Der}(\mathcal{T}_*, \mathcal{N}_*) \times \mathrm{Der}(\mathcal{S}_*, \mathcal{N}_{Y_*}) \times \mathrm{Der}(\mathcal{R}_*, \mathcal{N}_{X_*}) \text{ .}$$

Wir haben eine exakte Sequenz von Komplexen

$$(*) \quad 0 \longrightarrow D_1^\cdot \longrightarrow D_2^\cdot \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathcal{T}_*, \mathcal{N}_*) \longrightarrow 0 \text{ .}$$

Aus der zugehörigen langen Kohomologiesequenz erhalten wir Abbildungen $c_i : H^i(\mathrm{Der}(\mathcal{T}_*, \mathcal{N}_*)) \longrightarrow H^{i+1}(D_1^\cdot)$. Die Gruppen $H^i(\mathrm{Der}(\mathcal{T}_*, \mathcal{N}_*))$ sind isomorph zu $T^i(Z, \mathcal{N})$, vgl. (3.7). Aus dem nachfolgenden Lemma ergibt sich, daß sich aus dem Komplex $D_1^\cdot$ die Gruppen $T^{i+1}(f/Z, \mathcal{N}_Y)$ berechnen. Somit haben wir insgesamt kanonische Abbildungen

$$c_i : T^i(Z, \mathcal{N}) \longrightarrow T^{i+1}(f/Z, \mathcal{N}_Y)$$

erhalten.

Den folgenden Hilfssatz haben wir nachzutragen.

(3.17) Lemma: Die Gruppen $H^i(D_1^\cdot)$ sind kanonisch isomorph zu $T^i(f/Z, \mathcal{N}_Y)$.

Beweis: Aus den Resolventen $\mathcal{G}_X$, $\mathcal{G}_Y$, $\mathcal{G}_Z$ läßt sich wie folgt eine Resolvente von f über Z konstruieren. Sei

$$\overline{W}_* := \{W_\alpha \times U_{\tau(\alpha)}{}^Z \tau(\alpha)\}_\alpha \text{ ,} \quad \overline{\mathcal{R}}_* := \mathcal{R}_* \otimes_{\mathcal{T}_*} \mathcal{O}_{Z_*}$$

$$\overline{V}_* := \{V_\beta \times U_{\sigma(\beta)}{}^Z \sigma(\beta)\}_\beta \text{ ,} \quad \overline{\mathcal{S}}_* := \mathcal{S}_* \otimes_{\mathcal{T}_*} \mathcal{O}_{Z_*}$$

Dabei möge $\tau:A\longrightarrow C$ bzw. $\sigma:B\longrightarrow C$ die zu dem Morphismus $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}\longrightarrow\{U_\gamma\}_{\gamma\in C}$ bzw. $\{V_\beta\}_{\beta\in B}\longrightarrow\{U_\gamma\}_{\gamma\in C}$ gehörige Abbildung der Indexmengen sein. Wie in (2.23) folgt, daß die Daten $\overline{W}_*$, $\overline{\mathcal{R}}_*$ und $\overline{V}_*$, $\overline{\mathcal{F}}_*$ eine Resolvente von f über Z bilden. Es ist $D_1^\bullet$ niohts anderes als die Menge der verträgliohen Derivationen in

$$\mathrm{Der}_Z(\overline{\mathcal{F}}_*, \mathcal{N}_{Y_*})\times\mathrm{Der}_Z(\overline{\mathcal{R}}_*, \mathcal{N}_{X_*}) .$$

Weil $\Omega_{\mathcal{R}_*/\mathcal{F}_*}$ und $\Omega_{\mathcal{F}_*/\mathcal{T}_*}$ projektive Moduln sind, gilt dies auoh für $\Omega_{\overline{\mathcal{F}}_*/Z}$ und $\Omega_{\overline{\mathcal{R}}_*/\overline{\mathcal{F}}_*}$. Die Behauptung ergibt sioh daher aus (3.7).-

Wir sind nun in der Lage, die oben besohriebene Aussage zu zeigen.

<u>(3.18) Satz</u>: Sei $f:X\longrightarrow Y$ ein Morphismus komplexer Räume über Z, $\mathcal{N}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Z$-Modul sowie $\mathcal{N}_X$ bzw. $\mathcal{N}_Y$ das inverse Bild von $\mathcal{N}$ auf X bzw. Y. Ferner sei Z' eine Erweiterung von Z durch $\mathcal{N}$ und $\Phi(Z')$ in $T^1(Z,\mathcal{N})$ die zugehörige Kohomologieklasse. Dann versohwindet

$$o_1(\Phi(Z'))\in T^2(f/Z,\mathcal{N}_Y)$$

genau dann, wenn es Erweiterungen X' von X durch $\mathcal{N}_X$ und Y' von Y duroh $\mathcal{N}_Y$ gibt derart, daß X',Y',Z' verträgliohe Erweiterungen von X,Y,Z sind.

<u>Beweis</u>: Wir übernehmen die Bezeichnungen der letzten Absohnitte und betraohten die zu (*) gehörige lange exakte Kohomologiesequenz

$$\begin{array}{ccccccc}\cdots & H^1(D_2^\bullet) & \xrightarrow{\pi} & H^1(\mathrm{Der}(\mathcal{T}_*,\mathcal{N}_*)) & \xrightarrow{o_1} & H^2(D_1^\bullet) & \cdots\\ & & & \wr\wr & & \wr\wr & \\ & & & T^1(Z,\mathcal{N}) & \longrightarrow & T^2(f/Z,\mathcal{N}_Y) & \end{array}$$

Wegen (3.15) ist der Modul $H^1(D_2^\bullet)$ isomorph zu der Menge der Isomorphieklassen aller verträgliohen Erweiterungen von $X\to Y\to Z$: $\mathrm{Ex}(X\to Y\to Z,\mathcal{N})$ und $H^1(\mathrm{Der}(\mathcal{T}_*,\mathcal{N}_*))$ isomorph zu $\mathrm{Ex}(Z,\mathcal{N})$, wobei die Abbildung

$$\Phi^{-1}\pi\,\Phi:\mathrm{Ex}(X\to Y\to Z,\mathcal{N})\longrightarrow\mathrm{Ex}(Z,\mathcal{N})$$

einer Erweiterung $X'\to Y'\to Z'$ zuordnet die Erweiterung Z', wie man leicht sieht. Hieraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung des Satzes.-

<u>D. Deformationen holomorpher Abbildungen</u>

Deformationen holomorpher Abbildungen wurden etwa in [22] und [23] systematisoh untersuoht. Wir wollen in diesem Absohnitt die Definitionen zusammenstellen und die zugehörige infinitesimale Deformationstheorie besohreiben.

Sei $f_o:X_o\longrightarrow Y_o$ ein Morphismus komplexer Räume über Z_o. Unter einer Deformation von f_o/Z_o über einem Raum S mit einem ausgezeiohneten Punkt $s_o\in S$ versteht man ein Tupel (X,Y,f,i,j). Dabei seien X,Y komplexe Räume über $Z:=Z_o\times S$, welohe S-flaoh sind, $f:X\longrightarrow Y$ ein Z-Morphismus und $i:X_o\hookrightarrow X$, $j:Y_o\hookrightarrow Y$ abgesohlossene Einbettungen derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} X_o & \xrightarrow{f_o} & Y_o & \longrightarrow & Z_o & \longrightarrow & \{s_o\}\\ \big\downarrow{\scriptstyle i} & & \big\downarrow{\scriptstyle j} & & \big\downarrow & & \big\downarrow\\ X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & Z_o\times S & \longrightarrow & S \end{array}$$

kommutativ und kartesisoh ist. Wir werden im folgenden die Deformation (X,Y,f,i,j) häufig einfaoh mit a bezeiohnen.

Ist (X',Y',f',i',j') eine weitere Deformation von f_o/Z_o über dem komplexen Raum S' und $S\xrightarrow{\varphi}S'$ ein Morphismus mit $\varphi(s_o)=s_o'$, so besteht ein Morphismus (über φ) von a in a' aus holomorphen Abbildungen $\alpha:X\longrightarrow X'$, $\beta:Y\longrightarrow Y'$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, "\alpha"] & & Y \arrow[r] \arrow[dd, "\beta"] & Z_o\times S \arrow[dd, "1\times\varphi"] \\ X_o \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr] & & Y_o \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & X' \arrow[rr] & & Y' \arrow[r] & Z_o\times S' \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Zwei Deformationen a,a' über demselben Raum S heißen isomorph, wenn es einen Morphismus zwisohen a und a' über id_S gibt.

In naheliegender Weise definiert man nun auch den Begriff der Deformation über Keimen komplexer Räume. Für einen Raumkeim (S,s_o) bezeichnen wir mit $D(f_o/Z_o,(S,s_o))$ die Menge der Isomorphieklassen von Deformationen von f_o/Z_o über (S,s_o). Man sieht leicht, daß dieser Deformationsfunktor die Bedingungen des Satzes von Schlessinger erfüllt bis auf die Endlichdimensionalität.

Wir wollen zunächst ähnlich wie bei Erweiterungen die Beziehung zwischen $T^o(-)$ und den Automorphismen von Deformationen beschreiben. Sei S ein komplexer Raum mit dem ausgezeichneten Punkt e_o und a eine Deformation von f_o/Z_o über S. Ferner sei $\mathcal{N}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_S$-Modul und S' eine Erweiterung von S durch $\mathcal{N}$. Wir wollen annehmen, daß es eine Deformation a' von f_o/Z_o über S' gibt, welche die vorgegebene Deformation durch Basiswechsel induziert. Dann gilt:

<u>(3.19) Satz</u>: Es gibt eine natürliche Bijektion zwischen den Elementen von $T^o(f/Z, \mathcal{N}_Y)$ und den Automorphismen der Deformation a', welche auf a die Identität induzieren.

Der Beweis dieser einfachen Aussage verläuft völlig analog zum Beweis von (3.11).

Sei weiter a eine Deformation von f_o/Z_o über S, $Z:=S\times Z_o$ und $\mathcal{N}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_S$-Modul. Ferner sei $S'=S[\mathcal{N}]$ die Idealisierung von $\mathcal{O}_S$ durch $\mathcal{N}$. Wie man leicht sieht, entsprechen die Deformationen von f_o/Z_o über S', welche a fortsetzen, den Erweiterungen von f/Z durch $\mathcal{N}_Y$. Insbesondere gilt daher:

<u>(3.20) Satz</u>: Die Isomorphieklassen von Deformationen von f_o/Z_o über dem Doppelpunkt D stehen in bijektiver Beziehung zu den Elementen von $T^1(f_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o})$.

Mit Hilfe dieses Satzes und der exakten Sequenz (3.4) kann man nun in vielen Fällen leicht angeben, wann $D(f_o/Z_o,D)$ ein endlichdimensionaler Vektorraum ist. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn X_o und Y_o kompakt sind. Insbesondere gibt es dann nach dem Satz von Schlessinger eine formale semiuniverselle Deformation. Wir werden in §8 zeigen, daß es in der Situation sogar eine konvergente semiuniverselle Deformation gibt.

Wir wollen nun noch abschließend beschreiben, wie man Obstruktionen für das Fortsetzen von Deformationen finden kann. Seien S,a wie oben und $\mathcal{N}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_S$-Modul. Zunächst lassen sich ähnlich wie im letzten Abschnitt C. Abbildungen

$$\delta_i : T^i(S,\mathcal{N}) \longrightarrow T^{i+1}(f/Z,\mathcal{N}_Y)$$

definieren. Es sei δ_i die Komposition der kanonischen Abbildung

$$T^i(S,\mathcal{N}) \longrightarrow T^i(S\times Z_o/Z_o, \mathcal{N}_{S\times Z_o})$$

mit dem vor (3.17) konstruierten Homomorphismus

$$T^i(Z,\mathcal{N}_Z) \xrightarrow{\ o_i\ } T^{i+1}(f/Z,\mathcal{N}_Y) .$$

Aus dem entsprechenden Satz (3.18) folgt leicht:

<u>(3.21) Satz</u>: Sei S' eine Erweiterung von S durch $\mathcal{N}$ und $\Phi(S')$ die zu S' gehörige Kohomologieklasse in $T^1(S,\mathcal{N})$. Dann ist $\delta_1(\Phi(S'))$ genau dann 0, wenn es eine Deformation a' von f_o/Z_o über S' gibt, welche die gegebene Deformation a fortsetzt.

Wir werden später noch die folgende Aussage benötigen.

<u>(3.22) Satz</u>: Sei (X,Y,f,i,j) eine Deformation von f_o/Z_o über dem Raum S mit dem ausgezeichneten Punkt e_o. Dann ist

$$T^i(f/Z, \mathcal{O}_Y) \cong T^i(f_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o}) .$$

<u>Beweis</u>: Es sei $\mathcal{G}_*$ eine Resolvente für f/Z. Weil X,Y und Z flach über S sind, erhalten wir aus $\mathcal{G}_*$ durch Basiswechsel $\{e_o\}\longrightarrow S$ offenbar eine Resolvente $\mathcal{G}_{o*}$ von f_o/Z_o. Hieraus ergibt sich leicht die Behauptung.

<u>§4 Offenheit der Versalität</u>

<u>A. Vorbereitungen</u>

Wir erinnern zunächst an den Begriff des gefaserten Gruppoids, vgl. [3] oder [40] . Unter einem <u>gefaserten Gruppoid</u> versteht man einen Funktor $p:\underline{F}\longrightarrow\underline{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Für jeden Morphismus $f:X\longrightarrow Y$ in $\underline{C}$ und jedes Objekt a in $\underline{F}$ über Y gibt es einen Morphismus $\tilde{f}:b\longrightarrow a$ mit $p(\tilde{f})=f$, welcher kartesisch ist (d.h. zu jedem Morphismus $c\longrightarrow a$ über f gibt es genau einen Morphismus $c\longrightarrow b$ über id_X, welcher das Diagramm

$$\begin{tikzcd} c \arrow[rr] \arrow[dr] & & b \arrow[dl] \\ & a & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht). Wir werden im folgenden dieses bis auf eindeutige Isomorphie wohlbestimmte Objekt b kurz mit $f^*(a)$ oder auch mit $a \times_Y X$ bezeichnen.

(2) Kompositionen kartesischer Morphismen sind kartesisch.

(3) $\tilde{f}: a \to b$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $p(\tilde{f})$ ein Isomorphismus ist.

Analog spricht man von einem <u>kogefaserten Gruppoid</u> $p: \underline{F} \to \underline{O}$, wenn der duale Funktor $p^c: \underline{F}^c \to \underline{O}^c$ ein gefasertes Gruppoid ist.

Für ein Objekt X in $\underline{C}$ wollen wir mit $\underline{F}(X)$ die Unterkategorie von $\underline{F}$ der Objekte über X bezeichnen, deren Morphismen genau die Morphismen über id_X sind.

Wir werden im folgenden vorwiegend den Fall betrachten, daß die Basiskategorie $\underline{O}$ entweder die Kategorie $\underline{An}/S$ der komplexen Räume über einem festen Raum S oder die Kategorie $\underline{An}/(S,s_c)$ der komplexer Raumkeime (T,t_c) über einem festen Raumkeim (S,s_c) ist.

Betrachten wir zunächst den Fall $\underline{O}=\underline{An}/(S,s_c)$. Ein Objekt a von $\underline{F}$ über dem Raumkeim (T,t_c) nennt man <u>versell</u>, wenn die folgende Liftungseigenschaft erfüllt ist.

<u>(V)</u> Sei $(X,x_c) \xhookrightarrow{i} (X',x_c)$ eine abgeschlossene Einbettung und $b \to b'$ ein Morphismus über i. Dann läßt sich jeder Morphismus $b \to a$ liften zu einem Morphismus $b' \to a$.

Man nennt a <u>formal versell</u>, wenn die obige Liftungseigenschaft erfüllt ist für Raumkeime $(X,x_c),(X',x_c)$, deren Halme $\mathcal{O}_{X,x_c}$ und $\mathcal{O}_{X',x_c}$ artinsch sind. Ist $a_c = a \times_T \{t_c\}$ die Faser von a über t_c, so spricht man bei a auch von einer versellen bzw. formal versellen Deformation von a_c. Es sei angemerkt, daß die Begriffe versell und formal versell zusammenfallen, wenn es überhaupt eine verselle Deformation von a_c gibt, siehe (8.1).

Die analogen Begriffsbildungen können wir durchführen, wenn

wir als Basiskategorie die komplexen Räume über S betrachten. Zu jedem gefaserten Gruppoid über $\underline{An}/S$ und zu jedem Punkt $s_c \in S$ erhält man in natürlicher Weise ein gefasertes Gruppoid über $\underline{An}/(S,s_c)$, welches wir wieder mit $p: \underline{F} \to \underline{An}/(S,s_c)$ bezeichnen wollen. Ist (X,x_c) ein komplexer Raumkeim über (S,s_c) und $X \to S$ ein Repräsentant der Strukturabbildung, so ist

$$\underline{F}(X,x_c) := \varinjlim_{U} \underline{F}(U)$$

wobei U die Umgebungen von x_c in X durchläuft. Sei nun T ein komplexer Raum über S und a in $\underline{F}(T)$. Dann nennt man a im Punkte $t_c \in T$ versell bzw. formal versell, wenn das Bild von a in $\underline{F}(T,t_c)$ versell bzw. formal versell ist.

Das Ziel dieses Paragraphen ist es zu zeigen, daß unter gewissen Voraussetzungen die Menge der Punkte, in denen a formal versell ist, eine Zariski-offene Teilmenge von T ist. Wir wollen zunächst einige Beispiele betrachten.

<u>Beispiel 1 (Deformationen kompakter komplexer Räume):</u> Sei S der einpunktige reduzierte komplexe Raum. Für einen komplexen Raum T sei ein Objekt von $\underline{F}$ über T eine flache eigentliche holomorphe Abbildung $X \to T$. Ein Morphismus in $\underline{F}$ zwischen zwei Objekten $X \to T$, $X' \to T'$ bestehe dabei aus einem kommutativen kartesischen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ T' \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

<u>Beispiel 2 (Deformationen holomorpher Abbildungen über einem Raum Z_c):</u> Sei S wie in Beispiel 1. Für einen komplexen Raum T sei ein Objekt von $\underline{F}$ über T ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Y \arrow[r] \arrow[dl, "\beta"] & Z_c \\ & T & & \end{tikzcd}$$

wobei α, β flach und eigentlich sind. Ein Morphismus in ein weiteres Objekt

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[dr] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & Z_o \\ & T' & \end{tikzcd}$$

bestehe aus einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] \arrow[dd] & & X' \arrow[dr] \arrow[dd, dash] & \\ & Y \arrow[rr, "g"] \arrow[dl] & & Y' \arrow[dl] \\ T \arrow[rr] & & T' & \end{tikzcd},$$

wobei f,g Z_o-Morphismen sind und in welchem $X \longrightarrow X' \times_{T'} T$, $Y \longrightarrow Y' \times_{T'} T$ Isomorphismen sind.

<u>Beispiel 3 (Deformationen isolierter Singularitäten)</u>: Wir betrachten das folgende Gruppoid $p:\underline{F} \longrightarrow \underline{An}$. Ein Objekt von $\underline{F}$ über einem Raum T sei ein komplexer Raumkeim (X,C) längs einer analytischen Teilmenge $C \subseteq X$, zusammen mit einem Morphismus $(X,C) \xrightarrow{f} T$, so daß für einen geeigneten Repräsentanten $X \xrightarrow{f} T$ gilt: (1) f ist flach und $f|C$ ist endlich. (2) C ist genau die kritische Menge C(f) von f. Dabei verstehen wir unter der kritischen Menge von f die Menge aller Punkte in X, in welchen f nicht glatt ist. In naheliegender Weise erklärt man den Begriff des Morphismus. Ein Morphismus von $(X,C) \longrightarrow T$ in $(X',C') \longrightarrow T'$ besteht aus einem kommutativen kartesischen Diagramm

$$\begin{tikzcd} (X,C) \arrow[r] \arrow[d] & (X',C') \arrow[d] \\ T \arrow[r] & T' \end{tikzcd}.$$

<u>Beispiel 4 (Deformationen von Moduln)</u>: Sei $f:X \longrightarrow S$ eine flache holomorphe Abbildung. Ein Objekt von $\underline{F}$ über dem Raum T in $\underline{An}/S$ sei ein kohärenter $\mathcal{O}_{X \times_S T}$-Modul $\mathcal{M}$, der $\mathcal{O}_T$-flach ist und und dessen Träger eigentlich über T liegt. Ein Morphismus in ein weiteres Objekt $\mathcal{M}'$ über T' besteht aus einem S-Morphismus $g:T \longrightarrow T'$ und einem Isomorphismus

$$(1_X \times_S g)^* (\mathcal{M}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}.$$

Wir wollen von nun an stets voraussetzen, daß unser gefasertes Gruppoid $p:\underline{F} \longrightarrow \underline{An}/S$ <u>homogen</u> ist, d.h. es gilt:

<u>(S1)</u>': Sei

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & a' \\ b & \end{tikzcd}$$

ein Diagramm in $\underline{F}$, so daß $p(a) \longrightarrow p(b)$ endlich ist und $p(a) \longrightarrow p(a')$ eine Erweiterung durch einen kohärenten $\mathcal{O}_{p(a)}$-Modul ist. Dann existiert die gefaserte Summe $a' \amalg_a b$ in $\underline{F}$.

Es sei bemerkt, daß die in den obigen Beispielen beschriebenen gefaserten Gruppoide alle diese Eigenschaft erfüllen, vgl. [42], Satz (2.7).

Wir fixieren nun einige Bezeichnungen für den Rest dieses Paragraphen. Ist a ein Objekt von $\underline{F}$, so sei $\underline{F}_a$ die Kategorie, deren Objekte alle Morphismen $a \longrightarrow b$ in $\underline{F}$ und deren Morphismen alle kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[d] \\ a \arrow[ur] \arrow[r] & b' \end{tikzcd}$$

sind. Mit einem Querstrich wollen wir im folgenden die Isomorphieklassen einer Kategorie bezeichnen. Es ist also $\overline{\underline{F}}(T)$, $\overline{\underline{F}}_a(T)$,... die Menge der Isomorphieklassen von $\underline{F}(T)$, $\underline{F}_a(T)$,.... Für ein Objekt a über T und einen kohärenten $\mathcal{O}_T$-Modul $\mathcal{M}$ sei

$$D_a(\mathcal{M}) := \overline{\underline{F}}_a(T[\mathcal{M}]).$$

($T[\mathcal{M}]$ sei die Idealisierung von T durch $\mathcal{M}$). Offenbar ist $\mathcal{M} \rightsquigarrow D_a(\mathcal{M})$ ein Funktor, welcher aufgrund der Bedingung (S1)' mit Produkten verträglich ist, wie man leicht sieht. Daher induziert die Addition auf $\mathcal{M}$ wie üblich eine Addition

$$D_a(\mathcal{M}) \times D_a(\mathcal{M}) \cong D_a(\mathcal{M} \times \mathcal{M}) \longrightarrow D_a(\mathcal{M})$$

und für $\alpha \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ die Multiplikation mit α eine Multiplikation

$$D_a(\mathcal{M}) \xrightarrow{\alpha} D_a(\mathcal{M}),$$

so daß $D_a(\mathcal{M})$ zu einem $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$-Modul wird.

Sei $q:\underline{C}_a \longrightarrow \underline{Coh}(T)$ das folgende kogefaserte Gruppoid. Ein

Objekt von $\underline{O}_a$ über einem kohärenten $\mathcal{O}_T$-Modul $\mathcal{M}$ besteht aus einem Paar (T',a'), wobei $T \xleftarrow{i} T'$ eine Erweiterung von T durch $\mathcal{M}$ und $a \to a'$ ein Morphismus über i ist. Ist $\mathcal{N}$ ein weiterer kohärenter $\mathcal{O}_T$-Modul und (T'',a'') ein weiteres Objekt von $\underline{O}_a$ über $\mathcal{N}$ sowie $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein $\mathcal{O}_T$-Homomorphismus, so besteht ein Morphismus in $\underline{O}_a$ über φ aus einem Morphismus $T'' \xrightarrow{\Phi} T'$ von Erweiterungen über φ und einem Morphismus $a'' \to a'$ über Φ. Man sieht leicht, daß $q:\underline{O}_a \to \underline{Ooh}(T)$ ein kogefasertes Gruppoid ist. Weil $\underline{F}$ homogen ist, existieren in $\underline{O}_a$ gefaserte direkte Produkte, wie man leicht nachrechnet. Es sei

$$\tilde{D}_a(\mathcal{M}) := \overline{\underline{C}}_a(\mathcal{M})$$

die Menge der Isomorphieklassen von Objekten in $\underline{O}_a$ über $\mathcal{M}$. Offenbar ist $\tilde{D}_a(\mathcal{M})$ funktoriell in $\mathcal{M}$. Weil in $\underline{O}_a$ direkte Produkte existieren und das Objekt (T,a) in $\underline{O}_a(0)$ keine Automorphismen außer der Identität besitzt, ist $\tilde{D}_a(-)$ mit direkten Produkten verträglich. Daher trägt $\tilde{D}_a(\mathcal{M})$ eine natürliche $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$-Modulstruktur. Das Nullelement ist offenbar gegeben durch $(T[\mathcal{M}], a \times_T T[\mathcal{M}])$. Bezeichnen wir mit α_0 das Objekt (T,a) in $\underline{C}_a(0)$, so induziert ein Objekt α aus $\underline{C}_a(\mathcal{M})$ offenbar genau dann das Nullelement in $\tilde{D}_a(\mathcal{M})$, wenn es einen Morphismus $\alpha_0 \to \alpha$ gibt. Wir werden die folgende Aussage benötigen.

<u>(4.1) Lemma</u>: Ist

$$0 \to \mathcal{M}' \xrightarrow{i} \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}'' \to 0$$

eine exakte Sequenz von kohärenten $\mathcal{O}_T$-Moduln, so ist

$$\tilde{D}_a(\mathcal{M}') \to \tilde{D}_a(\mathcal{M}) \to \tilde{D}_a(\mathcal{M}'')$$

exakt.

<u>Beweis</u>: Wir wollen die Objekte von $\underline{C}_a$ kurz mit griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ bezeichnen. Sei α ein Objekt von $\underline{O}_a(\mathcal{M})$, dessen direktes Bild $\alpha'' = \pi_*(\alpha)$ in $\tilde{D}_a(\mathcal{M}'')$ das Nullelement induziert. Dann gibt es einen Morphismus $\alpha_0 \to \alpha''$ in $\underline{O}_a$. In dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[r] & \alpha'' \\ \alpha' \arrow[u] \arrow[r] & \alpha_0 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

sei α' das gefaserte direkte Produkt $\alpha \times_{\alpha''} \alpha_0$. Offenbar ist α' ein Objekt in $\underline{O}_a(\mathcal{M} \times_{\mathcal{M}''} 0) = \underline{C}_a(\mathcal{M}')$, welches α induziert.-

Wir betrachten weiter das kogefaserte Gruppoid $q:\underline{O}_a \to \underline{Ooh}(T)$. Es bezeichne $\alpha_0[\mathcal{M}]$ kurz das direkte Bild von α_0 in $\underline{O}_a(\mathcal{M})$ unter der Nullabbildung $0 \hookrightarrow \mathcal{M}$. Weil in $\underline{O}_a$ gefaserte Produkte existieren, ist der Funktor

$$\mathcal{M} \mapsto \mathrm{Hom}_{\underline{C}_a}(\alpha_0, \alpha_0[\mathcal{M}]) =: \tilde{A}_a(\mathcal{M})$$

mit gefaserten Produkten verträglich. Insbesondere trägt daher $\tilde{A}_a(\mathcal{M})$ eine kanonische $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$-Modulstruktur. Ferner gilt:

<u>(4.2) Lemma</u>: Sei $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_T$-Moduln. Dann ist die Sequenz

$$0 \to \tilde{A}_a(\mathcal{M}') \to \tilde{A}_a(\mathcal{M}) \to \tilde{A}_a(\mathcal{M}'')$$

exakt.

<u>Beweis</u>: Wegen $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \times_{\mathcal{M}''} 0$ ist

$$\tilde{A}_a(\mathcal{M}') = \tilde{A}_a(\mathcal{M}) \times_{\tilde{A}_a(\mathcal{M}'')} \tilde{A}_a(0).$$

Zusammen mit $\tilde{A}_a(0)=0$ ergibt sich daraus die Behauptung.-

Wir wollen nun für jede exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$$

einen Homomorphismus

$$\delta : \tilde{A}_a(\mathcal{M}'') \to \tilde{D}_a(\mathcal{M}')$$

definieren. Für einen Morphismus $\varphi : \alpha_0 \to \alpha_0[\mathcal{M}'']$ sei $\delta(\varphi) := \alpha'$ das gefaserte Produkt in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} \alpha' \arrow[r] \arrow[d] & \alpha_0[\mathcal{M}] \arrow[d] \\ \alpha_0 \arrow[r, "\varphi"] & \alpha_0[\mathcal{M}''] \end{tikzcd} .$$

Man sieht leicht, daß die Definition von δ sich mit Morphismen kurzer exakter Sequenzen verträgt. Insbesondere ist daher δ ein Homomorphismus. Die Isomorphieklasse von α' in $\tilde{D}_a(\mathcal{M}')$ ist genau dann das Nullelement, wenn es einen Morphismus $\alpha_0 \to \alpha'$ gibt, oder, was gleichbedeutend ist, wenn es eine Liftung von φ zu einem Morphismus $\tilde{\varphi} : \alpha_0 \to \alpha_0[\mathcal{M}]$ gibt. Folglich ist die Sequenz

$$\tilde{A}_a(\mathcal{M}) \to \tilde{A}_a(\mathcal{M}'') \xrightarrow{\delta} \tilde{D}_a(\mathcal{M}')$$

exakt. Betrachten wir nun ein Element α' in $\tilde{D}_a(\mathcal{M}')$, welches

Null in $\tilde{D}_a(\mathcal{M})$ wird. Dann gibt es einen Morphismus $\alpha' \longrightarrow \alpha_o[\mathcal{M}]$. Da die Komposition $\mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}''$ die Nullabbildung ist, gibt es einen Morphismus $\alpha_o \xrightarrow{\varphi} \alpha_o[\mathcal{M}'']$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \alpha' & \longrightarrow & \alpha_o[\mathcal{M}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \alpha_o & \xrightarrow{\varphi} & \alpha_o[\mathcal{M}''] \end{array}$$

kommutiert. Es folgt, daß die Sequenz

$$\tilde{A}_a(\mathcal{M}'') \longrightarrow \tilde{D}_a(\mathcal{M}') \longrightarrow \tilde{D}_a(\mathcal{M})$$

exakt ist.

Wir fassen das gewonnene Ergebnis zusammen:

<u>(4.3) Satz</u>: Für jede Sequenz von kohärenten $\mathcal{O}_T$-Moduln

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{A}_a(\mathcal{M}') \longrightarrow \tilde{A}_a(\mathcal{M}) \longrightarrow \tilde{A}_a(\mathcal{M}'') \longrightarrow \tilde{D}_a(\mathcal{M}') \longrightarrow \tilde{D}_a(\mathcal{M}) \longrightarrow \tilde{D}_a(\mathcal{M}'')$$

exakt.-

Es sei angemerkt, daß es eine entsprechende exakte Sequenz auch für die Funktoren $\mathrm{Hom}_{\underline{F}a(T[\mathcal{M}])}(a[\mathcal{M}], a[\mathcal{M}])$ und $D_a(\mathcal{M})$ gibt.

<u>B. Hilfssätze</u>

Wir betrachten zunächst die folgende Situation. Sei A ein noetherscher Ring und F ein halbexakter Funktor von der Kategorie der A-Moduln in die Kategorie der A-Moduln, welcher endliche Moduln in endliche Moduln überführt und mit direkten Summen verträglich ist. Wir wollen dabei voraussetzen, daß für A-Moduln M,N die kanonische Abbildung

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(F(M),F(N))$$

A-linear ist. Für einen $B_k := A[T_1,\cdots,T_k]$-Modul M trägt auch F(M) auf natürliche Weise die Struktur eines B_k-Moduls, wobei

die Multiplikation mit T_j auf F(M) gegeben ist durch $F(\cdot T_j): F(M) \longrightarrow F(M)$. Es soll gezeigt werden:

<u>(4.4) Satz</u>: Ein endlicher graduierter B_k-Modul M wird durch F wieder in einen endlichen graduierten B_k-Modul überführt.

<u>Beweis</u>: Wir zeigen die Aussage durch Induktion über k, wobei der Induktionsanfang k=0 aus der Voraussetzung folgt. Für $k>0$ betrachten wir zunächst den Spezialfall, daß die Multiplikation mit T_k auf M injektiv ist. Dann erhält man aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cdot T_k} M \longrightarrow M/T_kM \longrightarrow 0$$

die exakte Sequenz

$$F(M) \xrightarrow{\cdot T_k} F(M) \longrightarrow F(M/T_kM)$$

Nun ist nach Induktionsvoraussetzung $F(M/T_kM)$ endlich über B_{k-1} und daher erst recht über B_k. Folglich ist auch $F(M)/T_kF(M)$ ein endlicher B_k-Modul, und weil F(M) graduiert ist, ergibt sich daraus schon die Endlichkeit von F(M), wie man leicht sieht.

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall. Für $n \gg 0$ ist die Multiplikation mit T_k auf T_k^nM injektiv. Sei

$$L := \mathrm{Ker}(M \xrightarrow{\cdot T_k^n} T_k^nM)$$

Wegen $T_k^nL=0$ ist L ein endlicher graduierter B_{k-1}-Modul, auf den deshalb die Induktionsvoraussetzung zutrifft. Aus der exakten Sequenz

$$F(L) \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(T_k^nM) \quad ,$$

in der die äußeren Terme endlich über B_k sind, ergibt sich nun die Behauptung.-

<u>(4.5) Korollar</u>: Sei N ein endlicher A-Modul. Dann ist für jedes Ideal $\alpha \subseteq A$ die kanonische Abbildung von inversen Systemen

$$\{F(N)/\alpha^nF(N)\}_n \longrightarrow \{F(N/\alpha^nN)\}_n$$

im wesentlichen injektiv. Insbesondere ist die Abbildung

$$\widehat{F(N)} \longrightarrow \varprojlim_n F(N/\mathfrak{a}^n N)$$

injektiv.

Beweis: Wegen (4.4) ist der Modul $\coprod_{n\geq 0} F(\mathfrak{a}^n N)$ ein endlicher $\coprod_{n\geq 0}\mathfrak{a}^n$-Modul. Daher gibt es ein $k\geq 0$ mit

$$F(\mathfrak{a}^{n+k}N) = \mathfrak{a}^n F(\mathfrak{a}^k N) \qquad \text{für alle } n\in\mathbb{N}.$$

Aus der exakten Sequenz

$$\mathfrak{a}^n F(\mathfrak{a}^k N) = F(\mathfrak{a}^{k+n}N) \longrightarrow F(N) \longrightarrow F(N/\mathfrak{a}^{k+n}N)$$

erhalten wir die exakte Sequenz

$$\mathfrak{a}^n F(\mathfrak{a}^k N)/\mathfrak{a}^{n+k}F(N) \longrightarrow F(N)/\mathfrak{a}^{n+k}F(N) \longrightarrow F(N/\mathfrak{a}^{n+k}N)$$

Weil das inverse System

$$\{\mathfrak{a}^n F(\mathfrak{a}^k N)/\mathfrak{a}^{n+k}F(N)\}_n$$

im wesentlichen Null ist, ergibt sich daraus die Behauptung.-

Wir wollen nun noch eine weitere Hilfsaussage technischer Natur für die folgenden Abschnitte bereitstellen. Dabei betrachten wir die folgende Situation. Gegeben sei ein komplexer Raum X und für jede offene Teilmenge U in X ein Kohomologiefunktor $(F^i(U,-))_{i\in\mathbb{Z}}$ von der Kategorie Coh(U) in die Kategorie Coh(U), die miteinander verträglich sind, d.h. für $V\subseteq U$ offen in X und für jeden kohärenten $\mathcal{O}_U$-Modul $\mathcal{M}$ ist $F^\cdot(V,\mathcal{M}|V)=F^\cdot(U,\mathcal{M})|V$. Dabei wollen wir natürlich annehmen, daß die Funktoren $F^i(U,-)$ für kohärente $\mathcal{O}_U$-Moduln $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ Homomorphismen

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}(F^i(U,\mathcal{M}),F^i(U,\mathcal{N}))$$

induzieren, welche $\mathcal{O}_U$-linear sind. Für $\mathcal{M}=\mathcal{O}_U$ ergibt sich dann ein $\mathcal{O}_U$-Homomorphismus $\mathcal{N}\longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}(F^i(U,\mathcal{O}_U),F^i(U,\mathcal{N}))$, was gleichbedeutend ist mit einer Abbildung

$$\mathcal{N}\otimes_{\mathcal{O}_U} F^i(U,\mathcal{O}_U) \longrightarrow F^i(U,\mathcal{N}) .$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt nun:

(4.6) Satz: Sei X' ein reduzierter Unterraum von X und $k_o\in\mathbb{Z}$ fest. Dann gibt es eine dichte Z-offene Teilmenge U von X' derart, daß für $V\subseteq U$ und jeden $\mathcal{O}_V$-Modul $\mathcal{N}$ der Homomorphismus

$$\mathcal{N}\otimes_{\mathcal{O}_V} F^{k_o}(V,\mathcal{O}_V) \longrightarrow F^{k_o}(V,\mathcal{N})$$

bijektiv ist.

Beweis: Wir dürfen o.E. X=X' annehmen. Gilt die Behauptung für jede der irreduziblen Komponenten von X, so gilt sie auch für X. Wir dürfen daher o.E. X als irreduzibel von der Dimension n annehmen. Sei U in X die Menge der Punkte, in denen X regulär und die Moduln $F^{k_o+\nu}(X,\mathcal{O}_X)$, $0\leq\nu\leq n$, lokal frei sind. Wir behaupten, daß U eine Menge der gesuchten Art ist. Zunächst ist natürlich U Z-offen und dicht in X. Die behauptete Isomorphie ist von lokaler Natur. Daher dürfen wir uns auf $\mathcal{O}_V$-Moduln beschränken, welche eine Auflösung

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_n \longrightarrow \mathcal{F}_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{F}_o \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0 .$$

durch freie $\mathcal{O}_V$-Moduln besitzen. Es sei $\mathcal{N}_r:=\mathrm{Koker}(\mathcal{F}_{r+1}\longrightarrow\mathcal{F}_r)$. Wir zeigen durch absteigende Induktion nach r, daß der kanonische Homomorphismus

$$\mathcal{N}_r\otimes F^{k_o+\nu}(V,\mathcal{O}_V) \longrightarrow F^{k_o+\nu}(V,\mathcal{N}_r)$$

bijektiv ist für $\nu=0,\dots,r$. Da $\mathcal{N}_n=\mathcal{F}_n$ frei ist, ist der Induktionsbeginn gesichert. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots\longrightarrow F^{k_o+\nu}(V,\mathcal{N}_{r+1}) & \xrightarrow{j_\nu} & F^{k_o+\nu}(V,\mathcal{F}_r) & \xrightarrow{\pi_\nu} & F^{k_o+\nu}(V,\mathcal{N}_r) & \longrightarrow & F^{k_o+\nu+1}(V,\mathcal{N}_{r+1}) & \longrightarrow\cdots \\
\uparrow{\scriptstyle \alpha_\nu} & & \uparrow{\scriptstyle \cong} & & \uparrow{\scriptstyle \beta_\nu} & & & \\
0\longrightarrow \mathcal{N}_{r+1}\otimes F^{k_o+\nu}(V,\mathcal{O}_V) & \longrightarrow & \mathcal{F}_r\otimes F^{k_o+\nu}(V,\mathcal{O}_V) & \longrightarrow & \mathcal{N}_r\otimes F^{k_o+\nu}(V,\mathcal{O}_V) & \longrightarrow & 0 &
\end{array}$$

Dabei ist die obere Zeile die zu der exakten Sequenz

$$0\longrightarrow\mathcal{N}_{r+1}\longrightarrow\mathcal{F}_r\longrightarrow\mathcal{N}_r\longrightarrow 0$$

gehörige lange exakte Kohomologiesequenz. Die untere Zeile ist exakt, weil $F^{k_o+\nu}(V,\mathcal{O}_V)$ frei ist für $\nu=0,\dots,n$. Nach Induktionsvoraussetzung ist α_ν bijektiv für $\nu=0,\dots,r+1$. Insbesondere folgt daraus, daß j_ν injektiv ist für $\nu=0,\dots,r+1$ oder, was gleichbedeutend ist, daß $\pi_{\nu-1}$ surjektiv ist. Daraus ergibt sich leicht, daß auch β_ν ein Isomorphismus ist für $\nu=0,\dots,r$, w.z.b.w.

C. Ein erstes Kriterium für die Offenheit der Versalität

Raum über S und a in $\underline{F}(T)$. Wir wollen mit $\widetilde{\mathcal{D}}_a(\mathcal{M})$ die zu der Prägarbe

$$T \supseteq U \rightsquigarrow \widetilde{\mathcal{D}}_{a|U}(\mathcal{M}|U)$$

assoziierte Garbe bezeichnen. Für einen Punkt t in T sei $\varkappa(t)$ derjenige $\mathcal{O}_T$-Modul, welcher Null ist auf $T \setminus \{t\}$ und in t den Halm $\mathbb{C}$ hat. Wir wollen zunächst das folgende einfache Kriterium für formale Versalität herleiten.

(4.7) Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) a ist in t_o formal versell.

(2) $\widetilde{\mathcal{D}}_a(\varkappa(t_o))=0$.

Beweis: (2) ⇒ (1): Offenbar haben wir die folgende Aussage nachzuweisen: Ist $(X,x_o) \xhookleftarrow{i} (X',x_o)$ eine Erweiterung von artinschen Raumkeimen durch den $\mathcal{O}_X$-Modul $\varkappa(x_o)$ und $b \longrightarrow b'$ ein Morphismus in $\underline{F}$ über i, so läßt sich jeder Morphismus $b \longrightarrow a$ liften zu einem Morphismus $b' \longrightarrow a$. Aufgrund der Bedingung (S1)' existiert das Faserprodukt $a' := b' \coprod_b a$. Der zugehörige Raumkeim p(a') ist eine Erweiterung von (T,t_o) durch $\varkappa(t_o)$. Wegen $\widetilde{\mathcal{D}}_a(\varkappa(t_o))=0$ gibt es daher einen Morphismus $a' \longrightarrow a$, welcher das Diagramm

$$\begin{tikzcd} a' \arrow[r] & a \\ & a \arrow[ul] \arrow[u, "id"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Offenbar leistet die Komposition $b' \longrightarrow a' \longrightarrow a$ das Gewünschte.

(1) ⇒ (2): Sei $i: T \hookrightarrow T'$ eine Erweiterung von T durch $\varkappa(t_o)$ und $a \longrightarrow a'$ ein Morphismus über i. Mit $T_{(n)}$ bezeichnen wir die n-te infinitesimale Umgebung von t_o in T, d.h.

$$T_{(n)} := (\{t_o\}, \mathcal{O}_T/\mathfrak{m}_{t_o}^{n+1}),$$

analog $T'_{(n)}$. Für $n \gg 0$ ist offenbar $T'_{(n)}$ eine Erweiterung von $T_{(n)}$ durch $\varkappa(t_o)$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} T_{(n)} \arrow[r, hook] \arrow[d] & T'_{(n)} \arrow[d] \\ T \arrow[r, hook] & T' \end{tikzcd}$$

kokartesisch ist. Sei $a_n = a \times_T T_{(n)}$ und $a'_n = a' \times_{T'} T'_{(n)}$. Dann ist auch das Diagramm mit den durchgezogenen Pfeilen

$$\begin{tikzcd} a_n \arrow[r] \arrow[d] & a'_n \arrow[d] \arrow[dl, dashed] \\ a \arrow[r] & a' \end{tikzcd}$$

kokartesisch. Weil a formal versell ist, gibt es einen Morphismus $a'_n \longrightarrow a$, wie gestrichelt angedeutet, so daß das obere linke Dreieck kommutativ ist. Es folgt, daß $a \longrightarrow a' = a \coprod_{a_n} a'_n$ einen Schnitt besitzt, was zu zeigen war.

Wir können nun das folgende Kriterium für die Offenheit der Versalität zeigen:

(4.8) Satz: Sei $p: \underline{F} \longrightarrow \underline{An}/S$ ein homogenes gefasertes Gruppoid. Für jeden Raum T über S und jedes Objekt a in $\underline{F}(T)$ mögen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

(1) Für jeden kohärenten $\mathcal{O}_T$-Modul $\mathcal{M}$ ist die Garbe $\widetilde{\mathcal{D}}_a(\mathcal{M})$ kohärent.

(2) Ist $\mathcal{O}_{T'}$ ein reduzierter Quotient von $\mathcal{O}_T$, so gibt es eine dichte Zariski-offene Teilmenge U' von T' derart, daß die kanonische Abbildung

$$\widetilde{\mathcal{D}}_a(\mathcal{O}_{T'}) \otimes_{\mathcal{O}_T} \varkappa(t) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{D}}_a(\varkappa(t))$$

bijektiv ist für $t \in U'$.

Dann ist die Menge V der Punkte von T, in denen a formal versell ist, eine Zariski-offene Teilmenge von T.

Beweis: Wir haben zu zeigen, daß $V = \{t : \widetilde{\mathcal{D}}_a(\varkappa(t))=0\}$ Z-offen in T ist. Offenbar reicht es dazu, die folgende Aussage nachzuweisen, vgl. EGA 0, 2.4.6: Ist T' in T ein lokal abgeschlossener irreduzibler Unterraum, welcher V trifft, so enthält $V \cap T'$ eine nichtleere Z-offene Teilmenge U' von T'. Sei zum Beweis $\mathcal{O}_{T'}$ die reduzierte Strukturgarbe von T' und U' eine Teilmenge von T', welche die Bedingung (2) erfüllt. Offenbar ist dann

$$(*) \qquad V \cap U' = U' \setminus Tr(\widetilde{\mathcal{D}}_a(\mathcal{O}_{T'}))$$

Z-offen in T'. Wir wollen zeigen, daß $V \cap U' \neq \emptyset$. Sei t_o in $V \cap T'$ und $T'_{(n)}$ die n-te infinitesimale Umgebung von t_o in T'. Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}_{t_o}^n/\mathfrak{m}_{t_o}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{T'_{(n)}} \longrightarrow \mathcal{O}_{T'_{(n-1)}} \longrightarrow$$

ergeben sich exakte Sequenzen

$$\tilde{D}_a(m^n_{t_0}/m^{n+1}_{t_0}) \longrightarrow \tilde{D}_a(\mathcal{O}_{T'_{(n)}}) \longrightarrow \tilde{D}_a(\mathcal{O}_{T'_{(n-1)}}) .$$

Wegen $t_0 \in V$ ist $\tilde{D}_a(\mathcal{O}_{T'_{(0)}})=0$. Durch Induktion folgt daher $\tilde{D}_a(\mathcal{O}_{T'_{(n)}})=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$, woraus sich wegen (4.5) $\tilde{D}_a(\mathcal{O}_{T'})_{t_0}=0$ ergibt. Wir haben somit gezeigt, daß $\mathrm{Tr}(\tilde{D}_a(\mathcal{O}_{T'}))$ eine echte analytische Teilmenge von T' ist und daher nirgendwo dicht in T' liegt. Folglich muß wegen (∗) die Menge $V\cap U'$ nichtleer sein.-

D. Gruppoide mit Obstruktionstheorie

Sei $p:\underline{F}\longrightarrow\underline{An}/S$ weiter ein homogenes gefasertes Gruppoid, T ein Raum über S und a in $\underline{F}(T)$. Für jeden kohärenten $\mathcal{O}_T$-Modul $\mathcal{M}$ hat man eine natürliche Abbildung

$$T^0(T/S,\mathcal{M}) \xrightarrow{c_0} D_a(\mathcal{M}) ,$$

welche folgendermaßen definiert ist. Für eine $\mathcal{O}_S$-Derivation $\delta:\mathcal{O}_T\longrightarrow\mathcal{M}$ sei $c_0(\delta)$ das durch das inverse Bild von $a[\mathcal{M}] := a\times_T T[\mathcal{M}]$ unter dem Automorphismus

$$1+\delta : T[\mathcal{M}] \longrightarrow T[\mathcal{M}]$$

repräsentierte Element von $D_a(\mathcal{M})$, d.h. $c_0(\delta)=(1+\delta)^*(a[\mathcal{M}])$. Ferner hat man eine natürliche Abbildung $D_a(\mathcal{M})\xrightarrow{i}\tilde{D}_a(\mathcal{M})$, welche einer Erweiterung $a\longrightarrow a'$ über $T[\mathcal{M}]$ die Isomorphieklasse von $(T[\mathcal{M}], a')$ zuordnet. Schließlich gibt es noch eine Abbildung $\tilde{D}_a(\mathcal{M})\xrightarrow{\pi}T^1(T/S,\mathcal{M})$, welche der durch (T',a') repräsentierten Isomorphieklasse die Erweiterung T' zuordnet. Man sieht leicht, daß die so definierten Abbildungen c_0, i, π funktoriell in $\mathcal{M}$ und mit direkten Produkten verträglich sind. Insbesondere sind diese Abbildungen $\Gamma(T,\mathcal{O}_T)$-linear. Aus den Definitionen ergibt sich sofort die folgende Aussage:

(4.9) Satz: Die Sequenz

$$T^0(T/S,\mathcal{M})\xrightarrow{c_0}D_a(\mathcal{M})\xrightarrow{i}\tilde{D}_a(\mathcal{M})\longrightarrow T^1(T/S,\mathcal{M})$$

ist exakt.-

Unter einer Obstruktionstheorie für $p:\underline{F}\longrightarrow\underline{An}/S$ wollen wir das folgende verstehen.

Für jeden Raum T über S und jedes a in $\underline{F}(T)$ sei ein Funktor

$$\sigma_a(-):\underline{Coh}(T)\longrightarrow\underline{Coh}(T)$$

und ein Morphismus von Funktoren

$$\mathcal{T}^1(T/S,-)\xrightarrow{c_1}\sigma_a(-)$$

gegeben, so daß gilt:

(Ob 1) Die Sequenz

$$\tilde{D}_a(\mathcal{M})\xrightarrow{\pi}\mathcal{T}^1(T/S,\mathcal{M})\xrightarrow{c_1}\sigma_a(\mathcal{M})$$

ist exakt für jeden kohärenten $\mathcal{O}_T$-Modul $\mathcal{M}$.

(Ob 2) $\sigma_a(-)$ und c_1 sind von lokaler Natur, d.h. es ist $\sigma_a(\mathcal{M})|U=\sigma_{a|U}(\mathcal{M}|U)$ für jeden kohärenten $\mathcal{O}_T$-Modul $\mathcal{M}$ und $U\subseteq T$ offen.

Die Bedingung (Ob 1) läßt sich auch so ausdrücken: Sei $t_0\in T$ und (T',t_0) eine Erweiterung des Raumkeimes (T,t_0) durch $\mathcal{M}$. Dann verschwindet die zu (T',t_0) gehörige Kohomologieklasse in $\mathcal{T}^1(T/S,\mathcal{M})_{t_0}$ unter c_1 genau dann, wenn es einen Morphismus $a\longrightarrow a'$ in $\underline{F}$ über der Einbettung $(T,t_0)\hookrightarrow(T',t_0)$ gibt.

Es sei bemerkt, daß ein gefasertes Gruppoid eine Obstruktionstheorie besitzt, sobald $\tilde{D}_a(-)$ kohärente Moduln in kohärente Moduln überführt. Man wähle dann etwa $\sigma_a(\mathcal{M})=\mathrm{Koker}(\pi)$!

Wir sind nun in der Lage, ein einfaches Kriterium für die Offenheit der Versalität anzugeben.

(4.10) Theorem: Sei $p:\underline{F}\longrightarrow\underline{An}/S$ ein homogenes gefasertes Gruppoid mit Obstruktionstheorie. Für jeden komplexen Raum T über S und jedes Objekt a in $\underline{F}(T)$ mögen die folgenden Bedingungen erfüllt sein.

(O1) Die zu der Prägarbe $U\rightsquigarrow D_{a|U}(\mathcal{M}|U)$ gehörige Garbe $\mathcal{D}_a(\mathcal{M})$ ist kohärent.

(O2) Zu jedem reduzierten Unterraum T' von T gibt es eine Z-offene dichte Teilmenge U' in T', so daß für t in U' die kanonische Abbildung

$$\mathcal{D}_a(\mathcal{O}_{T'})\otimes\kappa(t)\longrightarrow\mathcal{D}_a(\kappa(t))$$

bijektiv und

$$\sigma_a(\mathcal{O}_{T'})\otimes\kappa(t)\longrightarrow\sigma_a(\kappa(t))$$

injektiv ist.

Dann ist für jeden komplexen Raum T über S und jedes a in $\underline{F}(T)$ die Menge der Punkte, in denen a formal versell ist, eine Z-offene Teilmenge von T.

Beweis: Wir zeigen, daß die Voraussetzungen (1) und (2) von (4.8) erfüllt sind. Die Bedingung (1) folgt aus der exakten Sequenz

$$(*)\quad \mathcal{T}^0(T/S,\mathcal{M}) \xrightarrow{o_0} \mathcal{D}_a(\mathcal{M}) \xrightarrow{i} \tilde{\mathcal{D}}_a(\mathcal{M}) \xrightarrow{\pi} \mathcal{T}^1(T/S,\mathcal{M}) \xrightarrow{o_1} \mathcal{O}_a(\mathcal{M})$$

in der alle Moduln bis auf den mittleren nach Voraussetzung kohärent sind. Zeigen wir nun (2). Sei T' in T ein reduzierter Unterraum. Es gibt eine Z-offene dichte Teilmenge U von T' mit den folgenden Eigenschaften:

(i) In der exakten Sequenz (*) sind $\overbrace{\text{alle}}^{\text{für } \mathcal{M}=\mathcal{O}_{T'}}$ Moduln lokal frei auf U. Ferner sind Koker(o_0), Koker(i), Koker(π) und Koker(o_1) lokal frei auf U.

(ii) Die Abbildungen

$$\mathcal{T}^i(T/S,\mathcal{O}_{T'})\otimes\varkappa(t) \longrightarrow \mathcal{T}^i(T/S,\varkappa(t)) \quad , \ i=0,1$$

$$\mathcal{D}_a(\mathcal{O}_{T'})\otimes\varkappa(t) \longrightarrow \mathcal{D}_a(\varkappa(t))$$

sind bijektiv und

$$\mathcal{O}_a(\mathcal{O}_{T'})\otimes\varkappa(t) \longrightarrow \mathcal{O}_a(\varkappa(t))$$

ist injektiv für $t\in U$, vgl. (4.6) und (O2).

Wir betrachten dann für t in U das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}^0(T/S,\mathcal{O}_{T'})\otimes\varkappa(t) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}_a(\mathcal{O}_{T'})\otimes\varkappa(t) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{\mathcal{D}}_a(\mathcal{O}_{T'})\otimes\varkappa(t) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathcal{T}^1(T/S,\mathcal{O}_{T'})\otimes\varkappa(t) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_a(\mathcal{O}_{T'})\otimes\varkappa(t) \arrow[d] \\
\mathcal{T}^0(T/S,\varkappa(t)) \arrow[r] & \mathcal{D}_a(\varkappa(t)) \arrow[r] & \tilde{\mathcal{D}}_a(\varkappa(t)) \arrow[r] & \mathcal{T}^1(T/S,\varkappa(t)) \arrow[r] & \mathcal{O}_a(\varkappa(t))
\end{tikzcd}$$

Die untere Zeile in diesem Diagramm ist exakt. Die obere Zeile ist exakt aufgrund von (i), wie man leicht sieht. Unter Benutzung des Fünferlemmas ergibt sich daher aus (ii), daß γ bijektiv ist. Das war zu zeigen.–

Bemerkung: Im algebraischen Fall wurde ein ähnliches Kriterium für die Offenheit der Versalität von Artin in [3] bewiesen, während in der analytischen Geometrie ein solcher Satz kürzlich von J.Bingener gezeigt wurde. Unser Beweis ist wesentlich ver-

schieden von den Argumenten von Artin und Bingener und scheint einfacher zu sein. Es sei bemerkt, daß man mit diesem Beweis entsprechende Kriterien auch in der algebraischen Geometrie ableiten kann.

Wir wollen diesen Satz nun anwenden auf die in Teil A betrachteten Beispiele.

(4.11) Korollar: Sei $p:\underline{F}\longrightarrow\underline{An}/S$ eines der Gruppoide aus den Beispielen 1 - 4. Dann ist für jeden Raum T über S und jedes a in $\underline{F}(T)$ die Menge der Punkte, in denen a formal versell ist, eine Zariski-offene Teilmenge von T.

Beweis: zu Beispiel 2 (Deformationen von Abbildungen): Sei a ein Objekt in $\underline{F}(T)$, gegeben durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & Z_0 \\
& T &
\end{tikzcd}$$

Für einen kohärenten $\mathcal{O}_T$-Modul $\mathcal{M}$ sei $\mathcal{T}^i(a,\mathcal{M})$ die zu der Prägarbe

$$U \rightsquigarrow T^i(f_U/Z_0\times U,\ \beta^*(\mathcal{M}))$$

assoziierte Garbe. Dabei bezeichne f_U kurz die Abbildung $f\,|\,\alpha^{-1}(U):\alpha^{-1}(U)\longrightarrow\beta^{-1}(U)$. Zeigen wir zunächst, daß diese Garbe kohärent ist. Wegen der exakten Kohomologiesequenz (3.4) reicht es zu zeigen, daß die zu den Prägarben

$$U \rightsquigarrow T^i(\alpha^{-1}(U)/\beta^{-1}(U),\ \alpha^*(\mathcal{M}))$$

$$U \rightsquigarrow T^i(\beta^{-1}(U)/Z_0\times U,\ \beta^*(\mathcal{M}))$$

assoziierten Garben kohärent sind. Hierbei handelt es sich aber um die Kohomologie der Komplexe

$$\underline{R}\alpha_*\ \underline{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(L^\bullet_{X/Y},\ \alpha^*(\mathcal{M}))$$

$$\underline{R}\beta_*\ \underline{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(L^\bullet_{Y/Z_0\times T},\ \beta^*(\mathcal{M}))$$

welche kohärent sind, weil α und β eigentlich sind! Nun ist aufgrund von (3.20) $D_a(\mathcal{M})$ isomorph zu $T^1(f/Z_0\times T,\ \beta^*(\mathcal{M}))$, so daß Bedingung (O1) erfüllt ist. Eine Obstruktionstheorie liefert wegen (3.21) offenbar der Modul $\mathcal{T}^2(a,\mathcal{M})$. Daß die Bedingung (O2) erfüllt ist, ergibt sich aus (4.6).

Die Deformationen kompakter komplexer Räume sind ein Spezialfall der Deformationen von Abbildungen.

Bei Beispiel 3, also den Deformationen isolierter Singularitäten, verläuft der Beweis ähnlich.

Betrachten wir nun den Fall von Deformationen von Moduln, wie in Beispiel 4 beschrieben. Es ist wohlbekannt, daß in diesem Fall durch die Ext-Funktoren die infinitesimalen Erweiterungen und Obstruktionen beschrieben werden können, vgl. den folgenden Abschnitt E (Einen Beweis hierfür, der ohne den Kotangentenkomplex auskommt, findet man in [46] ,(2.8)). Die Offenheit der formalen Versalität für Deformationen von Moduln folgt dann wieder mit dem Kriterium (4.10).-

E. Anhang: Deformationen von Moduln

Sei X ein komplexer Raum und $\mathcal{M}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Für einen weiteren kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{J}$ betrachten wir Paare $(X',\mathcal{M}')$, wobei X' eine Erweiterung von X durch $\mathcal{J}$ und $\mathcal{M}'$ eine Erweiterung von $\mathcal{M}$ durch $\mathcal{J}\otimes\mathcal{M}$ als $\mathcal{O}_{X'}$-Modul ist:

$$0\longrightarrow \mathcal{J}\otimes\mathcal{M} \xrightarrow{\ i\ } \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

Dabei gelte $i(x\otimes m)=xm$. in naheliegender Weise definiert man Homomorphismen von solchen Paaren. Die Menge der Isomorphieklassen wollen wir im folgenden kurz mit $\widetilde{\mathrm{Ex}}(\mathcal{M},\mathcal{J})$ bezeichnen. Man überlegt sich leicht, daß $\widetilde{\mathrm{Ex}}(\mathcal{M},\mathcal{J})$ funktoriell in $\mathcal{J}$ und mit direkten Produkten verträglich ist. Insbesondere trägt $\widetilde{\mathrm{Ex}}(\mathcal{M},\mathcal{J})$ eine $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$-Modulstruktur. Man hat einen Homomorphismus $\widetilde{\mathrm{Ex}}(\mathcal{M},\mathcal{J})\longrightarrow T^1(X,\mathcal{J})$, welche dem Paar $(X',\mathcal{M}')$ die Erweiterung X' zuordnet. Wir wollen zeigen:

(4.12) Satz: Es gibt einen in $\mathcal{J}$ funktoriellen Homomorphismus

$$d_1: T^1(X,\mathcal{J})\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{M}\otimes\mathcal{J})$$

derart, daß die Sequenz

$$\widetilde{\mathrm{Ex}}(\mathcal{M},\mathcal{J})\longrightarrow T^1(X,\mathcal{J})\xrightarrow{d_1}\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{M}\otimes\mathcal{J})$$

exakt ist.

Beweis: Sei $\mathcal{Y}$ eine Resolvente von X, gegeben durch die Daten X_*, W_*, $\mathcal{R}_*$, wobei $\Omega_{\mathcal{R}_*}$ ein projektiver Modul ist. Sei

$\pi: \mathcal{F}_*\longrightarrow\mathcal{M}_*$ eine Auflösung von $\mathcal{M}_*$ durch einen projektiven (DG)-$\mathcal{R}_*$-Modul. (Man überlegt sich leicht, daß es solche Auflösungen stets gibt). Wir betrachten für jeden kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{J}$ den Komplex $D^\cdot(\mathcal{J})$ aller Paare

$$(\delta,h)\in \mathrm{Der}^i(\mathcal{R}_*,\mathcal{J}_*)\times \mathrm{Hom}^i_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}_*,\mathcal{M}_*\otimes\mathcal{J}_*)$$

wobei h ein verträgliches System von $\mathbb{C}$-linearen Differentialoperatoren ist, das die Produktregel

$$h(xf) = xh(f) + \pi(f)\otimes\delta(x)$$

erfüllt. Man hat eine Sequenz von Komplexen

$$(*)\quad 0\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_*}(\mathcal{F}_*,\mathcal{M}_*\otimes\mathcal{J}_*)\longrightarrow D^\cdot(\mathcal{J})\to \mathrm{Der}(\mathcal{R}_*,\mathcal{J}_*)\to 0$$

welche exakt ist ., weil $\mathcal{F}_*$ ein projektiver $\mathcal{R}_*$-Modul ist. Aus dem Komplex $\mathrm{Der}(\mathcal{R}_*,\mathcal{J}_*)$ berechnen sich wegen (3.7) die Moduln $T^i(X,\mathcal{J})$. Der Komplex $\overline{\mathcal{F}}_*:=\mathcal{F}_*\otimes_{\mathcal{R}_*}\mathcal{O}_{X_*}$ ist wegen (1.7) wieder eine Auflösung von $\mathcal{M}_*$. Daher berechnen sich aus dem Komplex

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_*}(\mathcal{F}_*,\mathcal{M}_*\otimes\mathcal{J}_*)\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_*}}(\overline{\mathcal{F}}_*,\mathcal{M}_*\otimes\mathcal{J}_*)$$

die Gruppen $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{M}\otimes\mathcal{J})$, vgl. (2.4) und (2.6). Aus der langen Kohomologiesequenz zu der Sequenz $(*)$ erhalten wir daher einen Homomorphismus

$$d_1: T^1(X,\mathcal{J})\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{M}\otimes\mathcal{J}).$$

Wir behaupten, daß d_1 die gesuchte Abbildung ist. Offenbar reicht es dazu, eine in $\mathcal{J}$ funktorielle Isomorphie $\widetilde{\mathrm{Ex}}(\mathcal{M},\mathcal{J})\xrightarrow{\sim} H^1(D^\cdot(\mathcal{J}))$ anzugeben. Sei dazu $(T',\mathcal{M}')$ in $\widetilde{\mathrm{Ex}}(\mathcal{M},\mathcal{J})$. Zunächst gibt es wie in (3.13) einen Homomorphismus $\eta: \mathcal{R}_*\to\mathcal{O}_{T'_*}$, welcher mit den Projektionen auf $\mathcal{O}_{T_*}$ verträglich ist. Somit wird $\mathcal{O}_{T'_*}$ zu einer $\mathcal{R}_*$-Algebra und $\mathcal{M}'_*$ zu einem $\mathcal{R}_*$-Modul. Weil $\mathcal{F}_*$ ein projektiver $\mathcal{R}_*$-Modul ist, gibt es einen $\mathcal{R}_*$-Homomorphismus $\beta: \mathcal{F}_*\to\mathcal{M}'_*$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_* \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{M}'_* \arrow[dl] \\ & \mathcal{M}_* & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Sei $\delta:=\eta s$ und $h:=\beta s$, wobei s das Differential in $\mathcal{R}_*$ bzw. $\mathcal{F}_*$ bezeichne. Man rechnet leicht nach, daß (δ,h) ein Zykel in $D^\cdot(\mathcal{J})$ ist, dessen Kohomologieklasse nur von der Isomorphieklasse von $(T',\mathcal{M}')$ abhängt. Wir erhalten daher mit dieser

Konstruktion einer Abbildung

$$\widetilde{\mathrm{Ex}}(\mathcal{M},\mathcal{J}) \longrightarrow H^1(D^\cdot(\mathcal{J}))\,,$$

welche man leicht als bijektiv nachweist.-

Betrachten wir nun die Situation in Beispiel 4. Es sei also $f:X\longrightarrow S$ eine flache holomorphe Abbildung, T ein Raum über S und $\mathcal{M}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_{X_T}$-Modul, welcher T-flach ist und dessen Träger eigentlich über T liegt. Es bezeichne kurz a das durch $\mathcal{M}$ und T gegebene Objekt in $\underline{F}$. Zunächst ist wohlbekannt, daß für jeden kohärenten $\mathcal{O}_T$-Modul $\mathcal{N}$ der Modul

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_T}}(\mathcal{M},\mathcal{M}\otimes f_T^*(\mathcal{N}))$$

die Erweiterungen von $\mathcal{M}$ durch $\mathcal{M}\otimes f_T^*(\mathcal{N})$ beschreibt. Daher sind $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_T}}(\mathcal{M},\mathcal{M}\otimes f_T^*(\mathcal{N}))$ und $D_a(\mathcal{N})$ kanonisch isomorph.

Eine Obstruktionstheorie erhält man wie folgt. Weil $X\longrightarrow S$ flach ist, hat man eine kanonische Abbildung

$$T^1(T/S,\mathcal{N})\longrightarrow T^1(X_T,f_T^*(\mathcal{N}))\,,$$

welche einer Erweiterung T' von T/S durch $\mathcal{N}$ die Erweiterung $X\times_S T'$ zuordnet. Sei

$$o_1:T^1(T/S,\mathcal{N})\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_{X_T}}(\mathcal{M},\mathcal{M}\otimes f_T^*(\mathcal{N}))$$

die Komposition dieser Abbildung mit dem in (4.12) konstruierten Homomorphismus. Wie man leicht sieht, liefert o_1 eine Obstruktionstheorie.-

Kapitel II. Deformationen von Abbildungen: lokaler Fall

§5. Der Hauptsatz und einige Beispiele

Sei $f_o:X_o\longrightarrow Y_o$ ein Morphismus komplexer Räume über Z_o, $x_o\in X_o$ und $y_o:=f_o(x_o)$. Wir wollen in diesem Kapitel Deformationen des zu f_o gehörigen Abbildungskeimes betrachten, d.h. wir betrachten Diagramme

$$\begin{tikzcd}
(X_o,x_o) \arrow[r, "f_o"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "1"] & (Y_o,y_o) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "2"] & Z_o\times\{s_o\} \arrow[d] \\
(X,x_o) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & (Y,y_o) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & Z_o\times S \arrow[dl] \\
 & (S,s_o) &
\end{tikzcd}$$

wobei α,β flach und die Teildiagramme 1 und 2 kartesisch sind. In naheliegender Weise bilden die Deformationen des Abbildungskeimes f_o/Z_o ein homogenes gefasertes Gruppoid $\underline{F}$ über der Kategorie der komplexen Raumkeime. Wir werden im folgenden die Deformationen von f_o/Z_o kurz mit kleinen Buchstaben $a,b,\dots$ bezeichnen. Das Symbol a_o reservieren wir dabei für die triviale Deformation über dem einpunktigen reduzierten Raum $*$.

Für einen $\mathcal{O}_{Y_o}$-Modul $\mathcal{N}$ sei $\mathcal{T}^i(f_o/Z_o,\mathcal{N})$ die zu der Prägarbe

$$U \rightsquigarrow \varinjlim_{V\supseteq f(U)} T^i(f_{oU,V}/Z_o,\mathcal{N})$$

assoziierte Garbe auf X_o; dabei werde der direkte Limes über alle Umgebungen V von $f(U)$ in Y_o genommen und es bezeichne $f_{oU,V}$ die Abbildung $f_o:U\longrightarrow V$. Keimweise handelt es sich bei den $\mathcal{T}^i(f_o/Z_o,\mathcal{N})$ gerade um die entsprechenden Tangentenfunktoren für die Abbildungen der analytischen Algebren, wie sie in §1 eingeführt wurden. Wir werden häufig die exakte Sequenz

$$\dots\longrightarrow\mathcal{T}^i(X_o/Y_o,f_o^*(\mathcal{N}))\longrightarrow\mathcal{T}^i(f_o/Z_o,\mathcal{N})\longrightarrow f_o^{-1}(\mathcal{T}^i(Y_o/Z_o,\mathcal{N}))$$
$$\xrightarrow{\delta^i}\mathcal{T}^{i+1}(X_o/Y_o,f_o^*(\mathcal{N}))\longrightarrow\dots$$

benötigen, welche sich leicht aus der exakten Sequenz in (3.4) ergibt.

Wegen (3.20) ist die Menge $D_{a_o}(\mathbb{C})$ der Isomorphieklassen von Deformationen des Abbildungskeimes f_o/Z_o über dem Doppelpunkt D isomorph zu $\mathcal{T}^1(f_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o})_{x_o}$. Ist dieser Vektorraum endlich-dimensional, wird man erwarten, daß es eine verselle Deformation gibt. Wir wollen in diesem Kapitel zeigen:

<u>(5.1) Theorem</u>: Es seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt.

(1) $\mathcal{T}^1(f_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o})_{x_o}$ ist ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum.

(2) $\mathcal{T}^2(X_o/Y_o, \mathcal{O}_{X_o})_{x_o}$ ist ein endlicher $\mathcal{O}_{Y_o,y_o}$-Modul.

Dann gibt es eine semiuniverselle Deformation des Abbildungskeimes f_o/Z_o.

Zum Beweis dieser Aussage siehe §6 und §7.

<u>(5.2) Bemerkungen</u>: (1) Für den Spezialfall, daß $Z_o = *$ ist, wurde dieser Satz - allerdings ohne die Voraussetzung (2) zu benötigen - in [39] von Retakh angekündigt. Es sei übrigens bemerkt, daß Corollary 2 in dieser Note falsch ist. Dort wird behauptet, daß aus X_o reduziert, Y_o nichtsingulär und $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{T}^1(f_o, \mathcal{O}_{Y_o})_{x_o} < \infty$ schon folgt, daß f_o flach in x_o ist. Als Gegenbeispiel betrachte man etwa die Einbettung des Nullpunktes in $\mathbb{C}$

$$f_o:\ 0 \hookrightarrow \mathbb{C},$$

die natürlich nicht flach ist, für die aber $\mathcal{T}^1(f_o, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})_0$ verschwindet, wie man leicht nachrechnet.

(2) Es sei f_o flach und $Z_o = *$. Ist dann f_o eine verselle Deformation der Faser $f_o^{-1}(y_o)$, so ist $\mathcal{T}^1(f_o, \mathcal{N})_{x_o} = 0$ für jeden kohärenten $\mathcal{O}_{Y_o}$-Modul $\mathcal{N}$. Insbesondere ist daher $\mathcal{T}^1(f_o, \mathcal{O}_{Y_o})_{x_o} = 0$, d.h. f_o ist starr. Die Umkehrung dieser Aussage ist i.A. nicht richtig: Sei beispielsweise (Y_o, y_o) ein starrer Raumkeim, der nicht glatt ist, und $(X_o, x_o) := (Y_o, y_o)$, $f_o := \mathrm{id}$. Dann ist zwar $\mathcal{T}^1(f_o, \mathcal{O}_{Y_o})_{x_o} = \mathcal{T}^1(Y_o, \mathcal{O}_{Y_o})_{y_o} = 0$, so daß f_o starr ist, aber f_o ist keine verselle Deformation der Faser $f_o^{-1}(y_o) = x_o$, weil Y_o nicht glatt ist, vgl. (8.2).

Ist allerdings Y_o ein vollständiger Durchschnitt und X_o ein vollständiger Durchschnitt über Y_o, so gilt auch die Umkehrung, d.h. es ist f_o genau dann starr, wenn f_o eine verselle Deformation der Faser $f_o^{-1}(y_o)$ ist. Beweis: Aus den Voraussetzungen folgt insbesondere $\mathcal{T}^2(X_o/Y_o, f_o^*(\mathcal{N})) = \mathcal{T}^2(Y_o, \mathcal{N}) = 0$ für jeden kohärenten $\mathcal{O}_{Y_o}$-Modul $\mathcal{N}$. Wegen der exakten Sequenz

$$\mathcal{T}^2(X_o/Y_o, f_o^*(\mathcal{N})) \to \mathcal{T}^2(f_o, \mathcal{N}) \longrightarrow \mathcal{T}^2(Y_o, \mathcal{N})$$

ist dann auch $\mathcal{T}^2(f_o, \mathcal{N}) = 0$. Weil f_o flach ist, hat man eine exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{T}^1(f_o, \mathcal{O}_{Y_o})_{x_o} \longrightarrow \mathcal{T}^1(f_o, \varkappa(y_o)) \longrightarrow \mathcal{T}^2(f_o, \mathfrak{m}_{y_o}) \longrightarrow \cdots$$

in welcher die beiden äußeren Terme verschwinden. Daher ist auch $\mathcal{T}^1(f_o, \varkappa(y_o))_{x_o} = 0$, so daß wegen (3.16) und (4.7) f_o eine formal verselle Deformation der Faser $f_o^{-1}(y_o)$ ist. Da aber $f_o^{-1}(y_o)$ bekanntlich eine semiuniverselle Deformation besitzt, ist jede formal verselle Deformation schon versell ((8.1)).-

Sei (S, s_o) ein komplexer Raumkeim und (S', s_o) eine Erweiterung von (S, s_o) durch $\varkappa(s_o)$. Ist dann a eine Deformation von f_o/Z_o, so gibt es wegen (3.21) und (3.22) eine Obstruktion in $\mathcal{T}^2(f_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o})_{x_o}$, welche genau dann verschwindet, wenn sich a liften läßt zu einer Deformation a' über (S', s_o). Hieraus folgt:

<u>(5.3) Satz</u>: Es seien die Voraussetzungen von (5.1) erfüllt. Ist dann $\mathcal{T}^2(f_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o})_{x_o} = 0$, so ist die Basis der semiuniversellen Deformation des Abbildungskeimes f_o/Z_o glatt.-

Einfache Kriterien für das Verschwinden von $\mathcal{T}^2(f_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o})_{x_o}$ kann man aus der exakten Sequenz

$$\mathcal{T}^2(X_o/Y_o, \mathcal{O}_{X_o})_{x_o} \longrightarrow \mathcal{T}^2(f_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o})_{x_o} \longrightarrow \mathcal{T}^2(Y_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o})_{y_o}$$

ableiten. Es folgt beispielsweise, daß die Basis der semiuniversellen Deformation glatt ist, falls X_o über Y_o und Y_o über Z_o vollständige Durchschnitte sind.

Sei nun a eine Deformation von f_o/Z_o über dem Raumkeim (S, s_o) und

$$o_o: \mathrm{Der}(\mathcal{O}_{S,s_o}, \varkappa(s_o)) \longrightarrow D_a(\varkappa(s_o)) \cong \mathcal{T}^1(f_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o})_{x_o}$$

der vor (4.9) konstruierte Homomorphismus. Dann gilt:

(5.4) Satz: Es seien die Voraussetzungen von (5.1) erfüllt. Ist (S,s_0) glatt und o_0 surjektiv (bzw. bijektiv), so ist a versell (bzw. semiuniversell).

Beweis: Wie wir in (8.1) zeigen werden, fallen die Begriffe versell und formal versell zusammen, wenn es überhaupt eine verselle Deformation gibt. Es ist daher nur nachzuweisen, daß a formal versell (bzw. formal semiuniversell) ist, was sich aber sofort aus der exakten Sequenz in (4.9) und aus (4.7) ergibt.

Es sei noch angemerkt, daß o_0 mit dem in §3.D definierten Homomorphismus d_0 übereinstimmt.-

Wir wollen nun für zwei einfache wohlbekannte Beispiele die semiuniversellen Deformation berechnen.

Beispiel 1: Sei $(X_0,x_0):=(Y_0,y_0):=(\mathbb{C}^n,0)$, $f_0:=\mathrm{id}$, $Z_0:=\mathbb{C}$ und $g_0:(\mathbb{C}^n,0)\longrightarrow\mathbb{C}$ eine in einer Umgebung von 0 definierte holomorphe Funktion. Dabei wollen wir annehmen, daß 0 ein isolierter kritischer Punkt von g_0 ist. Wegen $f_0=\mathrm{id}$ ist $\mathcal{T}^1(f_0/Z_0,-)\cong\mathcal{T}^1(Y_0/Z_0,-)$. Aus der exakten Sequenz

$$\mathcal{T}^0(Y_0,\mathcal{O}_{Y_0})_0\longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{Y_0}}(g_0^*(\Omega_{Z_0}),\mathcal{O}_{Y_0})_0\longrightarrow\mathcal{T}^1(Y_0/Z_0,\mathcal{O}_{Y_0})_0$$
$$\longrightarrow\mathcal{T}^1(Y_0,\mathcal{O}_{Y_0})_0=0$$

folgt, daß $\mathcal{T}^1(Y_0/Z_0,\mathcal{O}_{Y_0})$ isomorph ist zu dem endlichdimensionalen Vektorraum

$$M:=\mathcal{O}_{Y_0,0}/\Big(\sum_i\frac{\partial g_0}{\partial x_i}\cdot\mathcal{O}_{Y_0,0}\Big)$$

Wir wählen holomorphe Funktionen $g_1,\dots,g_\mu$ in $\mathcal{O}_{Y_0,0}$, deren Restklassen eine Basis von M bilden. Dann erhält man eine semiuniverselle Deformation durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}^n,0)\times(\mathbb{C}^\mu,0) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_2"] & \mathbb{C} \\
(\mathbb{C}^\mu,0) &
\end{tikzcd}$$

wobei π_2 die Projektion und g die Funktion

$$g(\underline{x},\underline{t}):=g_0(\underline{x})+\sum_{i=1}^{\mu}t_ig_i(\underline{x})$$

bezeichnet.

Beispiel 2: Sei $Z_0:=*$ und

$$f_0:(\mathbb{C}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{C}^r,0)$$

eine flache holomorphe Abbildung mit den Komponentenfunktionen $f_{01},\dots,f_{0r}$. In (1.19) wurde gezeigt, daß $\mathcal{T}^1(f_0,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^r,0})$ isomorph zum Kokern der Abbildung

$$\varphi:\mathcal{O}^n_{\mathbb{C}^n,0}\times\mathcal{O}^r_{\mathbb{C}^r,0}\longrightarrow\mathcal{O}^r_{\mathbb{C}^n,0}$$

ist, wobei

$$\varphi(\underline{\alpha},\underline{\beta})=\Big(\beta_\varrho\circ f_0-\sum_{\nu=1}^n\alpha_\nu\frac{\partial f_{0\varrho}}{\partial x_\nu}\Big)_\varrho .$$

Ist Kokern(φ) endlichdimensional, erhält man eine semiuniverselle Deformation wie folgt. Wir wählen Elemente $g_1,\dots,g_\mu$ aus $\mathcal{O}^r_{\mathbb{C}^n,0}$, deren Restklassen in $\mathcal{T}^1(f_0,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^r,0})_0$ eine Vektorraumbasis bilden. Die Abbildung

$$f:(\mathbb{C}^n,0)\times(\mathbb{C}^\mu,0)\longrightarrow(\mathbb{C}^r,0)$$

sei definiert durch

$$f(\underline{x},\underline{t}):=f_0(\underline{x})+\sum_{i=1}^{\mu}t_ig_i(\underline{x}).$$

Dann wird eine semiuniverselle Deformation gegeben durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}^n,0)\times(\mathbb{C}^\mu,0) \arrow[rr, "{(f,\mathrm{id})}"] \arrow[dr] & & (\mathbb{C}^r,0)\times(\mathbb{C}^\mu,0) \arrow[dl] \\
& (\mathbb{C}^\mu,0) &
\end{tikzcd}$$

§6. Vorbereitungen

In diesem und dem folgenden Paragraphen setzen wir die Kenntnis der Arbeit [36] von Pourcin voraus. Eine ausgezeichnete Zusammenfassung hiervon gibt Douady in [6], II, an dessen Bezeichnungen wir uns anschließen wollen: Unter einem Polyzylinder im $\mathbb{C}^n$ werden wir also stets ein Produkt $K=K_1\times\dots\times K_n$ von kompakten konvexen Teilmengen K_i in $\mathbb{C}$ mit $\mathring{K}_i\neq\emptyset$ verstehen. Es sei $B(K)$ der Banachraum aller stetigen Abbildungen von K in $\mathbb{C}$, welche holomorph auf $\mathring{K}$ sind und $\mathcal{B}_K$ die in [36] konstruierte Garbe auf K, welche die Eigenschaft $\Gamma(K,\mathcal{B}_K)=B(K)$ hat. Ist S ein banachanalytischer Raum und $X\subseteq S\times K$ ein über S anaplatter Unterraum im Sinne von [6],p.579, so bezeichnen wir mit $\mathcal{B}_X$ die Strukturgarbe von X und mit $B(K,\mathcal{B}_X)$ das hierzu assoziierte lokal triviale Banachraumbündel über S, vgl. [36] .

A. Der Raum $\mathcal{G}_S(X)$

Sei S ein banachanalytischer Raum, K ein Polyzylinder im $\mathbb{C}^n$ und $(X, \mathcal{B}_X)$ ein über S anaplatter Unterraum von $S \times K$. Wir betrachten den folgenden Funktor auf der Kategorie der banachanalytischen Räume über S: Ist $f:T \longrightarrow S$ ein Raum über S, so sei $G_S(X)(T)$ die Menge aller über T anaplatten Unterräume von $T \times K$, welche schon Unterräume von $T \times_S X := f^*(X)$ sind. Wir wollen zeigen:

<u>(6.1) Satz</u>: Der Funktor $G_S(X)$ ist darstellbar durch einen banachanalytischen Raum $\mathcal{G}_S(X)$ über S.

Anders ausgedrückt: Es gibt einen über $\mathcal{G}_S(X)$ anaplatten Unterraum Υ_X von $\mathcal{G}_S(X) \times K$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Es ist Υ_X schon ein Unterraum von $\mathcal{G}_S(X) \times_S X$.

(2) Ist $f:T \longrightarrow S$ ein banachanalytischer Raum über S und Y ein über T anaplatter Unterraum von $T \times_S X$, so gibt es genau einen S-Morphismus $h:T \longrightarrow \mathcal{G}_S(X)$ mit $h^*(\Upsilon_X)=Y$.

Für den Fall, daß S der einpunktige reduzierte Raum $*$ ist, schreiben wir kurz $\mathcal{G}(X)$ anstelle von $\mathcal{G}_S(X)$.

Bevor wir den Beweis beginnen, seien einige Bemerkungen vorausgeschickt.

Der Funktor $G_S(X)$ ist mit Basiswechsel $S' \longrightarrow S$ verträglich, d.h. bezeichnet X' den Unterraum $S' \times_S X$ von $S' \times K$, so gilt $G_{S'}(X')(T)=G_S(X)(T)$ für jeden banachanalytischen Raum T über S'. Es folgt, daß sich $G_{S'}(X')$ darstellen läßt, falls dies für $G_S(X)$ gilt, und in diesem Fall ist $\mathcal{G}_{S'}(X')=S' \times_S \mathcal{G}_S(X)$. In [36], th.(4.13) wird gezeigt, daß G(K) darstellbar ist. Wir erhalten somit die Darstellbarkeit von $G_S(S \times K)$ für jeden banachanalytischen Raum S.

<u>Beweis von (6.1)</u>: Da die Aussage lokal in S ist, dürfen wir o.E. annehmen, daß es eine endliche Auflösung von $\mathcal{B}_X$

$$\mathcal{L}_\bullet : \cdots \longrightarrow \mathcal{B}^r_{S\times K} \xrightarrow{d_0} \mathcal{B}_{S\times K} \longrightarrow \mathcal{B}_X \longrightarrow 0$$

gibt derart, daß die zugehörige Sequenz von holomorphen Banachraumbündeln über S

$$B(K,\mathcal{L}_\bullet) \longrightarrow B(K,\mathcal{B}_X) \longrightarrow 0$$

direkt exakt ist. Die Abbildung

$$B(K,\mathcal{B}^r_{S\times K}) \xrightarrow{d_0} B(K,\mathcal{B}_{S\times K})$$

sei dabei gegeben durch die Matrix $(F_1,\cdots,F_r)$, wobei die $F_i:S \longrightarrow B(K)$ holomorphe Funktionen auf S sind. Für jeden Morphismus $f:T \longrightarrow S$ und jeden über T anaplatten Unterraum Y von $T \times K$ definieren wir nun den Schnitt

$$\alpha_{T,Y}:T \longrightarrow B(K,\mathcal{B}^r_Y)$$

als Komposition des Morphismus

$$T \xrightarrow{(1_T,F_1\circ f,\cdots,F_r\circ f)} B(K,\mathcal{B}^r_{T\times K}) \cong T \times B(K)^r$$

mit der kanonischen Projektion $B(K,\mathcal{B}^r_{T\times K}) \xrightarrow{p} B(K,\mathcal{B}^r_Y)$. Offenbar ist die Definition von $\alpha_{T,Y}$ funktoriell in T und Y, d.h. ist T' ein Raum über T und $Y' = T' \times_T Y$, so ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
T' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{T',Y'}"'] & T \arrow[d, "\alpha_{T,Y}"] \\
B(K,\mathcal{B}^r_{Y'}) \arrow[r] & B(K,\mathcal{B}^r_Y)
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Ferner gilt:

(U): $\alpha_{T,Y}$ faktorisiert sich genau dann über den Nullschnitt, wenn Y schon ein Unterraum von $T \times_S X$ ist.

Um diese Aussage einzusehen, darf man o.E. T=S annehmen. Offenbar ist $\mathcal{B}_Y$ genau dann ein Quotient von $\mathcal{B}_X$, wenn die Komposition der Abbildungen

$$\mathcal{B}^r_{S\times K} \xrightarrow{d_0} \mathcal{B}_{S\times K} \xrightarrow{p} \mathcal{B}_Y$$

0 ist, oder, was aufgrund der Ergebnisse in [36] äquivalent ist, wenn sich der Morphismus von lokal trivialen Banachraumbündeln

$$B(K,\mathcal{B}^r_{S\times K}) \xrightarrow{B(K,p\circ d_0)} B(K,\mathcal{B}_Y)$$

über den Nullschnitt faktorisiert. Das ist aber offenbar genau dann der Fall, wenn die Bilder der Schnitte F_i in $B(K, \mathcal{B}_Y)$ Null sind!

Es bezeichne

$$\alpha: \mathcal{G}_S(S\times K) \longrightarrow B(K, \mathcal{B}_{\Upsilon_{S\times K}})$$

kurz den Morphismus $\alpha_{T,Y}$ für $T= \mathcal{G}_S(S\times K)$ und $Y= \Upsilon_{S\times K}$. Wir behaupten, daß

$$\mathcal{G}_S(X) := \alpha^{-1}(\sigma), \quad \Upsilon_X := \mathcal{G}_S(X)\times_{\mathcal{G}_S(S\times K)} \Upsilon_{S\times K}$$

den Funktor $G_S(X)$ darstellt; dabei sei σ kurz der Nullschnitt in dem Banachraumbündel $B(K, \mathcal{B}_{\Upsilon_{S\times K}})$. Zunächst ist wegen (U) Υ_X ein Unterraum von $\mathcal{G}_S(X)\times_S X$. Sei nun $T\to S$ ein Morphismus und $Y\subseteq T\times K$ ein über T anaplatter Unterraum mit $Y\subseteq T\times_S X$. Dann gibt es genau einen S-Morphismus $T\xrightarrow{h}\mathcal{G}_S(S\times K)$ mit $h^*(\Upsilon_{S\times K})=Y$. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\alpha_{T,Y}"'] & \mathcal{G}_S(S\times K) \arrow[d, "\alpha"] \\ B(K, \mathcal{B}_Y) \arrow[r] & B(K, \mathcal{B}_{\Upsilon_{S\times K}}) \end{tikzcd}$$

Weil Y ein Unterraum von $T\times_S X$ ist, faktorisiert sich $\alpha_{T,Y}$ über den Nullschnitt, also auch die Komposition $\alpha\circ h$. Das bedeutet aber gerade, daß sich h über $\mathcal{G}_S(X)$ faktorisiert, w.z.b.w.

B. Hilfssätze

In diesem Abschnitt wollen wir einige einfache Hilfssätze bereitstellen, für die wir keine Referenzen finden konnten und die bei den folgenden Überlegungen des öfteren benötigt werden.

Den Begriff des Unterraums wollen wir stets im Sinne von Douady [6], I.1. verwenden: Ein Morphismus $i:S'\to S$ banachanalytischer Räume nennt man eine abgeschlossene Einbettung und S' heißt abgeschlossener Unterraum von S, wenn S' lokal von der Form $f^{-1}(0)$ ist, wobei $f:S\to F$ ein Morphismus in einen Banachraum F ist. Wir erinnern noch an den Begriff des Tangentialraums eines banachanalytischen Raumes S. Ist U eine offene Teilmenge des Banachraumes E und $f:U\to F$ eine analytische Abbildung in den Banachraum F mit $S=f^{-1}(0)$, so ist $T_{s_o}S$ definiert als der

banachanalytische Unterraum $(d_{s_o}f)^{-1}(0)$ von E. Im allgemeinen ist $T_{s_o}S$ verschieden von dem Banachraum $\mathrm{Ker}(d_{s_o}f)$. Diese beiden Räume stimmen genau dann überein, wenn $T_{s_o}S$ glatt ist oder, was wegen [6], prop.1 dazu äquivalent ist, wenn $d_{s_o}f$ eine direkte lineare Abbildung ist. Ist dies der Fall, so läßt sich S lokal in $T_{s_o}S$ einbetten ([6], I.7. Remarque). Dabei soll die Einbettung natürlich so beschaffen sein, daß sie in s_o die Identität auf den Tangentialräumen induziert. Etwas allgemeiner wollen wir die folgende Aussage zeigen:

(6.2) Satz: Sei $f:S_1\to S_2$ ein Morphismus banachanalytischer Räume, S_2' ein Unterraum von S_2 und s_1 ein Punkt in S_1 mit $s_2:=f(s_1)\in S_2'$. Die Räume $T_{s_1}S_1$, $T_{s_2}S_2$ und $T_{s_2}S_2'$ seien glatt und der Homomorphismus

$$p\circ d_{s_1}f: T_{s_1}S_1 \longrightarrow T_{s_2}S_2/T_{s_2}S_2'$$

sei direkt, wenn wir mit p die kanonische Projektion auf $T_{s_2}S_2/T_{s_2}S_2'$ bezeichnen. Dann ist auch der Tangentialraum von $S_1':=f^{-1}(S_2')$ im Punkte s_1 glatt. Insbesondere läßt sich S_1' in einer Umgebung von s_1 in seinen Tangentialraum einbetten.

Beweis: Es ist $T_{s_1}S_1'$ nichts anderes als der banachanalytische Raum $(d_{s_1}f)^{-1}(T_{s_2}S_2')$, wie man leicht sieht. Es reicht zu zeigen, daß dieser Raum mit $(p\circ d_{s_1}f)^{-1}(0)$ übereinstimmt. Das ist offenbar dann der Fall, wenn die Abbildung

$$T_{s_2}S_2' \longrightarrow T_{s_2}S_2$$

injektiv direkt ist. Nun gibt es – wenigstens nach Verkleinerung von S_2 als Umgebung von s_2 – eine Abbildung $h:S_2\to F$ in einen Banachraum F mit $h^{-1}(0)=S_2'$. Dann ist $T_{s_2}S_2'=(d_{s_2}h)^{-1}(0)$, und weil dieser Raum glatt und $T_{s_2}S_2$ ein Banachraum ist, muß $d_{s_2}h$ direkt sein. Insbesondere ist daher $T_{s_2}S_2'$ ein direkter Unterraum von $T_{s_2}S_2$, w.z.b.w.

Wir werden im folgenden einige Privilegiertheitsaussagen benötigen. Zunächst wollen wir zeigen:

(6.) Satz: Seien U eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$, $K\subseteq U$ ein Polyzylinder und $\mathcal{M},\mathcal{N}$ kohärente $\mathcal{O}_U$-Moduln. Es sei K privilegiert für $\mathcal{M},\mathcal{N}$ und $\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{M},\mathcal{N})$, $q\geq 0$. Dann ist

$$B(K, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{M},\mathcal{N})) \cong \mathrm{Ext}^q_{B(K)}(B(K,\mathcal{M}),B(K,\mathcal{N}))$$

für alle q.

Beweis: Sei $\mathcal{L}_\bullet \to \mathcal{M} \to 0$ eine endliche freie Auflösung von $\mathcal{M}$ in einer Umgebung von K. Dann ist der Komplex $B(K,\mathcal{L}_\bullet)$ eine direkte Auflösung von $B(K,\mathcal{M})$. Daher berechnen sich die Gruppen $\mathrm{Ext}^q_{B(K)}(B(K,\mathcal{M}),B(K,\mathcal{N}))$ aus dem Komplex

$$\mathrm{Hom}_{B(K)}(B(K,\mathcal{L}_\bullet),B(K,\mathcal{N})) \cong B(K, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{L}_\bullet,\mathcal{N})).$$

Die Behauptung ergibt sich somit aus dem nachfolgenden Hilfssatz:

(6.4) Lemma: Seien U eine offene Teilmenge des C^n, $\mathcal{R}_\bullet$ ein nach unten beschränkter Komplex von $\mathcal{O}_U$-Moduln und K ein Polyzylinder in U derart, daß K privilegiert für $\mathcal{R}_i$ und $H_i(\mathcal{R}_\bullet)$ ist für alle i. Dann gilt:

(i) $H_i(B(K,\mathcal{R}_\bullet)) \cong B(K,H_i(\mathcal{R}_\bullet))$ für alle i.

(ii) Der Komplex $B(K,\mathcal{R}_\bullet)$ ist direkt.

Beweis: Sei

$$\mathcal{B}_i := \mathrm{Bild}(\mathcal{R}_{i+1} \longrightarrow \mathcal{R}_i)$$
$$\mathcal{K}_i := \mathrm{Ker}(\mathcal{R}_i \longrightarrow \mathcal{R}_{i-1}).$$

Man hat exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_i \longrightarrow \mathcal{K}_i \longrightarrow H_i(\mathcal{R}_\bullet) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_i \longrightarrow \mathcal{R}_i \longrightarrow \mathcal{B}_{i-1} \longrightarrow 0$$

Wegen $\mathcal{B}_i=0$ für $i \ll 0$ folgt durch aufsteigende Induktion nach i, daß auch $\mathcal{B}_i$ und $\mathcal{K}_i$ privilegiert sind und daß die Sequenzen

$$0 \longrightarrow B(K,\mathcal{B}_i) \longrightarrow B(K,\mathcal{K}_i) \longrightarrow B(K,H_i(\mathcal{R}_\bullet)) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow B(K,\mathcal{K}_i) \longrightarrow B(K,\mathcal{R}_i) \longrightarrow B(K,\mathcal{B}_{i-1}) \longrightarrow 0$$

direkt exakt sind ([5],§7,prop.3 und 4). Daraus ergibt sich die Behauptung.-

(6.5) Satz: Seien U bzw. V offene Teilmengen des C^n bzw. C^m, $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_{U\times V}$-Modul und $K\times L \subseteq U\times V$ ein $\mathcal{F}$-privilegierter Polyzylinder. Der Träger von $\mathcal{F}$ liege endlich über V, und es sei $\mathrm{Tr}(\mathcal{F}) \cap (U\times L) \subseteq \mathring{K}\times L$. Dann gilt:

(i) L ist $f_*(\mathcal{F})$-privilegiert.

(ii) Die kanonische Abbildung $B(L,f_*(\mathcal{F})) \longrightarrow B(K\times L,\mathcal{F})$ ist bijektiv.

Beweis: Sei $x=(x_1,\dots,x_m)$ ein Punkt in $L=L_1\times\dots\times L_m$. Nach Umordnen der Koordinaten kann man erreichen, daß $x_\mu \in \mathring{L}_\mu$ für $\mu=1,\dots,r$ und $x_\mu \in \partial L_\mu$ für $\mu=r+1,\dots,m$. Wir setzen $L':=L_1\times\dots\times L_r$, $L'':=L_{r+1}\times\dots\times L_m$, $x=(x',x'')$ und bezeichnen mit π die Projektion von C^{n+m} auf C^m sowie mit π' die Projektion von $C^m\cong C^r\times C^{m-r}$ auf den C^{m-r}. Weil $K\times L$ $\mathcal{F}$-privilegiert ist, folgt, daß $\mathcal{F}$ $\pi'\circ\pi$-flach in den Punkten über x'' ist ([36], th. 3.2). Daher ist auch $f_*(\mathcal{F})$ π'-flach in x, und wiederum mit dem eben zitierten Satz folgt, daß L privilegiert für $f_*(\mathcal{F})$ ist, womit wir (i) gezeigt haben.

Zum Beweis von (ii) reicht es, die folgende Aussage nachzuweisen ([36],(2.3)): Zu jedem Punkt $x\in L$ existiert eine Umgebung $\tilde{L}$ von x in L derart, daß die kanonische Abbildung

$$\Gamma(\tilde{L},f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{B}_L) \longrightarrow \Gamma(K\times\tilde{L}, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{K\times L}} \mathcal{B}_{K\times L})$$

bijektiv ist. Zunächst gilt:

$$\Gamma(\mathring{L},f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{B}_L) = f_*(\mathcal{F})(\mathring{L})$$
$$\Gamma(K\times\mathring{L}, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{K\times L}} \mathcal{B}_{K\times L}) = \mathcal{F}(K\times\mathring{L}),$$

und die Moduln auf der rechten Seite stimmen überein. Somit ist die Behauptung für Punkte in $\mathring{L}$ klar. Betrachten wir als nächstes den Fall $x=(x_1,\dots,x_m)$ mit $x_\mu \in \partial L_\mu$ für alle μ. Dann ist $f_*(\mathcal{F})$ ein freier $\mathcal{O}_V$-Modul in einer Umgebung von x (loc. cit.), und $\mathcal{F}$ ist $\mathcal{O}_V$-flach in den Punkten über x. Daher erhält man wie in [5],§7,3. ein lokal triviales Banachraumbündel $B(K,\mathcal{F})$ über einer Umgebung W von x mit den Fasern $B(K,\mathcal{F})_y=B(K, \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_V} \kappa(y))$, welches nichts anderes als das zu $f_*(\mathcal{F})|W$ gehörige Vektorraumbündel ist, wie man leicht sieht. Für einen Polyzylinder $\tilde{L}$ in W gilt daher einerseits

$$B(\tilde{L},B(K,\mathcal{F})) = B(\tilde{L},f_*(\mathcal{F}))$$

und andererseits

$$B(\tilde{L},B(K,\mathcal{F})) = B(K\times\tilde{L},\mathcal{F})$$

([5],§7,prop.6), womit die Behauptung auch in diesem Fall gezeigt ist.

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall. Sei $x=(x',x'')\in L=L'\times L''$, wobei die Polyzylinder $L'\subseteq \mathbb{C}^r$, $L''\subseteq \mathbb{C}^{m-r}$ wie oben gewählt seien. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach m. Den Fall m=1 haben wir mit den obigen Betrachtungen schon bewiesen. Sei nun $m>1$. Wir müssen nur noch den Fall $r\neq 0\neq m-r$ untersuchen. $\mathcal{F}$ ist in den Punkten über x'' $\pi'\circ\pi$ -flach und $K\times L'$ ist privilegiert für die Faser $\mathcal{F}(x'')$, wie man wieder leicht mit dem Kriterium [36],th.(3.2)(ii) nachprüft. Daher ist auch L' privilegiert für $f_*(\mathcal{F})(x'')$, und die kanonische Abbildung von Banachraumbündeln

$$B(L',f_*(\mathcal{F}))\longrightarrow B(K\times L',\mathcal{F})$$

über einer Umgebung W von x'' ist nach Induktionsvoraussetzung faserweise bijektiv und damit ein Isomorphismus. Es folgt, daß für jeden Polyzylinder $\tilde{L}''$ in W auch die Abbildung

$$B(\tilde{L}'',B(L',f_*(\mathcal{F})))\longrightarrow B(\tilde{L}'',B(K\times L',\mathcal{F}))$$

bijektiv ist. Da dies aber gerade die Räume

$$B(L'\times\tilde{L}'',f_*(\mathcal{F}))\quad\text{bzw.}\quad B(K\times L'\times\tilde{L}'',\mathcal{F})$$

sind, ergibt sich hieraus die Behauptung.-

C. Der Tangentialraum von $\mathfrak{G}(L)$

Sei $V\subseteq\mathbb{C}^m$ offen, $L\subseteq V$ ein Polyzylinder und $Y_0\subseteq V$ ein abgeschlossener Unterraum, welcher sich in eine Umgebung von $\bar{V}$ fortsetzen läßt und durch das Ideal $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{O}_V$ beschrieben wird. Die folgende Voraussetzung möge in diesem Abschnitt stets erfüllt sein.

L ist privilegiert für die Garben $\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_{Y_0},\mathcal{O}_{Y_0})$ für $q\geq 0$.

Wir wollen zeigen (vgl. auch [35], Lemma 2):

(6.6) Satz: Der Tangentialraum von $\mathfrak{G}(L)$ im Punkte Y_0 ist glatt und isomorph zu $B(L,\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{J},\mathcal{O}_{Y_0}))$. Insbesondere ist $\mathfrak{G}(L)$ in einer Umgebung von Y_0 in seinen Tangentialraum im Punkt Y_0 einbettbar.

Der Beweis ergibt sich sofort aus Teil (2) der folgenden

Aussage. Für die Definition der Räume $\mathfrak{G}_A(E)$ und $\sigma_A(\dots)$ sei dabei auf [5] §2&4 verwiesen.

(6.7) Lemma: Sei A eine Banachalgebra,

$$A^r\xrightarrow{\ f\ }A^s\xrightarrow{\ g\ }E\xrightarrow{\ p\ }F\longrightarrow 0$$

eine direkte exakte Sequenz von A-Banachmoduln und G:=Kern(p). Dann gilt:

(1) Bezeichnet β den Homomorphismus

$$\begin{aligned}\beta:\mathrm{Hom}_A(A^r,A^s)\times\mathrm{Hom}_A(A^s,E)&\longrightarrow\mathrm{Hom}_A(A^r,E)\\ (u,v)&\longmapsto gu+vf\end{aligned}$$

so ist der Tangentialraum $T_{(f,g)}\sigma_A(A^r,A^s,E)$ isomorph zu $\beta^{-1}(0)$. Insbesondere ist der Tangentialraum glatt, wenn β direkt ist.

(2) Der Homomorphismus

$$\gamma:=\mathrm{Hom}(f,F):\mathrm{Hom}_A(A^s,F)\longrightarrow\mathrm{Hom}_A(A^r,F)$$

sei direkt. Dann ist der Tangentialraum von $\mathfrak{G}_A(E)$ im Punkte F isomorph zu $\mathrm{Hom}_A(G,F)$ und daher insbesondere glatt.

Beweis: zu (1): Es ist

$$\sigma_A(A^r,A^s,E)=\sigma(A^r,A^s,E)\times_{(L(A^r,A^s)\times L(A^s,E))}(\mathrm{Hom}_A(A^r,A^s)\times\mathrm{Hom}_A(A^s,E))$$

wie unmittelbar aus den Definitionen folgt. Wir erhalten hieraus und aus der Beschreibung von $\sigma(A^r,A^s,E)$ in [5],§2,prop.2(b), daß $\sigma_A(A^r,A^s,E)$ eine offene Teilmenge des Urbildes der Null unter der Abbildung

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(A^r,A^s)\times\mathrm{Hom}_A(A^s,E)&\longrightarrow L(A^r,E)\\ (u,v)&\longmapsto v\circ u\end{aligned}$$

ist. Weil $\mathrm{Hom}_A(A^r,E)$ ein direkter Unterraum von $L(A^r,E)$ ist, können wir auf der rechten Seite $L(A^r,E)$ auch durch $\mathrm{Hom}_A(A^r,E)$ ersetzen. Die Tangentialabbildung dieses Morphismus im Punkte (f,g) ist aber gerade β, so daß sich hieraus (1) ergibt.

zu (2): Es bezeichne $\pi:\sigma_A(A^r,A^s,E)\longrightarrow\mathfrak{G}_A(E)$ die Projektion. Wegen [5],§4,2.,cor. ist π glatt. Die Faser $N:=\pi^{-1}(F)$ ist eine offene Teilmenge des Urbilds der 0 von der Abbildung

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(A^r,A^s)\times\mathrm{Hom}_A(A^s,G)&\longrightarrow\mathrm{Hom}_A(A^r,G)\\ (u,v)&\longmapsto v\circ u\end{aligned}$$

wie man leicht sieht. Die zugehörige Tangentialabbildung im Punkt (f,g) ist gerade der Homomorphismus α mit $\alpha(u,v)=gu+vf$.
Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(A^r,A^s)\times \mathrm{Hom}_A(A^s,G) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \mathrm{Hom}_A(A^r,A^s)\times \mathrm{Hom}_A(A^s,E) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \mathrm{Hom}_A(A^s,F) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(A^r,G) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(A^r,E) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(A^r,F) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit direkt exakten Zeilen. Weil $g:A^s \to G$ surjektiv direkt ist, gilt dies auch für α. Ferner ist γ nach Voraussetzung direkt. Aus dem nachfolgenden Lemma ergibt sich, daß dann auch β direkt ist. Daher ist $\beta^{-1}(0) \cong T_{(f,g)}\,\sigma_A(A^r,A^s,E)$ glatt und somit auch $T_F\mathfrak{G}_A(E)$, weil π ein glatter Morphismus ist. Ferner identifiziert sich $T_F\mathfrak{G}_A(E)$ mit dem Kokern der Abbildung

$$T_{(f,g)}N \longrightarrow T_{(f,g)}(\sigma_A(A^r,A^s,E)),$$

was aber nichts anderes als $\gamma^{-1}(0)=\mathrm{Hom}_A(G,F)$ ist, w.z.b.w.

Der folgende Hilfssatz ist noch nachzutragen.

<u>(6.8) Lemma:</u> Gegeben sei ein kommutatives Diagramm von Banachräumen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha'"] & E'\oplus E'' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\alpha"] & E'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F' \arrow[r, "j"'] & F'\oplus F'' \arrow[r, "q"'] & F'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

wobei i,j bzw. p,q die kanonischen Injektionen bzw. Projektionen sind. Es seien α', α'' sowie der kanonische Homomorphismus $\mathrm{Ker}(\alpha'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Koker}(\alpha')$ direkt. Dann gilt:

(1) α ist direkt.

(2) Die Kern-Kokern-Sequenz

$$0 \to \mathrm{Ker}(\alpha') \to \mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\alpha'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Koker}(\alpha') \to \mathrm{Koker}(\alpha) \to \mathrm{Koker}(\alpha'') \to 0$$

ist direkt exakt.

<u>Beweis</u>: Seien $K:=\mathrm{Ker}(\alpha)$, $C:=\mathrm{Koker}(\alpha)$, analog K',K'',C',C''. Zeigen wir zunächst, daß C separiert ist. Wegen $\alpha(E'\oplus K'') \subseteq F'\oplus 0$ induziert α eine Abbildung

$$\bar{\alpha}: E''/K'' \longrightarrow (F'/\mathrm{Bild}(E'\oplus K''))\oplus F''.$$

Es ist $F'/\mathrm{Bild}(E'\oplus K'') \cong C'/\delta(K'')$ separiert, und die Abbildung $E''/K'' \to F''$ ist injektiv direkt. Daher ist auch $C=\mathrm{Koker}(\bar{\alpha})$ separiert.

zu (2): Wie man leicht sieht, sind die Abbildungen $K' \to K$ und $C \to C''$ direkt. Weil nach Voraussetzung auch δ direkt ist, ergibt sich daraus (2).

zu (1): Wir erinnern an das folgende Kriterium für die Direktheit einer Abbildung von Banachräumen $E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2$: φ ist genau dann direkt, wenn für jeden topologischen Vektorraum T die kanonische Abbildung

$$\mathrm{Koker}(L(T,\varphi)) \longrightarrow L(T,\mathrm{Koker}(\varphi))$$

bijektiv ist. Aufgrund von (2) ist die untere Zeile in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(L(T,\alpha'')) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Koker}(L(T,\alpha')) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Koker}(L(T,\alpha)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Koker}(L(T,\alpha'')) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
L(T,K'') \arrow[r] & L(T,C') \arrow[r] & L(T,C) \arrow[r] & L(T,C'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

exakt. Die Behauptung ergibt sich daher aus dem obigen Kriterium und dem Fünferlemma.-

Wir betrachten weiter die zu Beginn des Abschnitts eingeführte Situation. Mit $B(L,V)$ bezeichnen wir kurz die offene Teilmenge aller φ in $B(L)^m$ mit $\varphi(L)\subseteq V$. Es sei $H:B(L,V)\times L \to V$ die Abbildung $H(\varphi,x)=\varphi(x)$ und $Y:=H^*(Y_0)$. Offenbar ist Y über einer Umgebung W von $id \in B(L,V)$ ein anaplatter Unterraum von $W\times L$, den man auch folgendermaßen beschreiben kann: Sei

$$\mathcal{L}_\bullet : \cdots \longrightarrow \mathcal{O}_V^{n_2} \xrightarrow{d_1} \mathcal{O}_V^{n_1} \xrightarrow{d_0} \mathcal{O}_V$$

eine endliche Auflösung von $\mathcal{O}_{Y_0}$, wobei d_0 durch die Matrix $(Q_1,\dots,Q_{n_1})$ gegeben ist. Aus $\mathcal{L}_\bullet$ erhält man einen Komplex

$$\tilde{\mathcal{L}}_\bullet : \cdots \longrightarrow \mathcal{B}_{W\times L}^{n_2} \xrightarrow{\tilde{d}_1} \mathcal{B}_{W\times L}^{n_1} \xrightarrow{\tilde{d}_0} \mathcal{B}_{W\times L}$$

wobei der Randhomomorphismus $\tilde{d}_0$ durch die Matrix $(\tilde{Q}_1,\dots,\tilde{Q}_{n_1})$ mit $\tilde{Q}_i(\varphi):=Q_i\circ\varphi$ definiert ist, analog für $\tilde{d}_1,\dots$. Der Kokern von $\tilde{d}_0$ liefert dann den Unterraum Y von $W\times L$. Aufgrund der universellen Eigenschaft von $\mathfrak{G}(L)$ gibt es einen Morphismus

$$\Psi : W \longrightarrow \mathfrak{G}(L)$$

mit $\Psi^*(\Upsilon_L)=Y$. Wir wollen zeigen:

(6.9) Satz ([35], prop.1): Die Tangentialabbildung

$$d_{id}\Psi : T_{id}W \longrightarrow T_{Y_c}\mathcal{G}(L)$$

wird induziert durch den Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{O}_V^m \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2, \mathcal{O}_{Y_c})$$

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_m) \longmapsto \Big(\bar{\varphi} \longmapsto \sum_\mu \alpha_\mu \frac{\partial\varphi}{\partial Y_\mu}\Big).$$

(Dabei seien $Y_1,\dots,Y_m$ die Koordinatenfunktionen des $\mathbb{C}^m$).

Beweis: Wir betrachten zunächst den zu der Auflösung $\tilde{\mathcal{L}}$. gehörigen Homomorphismus

$$\tilde{\Psi} : W \longrightarrow \sigma_{B(L)}(B(L)^{n^2}, B(L)^{n^2}, B(L))$$

und berechnen zu $\tilde{\Psi}$ die Tangentialabbildung

$$d_{id}\tilde{\Psi} : B(L)^m \longrightarrow Ker(\beta)$$

wobei β den Homomorphismus in (6.7)(1) bezeichnet. Offenbar ist $d_{id}\tilde{\Psi}$ die Abbildung

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_m) \longmapsto \Big(?, \big(\sum_\mu \alpha_\mu \frac{\partial Q_i}{\partial Y_\mu}\big)_i\Big).$$

Da $d_{id}\Psi$ die Komposition von $d_{id}\tilde{\Psi}$ mit der Projektion

$$d\pi : Ker(\beta) \longrightarrow T_{id}\mathcal{G}(L) \cong B(L, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2, \mathcal{O}_{Y_c}))$$

ist, erhalten wir hieraus leicht die Behauptung.-

D. Der Tangentialraum von $\mathcal{M}or_{\mathcal{G}(L)}(\Upsilon_L, Z)$

Sei L ein Polyzylinder im $\mathbb{C}^n$, S ein banachanalytischer Raum und X ein über S anaplatter Unterraum von $S \times L$. Wir wollen X als funktorierten Raum wie in [36] auffassen. Ferner sei Z ein banachanalytischer Raum von endlicher Darstellung über S, vgl. [36], (5.1) (uns wird im folgenden nur der Fall $Z = S \times Z_c$ interessieren, wobei Z_c ein endlichdimensionaler komplexer Raum ist). Wir betrachten den Funktor $Mor_S(X,Z)$ von der Kategorie der banachanalytischen Räume über S in die Kategorie der Mengen welcher einem Raum T über S die Menge aller Morphismen $T \times_S X \longrightarrow T \times_S Z$ von funktorierten Räumen zuordnet. Dann gilt:

Theorem ([36], th.5.12): Der Funktor $Mor_S(X,Z)$ ist darstellbar

durch eine banachanalytischen Raum $\mathcal{M}or_S(X,Z)$.

Bemerkung: Die Faser von $\mathcal{M}or_S(X,Z)$ über einem Punkt $e \in S$ ist die Menge aller Morphismen g der Faser X_e in die Faser Z_e. Den zu e und g gehörigen Punkt von $\mathcal{M}or_S(X,Z)$ werden wir im folgenden kurz mit (s,g) bezeichnen. Ist $S = *$, so schreiben wir auch kurz $\mathcal{M}or(X,Z)$ anstelle von $\mathcal{M}or_S(X,Z)$.

Es sei kurz an die Konstruktion von $\mathcal{M}or_S(X,Z)$ erinnert für den Fall $Z = S \times Z_c$, wobei Z_c ein lokal abgeschlossener Unterraum des $\mathbb{C}^r$ ist, der durch die in einer offenen Umgebung W von Z_c definierten Funktionen $f_1,\dots,f_n$ beschrieben wird. Zunächst wird $Mor_S(X, S \times \mathbb{C}^r)$ dargestellt durch das Bündel $B(L, \mathcal{B}_X^r)$. Der Raum $\mathcal{M}or_S(X, S \times W)$ ist die offene Teilmenge aller (s,g)-in $\mathcal{M}or_S(X, S \times \mathbb{C}^r)$ mit $g(X_s) \subseteq W$. Durch den Morphismus $f = (f_1,\dots,f_n) : W \longrightarrow \mathbb{C}^n$ wird eine Abbildung $f_* : \mathcal{M}or_S(X, S \times W) \longrightarrow \mathcal{M}or_S(X, S \times \mathbb{C}^n) \cong B(L, \mathcal{B}_X^n)$ induziert, und es ist $\mathcal{M}or_S(X,Z)$ gerade $f_*^{-1}(\sigma)$, wenn σ den Nullschnitt in $B(L, \mathcal{B}_X^n)$ bezeichnet.

Wir betrachten in diesem Abschnitt von nun an die folgende Situation: Es sei Z_c wie oben, Y_c ein weiterer komplexer Raum, $g_c : Y_c \longrightarrow Z_c$ eine holomorphe Abbildung und $y_c \in Y_c$. Wir wollen annehmen, daß Y_c ein abgeschlossener Unterraum der offenen steinschen Teilmenge V des $\mathbb{C}^m$ ist, wobei V als Umgebung von y_c so klein gewählt ist, daß es eine holomorphe Abbildung $\tilde{g} : V \longrightarrow W$ mit $\tilde{g}|Y_c = g_c$ gibt. Es bezeichne $\mathcal{J}$ das Ideal von Y_c in $\mathcal{O}_V$, $\mathcal{J}_\Gamma$ das Ideal von $(1 \times g_c)(Y_c)$ in $\mathcal{O}_{V \times Z_c}$, $\mathcal{J}_{\Gamma_1}$ das Ideal von $(1 \times g_c)(Y_c)$ in $\mathcal{O}_{V \times \mathbb{C}^r}$ und $\mathcal{J}_{\Gamma_2}$ das von $Y_c \times 0$ in $\mathcal{O}_{V \times \mathbb{C}^n}$.

Man hat eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_V$-Moduln

$$\mathcal{O}_{Y_c}^n \xrightarrow{\ \beta\ } \mathcal{J}_{\Gamma_1}/\mathcal{J}_{\Gamma_1}^2 \longrightarrow \mathcal{J}_\Gamma/\mathcal{J}_\Gamma^2 \longrightarrow 0$$

wobei die Abbildung β durch

$$\beta(\alpha_1,\dots,\alpha_n) := \sum_\nu \alpha_\nu \bar{f}_\nu$$

gegeben ist (dabei bezeichne $\bar{\ }$ kurz die Restklassenabbildung). Wir wählen nun einen Polyzylinder $L = L_1 \times \dots \times L_m \subseteq \mathbb{C}^m$ mit $y_c \in \mathring{L}$, welcher die folgenden Eigenschaften hat.

(6.10) (1) L ist priviiegiert für $\mathcal{E}xt^{q}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_{Y_o},\mathcal{O}_{Y_o})$ für $q \geq 0$.

(2) L ist priviiegiert für den Kokern der Abbiidung
$$\beta^*: \mathcal{H}om(\mathcal{J}_{\Gamma_1}/\mathcal{J}^2_{\Gamma_1},\mathcal{O}_{Y_o}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{O}^n_{Y_o},\mathcal{O}_{Y_o})\cong\mathcal{O}^n_{Y_o}.$$

Wegen $\mathcal{J}_{\Gamma_1}/\mathcal{J}^2_{\Gamma_1}\cong \mathcal{J}/\mathcal{J}^2\oplus\mathcal{O}^n_{Y_o}$ und (1) ist dann L auoh für $\mathcal{H}om(\mathcal{J}_{\Gamma_1}/\mathcal{J}^2_{\Gamma_1},\mathcal{O}_{Y_o})$ priviiegiert. Aus (2) foigt daher, daß L für $\mathrm{Ker}(\beta^*)\cong\mathcal{H}om(\mathcal{J}_\Gamma/\mathcal{J}^2_\Gamma,\mathcal{O}_{Y_o})$ priviiegiert ist und $B(L,\beta^*)$ direkt ist, wobei sioh der Kern dieser Abbiidung mit $B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}_\Gamma/\mathcal{J}_\Gamma^2,\mathcal{O}_{Y_o}))$ identifiziert. Es soii gezeigt werden:

(6.11) Satz: Sei $\Upsilon_L\subseteq G(L)\times L$ der universeiie Unterraum und $Z:=G(L)\times Z_o$. Dann ist der Tangentiairaum von $\mathcal{M}or_{G(L)}(\Upsilon_L,Z)$ im Punkte (Y_o,g_o) isomorph zu
$$\mathrm{Ker}(B(L,\beta^*))\cong B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}_\Gamma/\mathcal{J}_\Gamma^2,\mathcal{O}_{Y_o}))$$
und daher insbesondere giatt.

Es ist $\mathcal{M}or_{G(L)}(\Upsilon_L,Z)$ das Urbiid des Nuiisohnittes unter der durch f induzierten Abbiidung
$$f_*: \mathcal{M}or_{G(L)}(\Upsilon_L, G(L)\times W)\longrightarrow \mathcal{M}or_{G(L)}(\Upsilon_L,G(L)\times\mathbb{C}^n)\cong B(L,\mathcal{B}^n_{\Upsilon_L}).$$
Wir woiien zunäohst zeigen:

(6.12) Lemma: $T_{(Y_o,g_o)}\mathcal{M}or_{G(L)}(\Upsilon_L,G(L)\times W)$ ist isomorph zu $B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}_{\Gamma_1}/\mathcal{J}^2_{\Gamma_1},\mathcal{O}_{Y_o}))$ und $T_{(Y_o,0)}\mathcal{M}or_{G(L)}(\Upsilon_L,G(L)\times\mathbb{C}^n)$ zu $B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}_{\Gamma_2}/\mathcal{J}^2_{\Gamma_2},\mathcal{O}_{Y_o}))$, wobei die Tangentiaiabbiidung $d_{(Y_o,g_o)}f_*$ duroh den Garbenhomomorphismus
$$\varrho_f: \mathcal{J}_{\Gamma_2}/\mathcal{J}^2_{\Gamma_2}\longrightarrow \mathcal{J}_{\Gamma_1}/\mathcal{J}^2_{\Gamma_1}$$
mit $\varrho_f(\overline{h})=\overline{h\circ(1\times f)}$ induziert wird.

Beweis: Weii
$$\mathcal{M}or_{G(L)}(\Upsilon_L,G(L)\times\mathbb{C}^r)\cong B(L,\mathcal{B}^r_{\Upsilon_L})$$
ein iokal triviaies Banachraumbündei über $G(L)$ ist, hat man eine exakte Sequenz
$$0\longrightarrow B(L,\mathcal{O}_{Y_o})^r\longrightarrow T_{(Y_o,g_o)}\mathcal{M}or_{G(L)}(\Upsilon_L,G(L)\times\mathbb{C}^r)\longrightarrow T_{Y_o}G(L)\longrightarrow 0.$$

Durch die Abbiidung $\tilde g: V\longrightarrow W$ wird ein Schnitt
$$\tilde g_*: G(L)\longrightarrow \mathcal{M}or_{G(L)}(\Upsilon_L, G(L)\times\mathbb{C}^r)$$
$$Y\longmapsto (Y,\tilde g|Y)$$
über $G(L)$ definiert mit $\tilde g_*(Y_o)=(Y_o,g_o)$. Mit Hiife dieses Sohnittes erhält man ein Aufspaiten der obigen Sequenz, also eine Darsteiiung
$$T_{(Y_o,g_o)}\mathcal{M}or_{G(L)}(\Upsilon_L,G(L)\times\mathbb{C}^r)\cong T_{Y_o}G(L)\oplus B(L,\mathcal{O}^r_{Y_o}).$$
Anaiog erhäit man mit Hiife des Nullsohnitts
$$G(L)\xrightarrow{\ \sigma\ }\mathcal{M}or_{G(L)}(\Upsilon_L,G(L)\times\mathbb{C}^n)\cong B(L,\mathcal{B}^n_{\Upsilon_L})$$
ein Aufspalten
$$T_{(Y_o,\sigma)}\mathcal{M}or_{G(L)}(\Upsilon_L,G(L)\times\mathbb{C}^n)\cong T_{Y_o}G(L)\oplus B(L,\mathcal{O}^n_{Y_o})$$
Insgesamt ergibt sioh somit:
$$T_{(Y_o,g_o)}\mathcal{M}or_{G(L)}(\Upsilon_L,G(L)\times\mathbb{C}^r)\cong B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2,\mathcal{O}_{Y_o}))\oplus B(L,\mathcal{O}^r_{Y_o})$$
$$\cong B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2\oplus\mathcal{O}^r_{Y_o},\mathcal{O}_{Y_o}))$$
und analog
$$T_{(Y_o,\sigma)}\mathcal{M}or_{G(L)}(\Upsilon_L,G(L)\times\mathbb{C}^n)\cong B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2\oplus\mathcal{O}^n_{Y_o},\mathcal{O}_{Y_o})).$$
Mit der Identifikation
$$\mathcal{J}_{\Gamma_1}/\mathcal{J}^2_{\Gamma_1}\cong\mathcal{J}/\mathcal{J}^2\oplus\mathcal{O}^r_{Y_o},$$
weiche durch die Darsteiiung
$$\mathcal{J}_{\Gamma_1}=\mathcal{J}\mathcal{O}_{V\times\mathbb{C}^r}\ \sum_\varrho(\tilde g_\varrho - z_\varrho)\mathcal{O}_{V\times\mathbb{C}^r}$$
gegeben ist (dabei seien z_ϱ die Koordinatenfunktionen des $\mathbb{C}^r$), anaiog für
$$\mathcal{J}_{\Gamma_2}/\mathcal{J}^2_{\Gamma_2}\cong\mathcal{J}/\mathcal{J}^2\oplus\mathcal{O}^n_{Y_o},$$
erhaiten wir
$$T_{(Y_o,g_o)}\mathcal{M}or_{G(L)}(\Upsilon_L,G(L)\times\mathbb{C}^r)\cong B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}_{\Gamma_1}/\mathcal{J}^2_{\Gamma_1},\mathcal{O}_{Y_o}))$$
und
$$T_{(Y_o,0)}\mathcal{M}or_{G(L)}(\Upsilon_L,G(L)\times\mathbb{C}^n)\cong B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}_{\Gamma_2}/\mathcal{J}^2_{\Gamma_2},\mathcal{O}_{Y_o})).$$

Berechnen wir nun $d_{(Y_c,g_c)}f_*$. Da f_* mit den Projektionen nach $\mathcal{G}(L)$ verträglich ist, kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2,\mathcal{O}_{Y_c}))\oplus B(L,\mathcal{O}^r_{Y_c}) \arrow[rr, "df_x"] \arrow[dr] & & B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2,\mathcal{O}_{Y_c}))\oplus B(L,\mathcal{O}^n_{Y_c}) \arrow[dl] \\ & B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2,\mathcal{O}_{Y_c})) & \end{tikzcd}$$

wobei die beiden unteren Pfeile die Projektionen sind. Als nächstes betrachten wir die Einschränkung der Tangentialabbildung auf $0\times B(L,\mathcal{O}^r_{Y_c})$. Es ist $0\times B(L,\mathcal{O}^r_{Y_c})$ der Tangentialraum des Unterraums $\mathfrak{Mor}(Y_c\cap L,\mathbb{C}^r)$ von $\mathfrak{Mor}_{\mathcal{G}(L)}(\Upsilon_L,\mathcal{G}(L)\times\mathbb{C}^r)$, und f_* induziert durch Beschränkung einen Morphismus

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Mor}(Y_c\cap L,W) \arrow[r] & \mathfrak{Mor}(Y_c\cap L,\mathbb{C}^n) \\ B(L,\mathcal{O}^r_{Y_c}) \arrow[u, phantom, "\cap"] & B(L,\mathcal{O}^n_{Y_c}) \arrow[u, phantom, "\|"] \end{tikzcd}$$

welcher die Gestalt

$$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\longmapsto(f_1\circ\alpha,\dots,f_n\circ\alpha)$$

hat. Daher ist die Einschränkung der Tangentialabbildung

$$0\times B(L,\mathcal{O}^r_{Y_c})\longrightarrow B(L,\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2,\mathcal{O}_{Y_c}))\oplus B(L,\mathcal{O}^n_{Y_c})$$

auf den ersten Faktor die Nullabbildung und auf den zweiten Faktor der durch die Funktionalmatrix $\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial Z_\varrho}\circ g_c\right)_{\nu,\varrho}$ gegebene Homomorphismus.

Berechnen wir nun noch die Einschränkung von $d_{(Y_c,g_c)}f_*$ auf $B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2,\mathcal{O}_{Y_c}))\times 0$. Wir haben dazu offenbar die Tangentialabbildung der Komposition der Morphismen

$$\mathcal{G}(L)\xrightarrow{\tilde g_*}\mathfrak{Mor}_{\mathcal{G}(L)}(\Upsilon_L,\mathcal{G}(L)\times W)\xrightarrow{f_*}\mathfrak{Mor}_{\mathcal{G}(L)}(\Upsilon_L,\mathcal{G}(L)\times\mathbb{C}^n)$$

auszurechnen, welche sich auch als Hintereinanderschaltung des Schnittes

$$\mathcal{G}(L)\xrightarrow{(1,f_1\circ\tilde g,\dots,f_n\circ\tilde g)}\mathcal{G}(L)\times B(L)^n$$

und der Projektion

$$p:\mathcal{G}(L)\times B(L)^n\longrightarrow B(L,\mathcal{B}^n_{\Upsilon_L})\cong\mathfrak{Mor}_{\mathcal{G}(L)}(\Upsilon_L,\mathcal{G}(L)\times\mathbb{C}^n)$$

beschreiben läßt. Die zugehörige Tangentialabbildung

$$B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2,\mathcal{O}_{Y_c}))\longrightarrow B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2,\mathcal{O}_{Y_c}))\oplus B(L,\mathcal{O}^n_{Y_c})$$

hat daher die Gestalt

$$\varphi\longmapsto(\varphi,-\varphi(f_1\circ g_c),\dots,-\varphi(f_n\circ g_c)),$$

vgl. das nachfolgende Lemma (6.13). Insgesamt sehen wir somit, daß die Tangentialabbildung von f_* durch den Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2\oplus\mathcal{O}^r_{Y_c},\mathcal{O}_{Y_c})\to\mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2\oplus\mathcal{O}^n_{Y_c},\mathcal{O}_{Y_c})$$

induziert wird, der dual ist zur Abbildung

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2\oplus\mathcal{O}^n_{Y_c}\longrightarrow\mathcal{J}/\mathcal{J}^2\oplus\mathcal{O}^r_{Y_c}$$

mit $(\alpha,\gamma_1,\dots,\gamma_n)\longmapsto\left(\alpha-\sum_\nu\gamma_\nu f_\nu\circ g_c,\left(\sum_\nu\gamma_\nu\frac{\partial f_\nu}{\partial Z_\varrho}\circ g_c\right)_\varrho\right)$.

Mit den Identifikationen

$$\mathcal{J}_{\Gamma_1}/\mathcal{J}^2_{\Gamma_1}\cong\mathcal{J}/\mathcal{J}^2\oplus\mathcal{O}^r_{Y_c},\quad\mathcal{J}_{\Gamma_2}/\mathcal{J}^2_{\Gamma_2}\cong\mathcal{J}/\mathcal{J}^2\oplus\mathcal{O}^n_{Y_c}$$

ist dies aber gerade die Abbildung ϱ_f, wie die Taylorentwicklung

$$-f_\nu=-f_\nu\circ\tilde g(x)+\sum_\varrho\frac{\partial f_\nu}{\partial Z_\varrho}\circ\tilde g(x)\cdot(\tilde g_\varrho(x)-Z_\varrho)+\dots$$

für $x\in V$ zeigt.-

Beweis von (6.11): Wegen $\mathfrak{Mor}_{\mathcal{G}(L)}(\Upsilon_L,Z)=f_*^{-1}(0)$ ist $T_{(Y_c,g)}\mathfrak{Mor}_{\mathcal{G}(L)}(\Upsilon_L,Z)$ das Urbild von

$$B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2,\mathcal{O}_{Y_c}))\subseteq T_{(Y_c,0)}\mathfrak{Mor}_{\mathcal{G}(L)}(\Upsilon_L,\mathcal{G}(L)\times\mathbb{C}^n)$$

unter $d_{(Y_c,g_c)}f_*$ oder, was gleichbedeutend ist, das Urbild der Null unter der Abbildung

$$q_2\circ d_{(Y_c,g_c)}f_*:B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}_{\Gamma_1}/\mathcal{J}^2_{\Gamma_1},\mathcal{O}_{Y_c}))\longrightarrow B(L,\mathcal{O}^n_{Y_c}),$$

wenn q_2 die Projektion von

$$T_{(Y_c,0)}\mathfrak{Mor}_{\mathcal{G}(L)}(\Upsilon_L,\mathcal{G}(L)\times\mathbb{C}^n)\cong B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2,\mathcal{O}_{Y_c}))\oplus\mathcal{O}^n_{Y_c})$$

auf den zweiten Faktor bezeichnet. Aus der obigen Beschreibung der Tangentialabbildung folgt aber, daß $q_2\circ d_{(Y_c,g_c)}f_*$ durch den Garbenhomomorphismus

$$-\beta^*:\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{J}_{\Gamma_1}/\mathcal{J}^2_{\Gamma_1},\mathcal{O}_{Y_0})\longrightarrow\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}^n_{Y_0},\mathcal{O}_{Y_c})$$

induziert wird. Daher ergibt sich die Behauptung aus der Voraussetzung (6.10)(2).-

Wir haben nun noch einen Hilfssatz nachzutragen. Dabei betrachten wir die folgende Situation. Sei A eine Banachalgebra,

$$A^r \xrightarrow{f} A^n \xrightarrow{g} E \xrightarrow{q} F \longrightarrow 0$$

eine direkt exakte Sequenz von A-Banachmoduln und $G:=\mathrm{Ker}(q)$. Wir wollen voraussetzen, daß der Homomorphismus $\mathrm{Hom}_A(f,F)$ direkt ist, so daß der Tangentialraum von $\mathfrak{G}_A(E)$ im Punkt F isomorph zu $\mathrm{Hom}_A(G,F)$ ist. Mit $B(\mathfrak{G}_A(E))$ wollen wir kurz den "universellen" Quotienten von $\mathfrak{G}_A(E)\times E$ und mit $p: \mathfrak{G}_A(E)\times E \longrightarrow B(\mathfrak{G}_A(E))$ die kanonische Projektion bezeichnen. Der Tangentialraum von $B(\mathfrak{G}_A(E))$ im Punkte $(F,0)$ ist isomorph zu $T_F(\mathfrak{G}_A(E))\times F$, wobei wir die durch den Nullschnitt induzierte Zerspaltung des Tangentialraums wählen. Wir haben zu zeigen:

<u>(6.13) Lemma</u>: Sei $\tau \in G$. Dann hat die Tangentialabbildung von p im Punkt (F,τ)

$$d_{(F,\tau)}p: \mathrm{Hom}_A(G,F)\times E \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(G,F)\times F$$

die Gestalt:

$$d_{(F,\tau)}p(\varphi,e) = (\varphi, q(e)-\varphi(\tau)) .$$

<u>Beweis:</u> Es sei $\tau_* : \mathfrak{G}_A(E) \longrightarrow B(\mathfrak{G}_A(E))$ die Abbildung $\tau_*(Y):=p(Y,\tau)$. Es reicht zu zeigen, daß die Tangentialabbildung von τ_* in F die Gestalt $d_F\tau_*(\varphi)=(\varphi,-\varphi(\tau))$ hat.

Sei zur Abkürzung $\sigma_A := \sigma_A(A^r,A^n,E)$ und $B\sigma_A := \pi^*(B(\mathfrak{G}_A(E)))$, wenn π die Projektion von σ_A auf $\mathfrak{G}_A(E)$ ist. Wir haben analog wie oben einen Schnitt $\tilde\tau_* : \sigma_A \longrightarrow B\sigma_A$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \sigma_A \arrow[r, "\tilde\tau_*"] \arrow[d] & B\sigma_A \arrow[d] \\ \mathfrak{G}_A(E) \arrow[r, "\tau_*"] & B(\mathfrak{G}_A(E)) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Der Tangentialraum von σ_A liegt in $\mathrm{Hom}_A(A^r,A^n)\times \mathrm{Hom}_A(A^n,E)$ (vgl. (6.7)), und wir wollen zeigen, daß die Tangentialabbildung

$$d_{(f,g)}\tilde\tau_* : T_{(f,g)}\sigma_A \longrightarrow T_{((f,g),0)}B\sigma_A \cong T_{(f,g)}\sigma_A\times F$$

die Gestalt $(u,v)\longmapsto((u,v),-qv(t))$ hat, wenn t ein Element in A^n ist mit $g(t)=\tau$. Hieraus und aus der Beschreibung der Tangentialabbildung $d_{(f,g)}\pi$ in (6.7) folgt dann offenbar die Aussage

des Lemmas.

Zum Nachweis der obigen Behauptung betrachten wir die "universelle" Sequenz von Banachraumbündeln

$$\sigma_A\times A^r \xrightarrow{P} \sigma_A\times A^n \xrightarrow{Q} \sigma_A\times E \xrightarrow{\tilde p} B\sigma_A \longrightarrow 0$$

welche direkt exakt ist. Dabei ist $P((u,v),x)=((u,v),u(x))$ und $Q((u,v),y)=((u,v),v(y))$. Es bezeichne $t_*:\sigma_A\to\sigma_A\times E$ den Homomorphismus $t_*((u,v)):=((u,v),v(t))$. Offenbar ist

$$d_{(f,g)}t_*(u,v) = ((u,v),v(t))$$

und

$$d_{(f,g)}(\tilde p\circ t_*)(u,v) = ((u,v),0),$$

weil $\tilde p\circ t_*$ der Nullschnitt ist. Folglich gilt:

$$\begin{aligned} d_{(f,g)}\tilde\tau_*(u,v) &= d_{(f,g)}\tilde p((u,v),0) \\ &= d_{(f,g)}\tilde p((u,v),v(t)) - d_{(f,g)}\tilde p((0,0),v(t)) \\ &= ((u,v),0) - ((0,0),qv(t)) \\ &= ((u,v),-qv(t)), \end{aligned}$$ w.z.b.w.

Zum Abschluß dieses Teiles wollen wir nun noch eine spezielle Tangentialabbildung ähnlich wie in (6.9) berechnen. Wir betrachten weiter den gegen Ende von C. eingeführten Unterraum Y von $W\times L$, wobei $W\subseteq B(L,V)$ eine Umgebung von id war. Man hat auf Y einen Morphismus $G_c: Y\to Z_c$ gegeben durch $G_c(\varphi,x)=g_c\varphi(x)$. Aufgrund der universellen Eigenschaft von $\mathfrak{G}(L)$ und $\mathfrak{Mor}(\cdots)$ definieren diese Daten einen Morphismus

$$\Phi : W \longrightarrow \mathfrak{Mor}_{\mathfrak{G}(L)}(\tau_L, Z) .$$

Es soll gezeigt werden:

<u>(6.14) Satz</u>: Die Tangentialabbildung

$$d_{id}\Phi : B(L)^m \longrightarrow B(L, \mathcal{H}om(\mathcal{J}_n/\mathcal{J}_n^2, \mathcal{O}_{Y_c}))$$

wird induziert durch den Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{O}_V^m \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{J}_n/\mathcal{J}_n^2, \mathcal{O}_{Y_c})$$

mit $(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\longmapsto(\bar x\longmapsto \sum_\mu \alpha_\mu \overline{\frac{\partial x}{\partial Y_\mu}})$

wenn $\bar{\ }$ die Restklassenabbildung bezeichnet und $Y_1,\cdots,Y_m$ die Koordinatenfunktionen des $\mathbb{C}^m$ sind.

<u>Beweis:</u> Es ist $\mathcal{M}or_{\mathfrak{G}(L)}(\Gamma_L, Z)$ ein lokal abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{M}or_{\mathfrak{G}(L)}(\Gamma_L, \mathfrak{G}(L) \times \mathbb{C}^r)$, und die Tangentialabbildung der Einbettung im Punkte (Y_o, g_o) wird induziert durch den kanonischen Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{H}om(\mathcal{J}_\Gamma/\mathcal{J}_\Gamma^2, \mathcal{O}_{Y_o}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{J}_{\Gamma_1}/\mathcal{J}_{\Gamma_1}^2, \mathcal{O}_{Y_o})$$

vgl. (6.11) und den Beweis von (6.11). Es reicht daher, die Aussage für den Fall $Z_o = \mathbb{C}^r$ zu zeigen. Sei $\tilde{g}: V \longrightarrow \mathbb{C}^r$ eine Fortsetzung von g_o. Offenbar faktorisiert sich Φ über den Morphismus $\tilde{\Phi}: W \longrightarrow \mathfrak{G}(L) \times B(L)^r$ mit $\tilde{\Phi}(\varphi) = (\Psi(\varphi), \tilde{g} \circ \varphi)$ (dabei sei $\Psi: W \longrightarrow \mathfrak{G}(L)$ die zu dem Unterraum Y von $W \times L$ gehörige Abbildung, vgl. (6.9)), d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "\tilde{\Phi}"] \arrow[dr, "\Phi"'] & & \mathfrak{G}(L) \times B(L)^r \arrow[dl, "p"] \\ & B(L, \mathcal{B}^r_{\Gamma_L}) & \end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Wählen wir daher die durch den Schnitt $\tilde{g}_*: \mathfrak{G}(L) \longrightarrow B(L, \mathcal{B}^r_{\Gamma_L})$, $\tilde{g}_*(X) = (X, \tilde{g}|X)$, definierte Zerspaltung von

$$T_{(Y_o, g_o)}(B(L, \mathcal{B}^r_{\Gamma_L})) \cong T_{Y_o}\mathfrak{G}(L) \oplus B(L, \mathcal{O}^r_{Y_o})$$

so hat die Tangentialabbildung von Φ die folgende Form:

$$\begin{aligned} d_{id}\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_m) &= d_{(Y_o, \tilde{g})} p \circ d_{id}\tilde{\Phi}(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \\ &= d_{\dots} p(d\Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_m), \sum_\mu \alpha_\mu \frac{\partial \tilde{g}}{\partial Y_\mu}) \\ &= (d\Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_m), \sum_\mu \alpha_\mu \overline{\frac{\partial \tilde{g}}{\partial Y_\mu}}). \end{aligned}$$

Mit der Identifikation

$$T_{Y_o}(B(L, \mathcal{B}^r_{\Gamma_L})) \cong B(L, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{J}_{\Gamma_1}/\mathcal{J}^2_{\Gamma_1}, \mathcal{O}_{Y_o}))$$

wie im Beweis zu (6.11) erhalten wir hieraus und aus (6.9) leicht, daß $d_{id}\Phi$ die behauptete Gestalt hat.-

<u>§7 Beweis des Hauptsatzes</u>

<u>A. Ein Hilfssatz über das Ausdehnen infinitesimaler Deformationen</u>

Es seien in diesem Abschnitt stets die Voraussetzungen von (5.1) erfüllt. Aus (5.1) (1) und der exakten Sequenz zu Beginn von §5 folgt, daß $\mathcal{T}^1(X_o/Y_o, \mathcal{O}_{X_o})_{x_o}$ ein endlicher $\mathcal{O}_{Y_o, y_o}$-Modul ist. Die Randhomomorphismen in jener Sequenz induzieren Homomorphismen

$$\delta^i: \mathcal{T}^i(Y_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o}) \longrightarrow f_{o*}(\mathcal{T}^{i+1}(X_o/Y_o, \mathcal{O}_{X_o}))$$

Nach Verkleinern von X_o bzw. Y_o als Umgebungen von x_o bzw. y_o kann man offenbar die folgende Situation erreichen.

<u>(7.1)</u>: (1) X_o und Y_o sind steinsch.

(2) Die Träger der Garben $\mathcal{T}^i(X_o/Y_o, \mathcal{O}_{X_o})$ liegen für $i = 1, 2$ endlich über Y_o, und es gilt:

$$Tr(\mathcal{T}^i(X_o/Y_o, \mathcal{O}_{X_o})) \cap f_o^{-1}(y_o) = \{x_o\}.$$

(3) Der Kokern der Abbildung δ^0 sowie der Kern der Abbildung δ^1 sind auf y_o konzentriert.

(4) Y_o ist eine privilegierte Umgebung von y_o bezüglich der Garben Koker(δ^1) und $\mathcal{T}^2(Y_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o})$, d.h. die kanonischen Abbildungen

$$\Gamma(Y_o, \mathrm{Koker}(\delta^1)) \longrightarrow \mathrm{Koker}(\delta^1)_{y_o}$$

$$\Gamma(Y_o, \mathcal{T}^2(Y_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o})) \longrightarrow \mathcal{T}^2(Y_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o})_{y_o}$$

sind injektiv.

Daß man (4) erreichen kann, zeigt etwa [4], Anhang. Wir wollen in diesem Abschnitt stets annehmen, daß die in (7.1) beschriebene Situation gegeben ist. Dann gilt:

<u>(7.2) Satz:</u> Es sei a eine Deformation des zu f_o/Z_o gehörigen Abbildungskeims über dem Raumkeim (S, s_o), wobei $\mathcal{O}_{S, s_o}$ artinsch ist. Dann gibt es eine Deformation α der holomorphen Abbildung f_o/Z_o über (S, s_o), welche a induziert.

Wir benötigen beim Beweis den folgenden Hilfssatz:

(7.3) Lemma: Die kanonischen Abbildungen

$$\rho_i : T^i(f_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o}) \longrightarrow \mathcal{T}^i(f_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o})_{x_o}$$

sind bijektiv für i=1 und injektiv für i=2.

Beweis: Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
T^0(Y_o/Z_o,\mathcal{O}_{Y_o}) \arrow[r, "d^0"] \arrow[d] & T^1(X_o/Y_o,\mathcal{O}_{X_o}) \arrow[r] \arrow[d] & T^1(f_o/Z_o,\mathcal{O}_{Y_o}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_1"'] & T^1(Y_o/Z_o,\mathcal{O}_{Y_o}) \arrow[r, "d^1"] \arrow[d] & T^2(X_o/Y_o,\mathcal{O}_{X_o}) \arrow[d] \\
\mathcal{T}^0(Y_o/Z_o,\mathcal{O}_{Y_o})_{y_o} \arrow[r, "\delta^0_{Y_o}"] & \mathcal{T}^1(X_o/Y_o,\mathcal{O}_{X_o})_{x_o} \arrow[r] & \mathcal{T}^1(f_o/Z_o,\mathcal{O}_{Y_o})_{x_o} \arrow[r] & \mathcal{T}^1(Y_o/Z_o,\mathcal{O}_{Y_o})_{y_o} \arrow[r, "\delta^1_{Y_o}"] & \mathcal{T}^2(X_o/Y_o,\mathcal{O}_{X_o})_{x_o}
\end{tikzcd}$$

welches exakte Zeilen hat. Aus (7.1) (1),(2) folgt:

$$T^i(X_o/Y_o,\mathcal{O}_{X_o}) = \Gamma(X_o, \mathcal{T}^i(X_o/Y_o, \mathcal{O}_{X_o}))$$
$$= \Gamma(Y_o, f_{o*}(\mathcal{T}^i(X_o/Y_o, \mathcal{O}_{X_o})))$$

für i=1,2 und

$$T^i(Y_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o}) = \Gamma(Y_o, \mathcal{T}^i(Y_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o}))$$

für alle i. Daher ist $\mathrm{Koker}(d^0) = \Gamma(Y_o, \mathrm{Koker}(\delta^0))$ und $\mathrm{Ker}(d^1) = \Gamma(Y_o, \mathrm{Ker}(\delta^1))$. Wir erhalten somit ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma(Y_o,\mathrm{Koker}(\delta^0)) \arrow[r] \arrow[d] & T^1(f_o/Z_o,\mathcal{O}_{Y_o}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_1"'] & \Gamma(Y_o,\mathrm{Ker}(\delta^1)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Koker}(\delta^0)_{y_o} \arrow[r] & \mathcal{T}^1(f_o/Z_o,\mathcal{O}_{Y_o})_{y_o} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\delta^1)_{y_o} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen, in welchem die beiden äußeren Pfeile wegen (7.1) (3) bijektiv sind. Es folgt, daß auch ρ_1 bijektiv ist. Die Injektivität von ρ_2 zeigt man analog.-

Beweis zu (7.2): Die Deformationen von f_o/Z_o wollen wir kurz mit griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \ldots$ und die Deformationen des Abbildungskeimes mit a,b,... bezeichnen. Es sei $p(\alpha)$ die durch α induzierte Deformation des Abbildungskeimes. Mit einem einfachen Induktionsargument sieht man, daß es reicht, die folgende Aussage nachzuweisen: Sei (S,s_o) ein komplexer Raumkeim mit artinschem Halmring $\mathcal{O}_{S,s_o}$, (S',s_o) eine Erweiterung von

(S,s_o) durch $\varkappa(s_o)$ und α eine Deformation von f_o/Z_o. Läßt sich dann $a := p(\alpha)$ fortsetzen zu einer Deformation a' über (S',s_o), so gibt es eine Fortsetzung α' von α mit $p(\alpha') = a'$.

Zum Nachweis dieser Aussage betrachten wir die in §4A eingeführten Moduln $D_a(\varkappa(s_o))$, $\tilde{D}_a(\varkappa(s_o))$, $D_\alpha(\varkappa(s_o))$, $\tilde{D}_\alpha(\varkappa(s_o))$. Durch p werden Abbildungen

$$\tilde{h} : \tilde{D}_\alpha(\varkappa(s_o)) \longrightarrow \tilde{D}_a(\varkappa(s_o)) \quad \text{und} \quad h : D_\alpha(\varkappa(s_o)) \longrightarrow D_a(\varkappa(s_o))$$

induziert. Zu zeigen ist offenbar, daß $\tilde{h}$ surjektiv ist. Wir betrachten das kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
D_\alpha(\varkappa(s_o)) \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \tilde{D}_\alpha(\varkappa(s_o)) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{h}"'] & \mathcal{T}^1(S,\varkappa(s_o))_{s_o} \arrow[r] \arrow[d, "="'] & T^2(f_o/Z_o,\mathcal{O}_{Y_o}) \arrow[d, "\rho_2"'] \\
D_a(\varkappa(s_o)) \arrow[r] & \tilde{D}_a(\varkappa(s_o)) \arrow[r] & \mathcal{T}^1(S,\varkappa(s_o))_{s_o} \arrow[r] & \mathcal{T}^2(f_o/Z_o,\mathcal{O}_{Y_o})_{x_o}
\end{tikzcd}$$

dessen Zeilen exakt sind (vgl. §4D), da durch die Moduln $T^2(\ldots)$ bzw. $\mathcal{T}^2(\ldots)$ gerade die Obstruktionen für das Fortsetzen von Deformationen beschrieben werden ((3.21) und (3.22)). Ferner ist wegen (7.3) die Abbildung h bijektiv, da $D_\alpha(\varkappa(s_o))$ isomorph zu $T^1(f_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o})$ und $D_a(\varkappa(s_o))$ isomorph zu $\mathcal{T}^1(f_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o})_{x_o}$ ist. Weil außerdem ρ_2 injektiv ist, ergibt sich die Behauptung aus dem Fünferlemma.-

B. Fixierung der Situation

Es seien in diesem und den nächsten beiden Abschnitten stets die Voraussetzungen von (5.1) erfüllt. Wir wollen zusätzlich annehmen, daß X_o bzw. Y_o ein abgeschlossener analytischer Unterraum der offenen steinschen Menge $U \subset\subset \mathbb{C}^n$ bzw. $V \subset\subset \mathbb{C}^m$ ist, der sich in eine Umgebung von $\bar{U}$ bzw $\bar{V}$ fortsetzen läßt. Dabei seien X_o, Y_o als Umgebungen der Punkte x_o, y_o so gewählt, daß die Voraussetzungen (7.1) vorliegen. Es bezeichne $g_o : Y_o \longrightarrow Z_o$ den Strukturhomomorphismus und

$\mathcal{J}$: das Ideal von $(1 \times f_o)(X_o)$ in $\mathcal{O}_{U \times V}$

$\mathcal{I}$: das Ideal von Y_o in $\mathcal{O}_V$

$\mathcal{I}_r$: das Ideal von $(1 \times g_o)(Y_o)$ in $\mathcal{O}_{V \times Z_o}$

X betrachten

wählen nun Polyzylinder $K \subseteq U$ und $L \subseteq V$ mit $x_o \in \mathring{K}$ und $y_o \in \mathring{L}$ derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

<u>(7.4)</u> (1) Die Voraussetzungen (6.10) treffen zu.

(2) $Tr(\mathcal{T}^i(X_o/Y_o, \mathcal{O}_{X_o})) \cap (U\times L) \subseteq \mathring{K}\times L$ für $i=1,2$

(3) $K\times L$ ist privilegiert für

(α) $\mathcal{E}xt^{\,q}_{\mathcal{O}_{U\times V}}(\mathcal{O}_{X_o}, \mathcal{O}_{X_o})$ für alle q.

(β) $\mathcal{T}^1(X_o/Y_o, \mathcal{O}_{X_o})$

(γ) $f_o^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ und $\mathcal{E}xt^{\,q}_{\mathcal{O}_{U\times V}}(f_o^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2), \mathcal{O}_{X_o})$ für alle q

(δ) $\mathcal{L} :=$Koker$(\mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2, \mathcal{O}_{X_o}) \longrightarrow \mathcal{H}om(f_o^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2), \mathcal{O}_{X_o}))$

(4) L ist privilegiert für $\mathcal{T}^0(Y_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o})$ und $\mathcal{T}^1(Y_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o})$

Um die nächste Bedingung zu formulieren, betrachten wir das Diagramm

(7.4.1):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2, \mathcal{O}_{X_o}) \arrow[r] \arrow[d, "-\vartheta_1"'] & \mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2, \mathcal{O}_{X_o}) \oplus f_o^{-1}(\mathcal{H}om(\mathcal{I}_\Gamma/\mathcal{I}_\Gamma^2, \mathcal{O}_{Y_o})) \arrow[r] \arrow[d, "\vartheta := -\vartheta_1 + \vartheta_2"] & f_o^{-1}\mathcal{H}om(\mathcal{I}_\Gamma/\mathcal{I}_\Gamma^2, \mathcal{O}_{Y_o}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H}om(f_o^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2), \mathcal{O}_{X_o}) \arrow[r, "="] & \mathcal{H}om(f_o^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2), \mathcal{O}_{X_o}) \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

wobei ϑ_1 und ϑ_2 durch die kanonischen Abbildungen $f_o^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ und $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \mathcal{I}_\Gamma/\mathcal{I}_\Gamma^2$ induziert sind. Der Modul $\mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2, \mathcal{O}_{X_o})$ ist isomorph zu $\mathcal{T}^1(X_o/U\times V, \mathcal{O}_{X_o})$ und $\mathcal{H}om(f_o^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2), \mathcal{O}_{X_o})$ zu $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{X_o}}(\mathcal{O}_{X_o} \otimes_{\mathcal{O}_{U\times Y_o}} \mathbb{L}^\bullet_{U\times Y_o/U\times V}, \mathcal{O}_{X_o})$, wie man leicht sieht. Der Kokern von ϑ_1, also der Modul $\mathcal{L}$ aus (3)(δ), ist daher ein Untermodul von $\mathcal{T}^2(X_o/U\times Y_o, \mathcal{O}_{X_o})$, und dieser Modul identifiziert sich mit $\mathcal{T}^2(X_o/Y_o, \mathcal{O}_{X_o})$, weil $U\times Y_o \longrightarrow Y_o$ glatt ist. Somit liegt auch $Tr(\mathcal{L})$ endlich über Y_o, und es ist

$$Tr(\mathcal{L}) \cap U\times L \subseteq \mathring{K}\times L,$$

weil dies für $\mathcal{T}^2(X_o/Y_o, \mathcal{O}_{X_o})$ gilt. insbesondere ist L privilegiert für $f_{o*}(\mathcal{L})$, vgl. (6.5). Aus ϑ_2 erhalten wir einen Homomorphismus

$$\overline{\vartheta}_2 : \mathcal{H}om(\mathcal{I}_\Gamma/\mathcal{I}_\Gamma^2, \mathcal{O}_{Y_o}) \longrightarrow f_{o*}(\mathcal{L}).$$

Wir benötigen noch die folgende Bedingung:

<u>(7.4)</u> (5) L ist privilegiert für den Kokern von $\overline{\vartheta}_2$.

Aus dem Satz über die Existenz privilegierter Umgebungen, vgl. [5], §7 thm.1 und Remarque, erhält man sofort die folgende Aussage:.

<u>(7.5) Lemma</u>: Die Polyzylinder K,L, welche die Bedingungen (7.4),(1)-(5) erfüllen, bilden eine Umgebungsbasis von x_o, y_o.–

<u>C. Der Raum $\mathcal{G}_{\mathfrak{m}}(\Upsilon_{\mathfrak{m}}\times K)$</u>

Wir betrachten in diesem Abschnitt stets die in B. beschriebene Situation.

Es sei $G_{K,L}$ der folgende Funktor von der Kategorie der banachanalytischen Räume in die Kategorie der Mengen. Für einen banachanalytischen Raum S besteht ein Element von $G_{K,L}(S)$ aus

1^o einem über S anaplatten Unterraum Y von $S\times L$

2^o einem S-Morphismus $Y \xrightarrow{g} S\times Z_o$

3^o einem über S anaplatten Unterraum X von $Y\times K$.

Bezeichnen wir dann den Raum $\mathfrak{Mor}_{\mathcal{G}(L)}(\Upsilon_L, \mathcal{G}(L)\times Z_o)$ kurz mit $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}\times_{\mathcal{G}(L)}\Upsilon_L$ kurz mit $\Upsilon_{\mathfrak{m}}$, so gilt offenbar:

<u>(7.6) Satz</u>: Der Funktor $G_{K,L}$ wird dargestellt durch den banachanalytischen Raum $\mathcal{G}_{\mathfrak{m}}(\Upsilon_{\mathfrak{m}}\times K)$.–

Anders ausgedrückt bedeutet das: Es gibt ein Element $\mathcal{B}_{K,L}$ in $G_{K,L}(\mathcal{G}_{\mathfrak{m}}(\Upsilon_{\mathfrak{m}}\times K))$ derart, daß für jeden banachanalytischen Raum S und jedes Element b in $G_{K,L}(S)$ genau ein Morphismus $\Psi_b : S \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathfrak{m}}(\Upsilon_{\mathfrak{m}}\times K)$ existiert mit $\Psi_b^*(\mathcal{B}_{K,L}) = b$. Die Punkte von $\mathcal{G}_{\mathfrak{m}}(\Upsilon_{\mathfrak{m}}\times K)$ sind Tupel (X,Y,g), wobei Y ein privilegierter Unterraum von L, X ein privilegierter Unterraum von $Y\times K$ und $g: Y \longrightarrow Z_o$ ein Morphismus ist. Für den Punkt $(X_o \cap (K\times L), Y_o \cap L, g_o|Y_o\cap L)$ schreiben wir auch einfach b_o.

Der Raum $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}(\Upsilon_{\mathfrak{M}}\times K)$ wird im nächsten Abschnitt das entscheidende Hilfsmittel sein, um die gesuchte verselle Deformation zu konstruieren. Wir wollen in diesem Abschnitt zunächst den Tangentialraum von $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}(\Upsilon_{\mathfrak{M}}\times K)$ im Punkt b_c untersuchen.

Sei zur Abkürzung

$$E_1 := B(K\times L, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{U\times V}}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2, \mathcal{O}_{X_c}))$$
$$E_2 := B(L, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{J}_\Gamma/\mathcal{J}_\Gamma^2, \mathcal{O}_{Y_c}))$$
$$F := B(K\times L, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{U\times V}}(f_c^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2), \mathcal{O}_{X_c})).$$

Aus dem Diagramm (7.4.1)

$$\text{(D1)}\quad \begin{tikzcd}[column sep=small] 0 \arrow[r] & \mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2,\mathcal{O}_{X_0}) \arrow[r] \arrow[d, "-\vartheta_1"] & \mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2,\mathcal{O}_{X_0})\times f_0^{-1}\mathcal{H}om(\mathcal{J}_\Gamma/\mathcal{J}_\Gamma^2,\mathcal{O}_{Y_0}) \arrow[r] \arrow[d, "\vartheta=-\vartheta_1+\vartheta_2"] & f_0^{-1}\mathcal{H}om(\mathcal{J}_\Gamma/\mathcal{J}_\Gamma^2,\mathcal{O}_{Y_0}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{H}om(f_0^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2),\mathcal{O}_{X_0}) \arrow[r] & \mathcal{H}om(f_0^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2),\mathcal{O}_{X_0}) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

erhalten wir ein Diagramm

$$\text{(D2)}\quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] \arrow[d, "-\theta_1"] & E_1\times E_2 \arrow[r] \arrow[d, "\theta=-\theta_1+\theta_2"] & E_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F \arrow[r] & F \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Wir wollen zeigen:

<u>(7.7) Satz</u>: (1) Der Tangentialraum von $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}(\Upsilon_{\mathfrak{M}}\times K)$ im Punkt b_c ist isomorph zu $\Theta^{-1}(0)$.

(2) Θ ist direkt. Insbesondere ist daher $\Theta^{-1}(0)$ glatt.

<u>Beweis:</u> Sei

$$\mathcal{L}_\cdot : \cdots \longrightarrow B(L)^e \xrightarrow{d_0} B(L)$$

eine endliche Auflösung von $B(L, \mathcal{O}_{Y_c})$, wobei die Abbildung d_c durch die Matrix $h=(h_1,\dots,h_e)\in B(L)^s$ gegeben ist, welche sich in eine Umgebung von L holomorph fortsetzen läßt. Weil die Abbildung

$$\sigma_{B(L)}(\cdots, B(L)^e, B(L)) \longrightarrow \mathcal{G}(L)$$

glatt ist, gibt es in einer Umgebung $\mathcal{G}$ von Y_c in $\mathcal{G}(L)$ eine Auflösung

$$\tilde{\mathcal{L}}_\cdot : \cdots \longrightarrow \mathcal{G}\times B(L)^e \xrightarrow{\tilde d_0} \mathcal{G}\times B(L)$$

von $B(L, \mathcal{B}_{\Upsilon_L})|\mathcal{G}$, welche im Punkte Y_c gerade die Auflösung $\mathcal{L}_\cdot$ induziert. Die Abbildung $\tilde d_c$ möge dabei durch die Matrix von Funktionen $\tilde h=(\tilde h_1,\dots,\tilde h_e): \mathcal{G}\longrightarrow B(L)^e$ gegeben sein. Es bezeichne $\pi:\mathfrak{M}\longrightarrow\mathcal{G}(L)$ die Projektion und $\mathfrak{M}_0$ die offene Teilmenge $\pi^{-1}(\mathcal{G})$ von $\mathfrak{M}$. Aus $\tilde h$ erhalten wir einen Morphismus

$$\tilde h_*: \mathcal{G}(K\times L)\times\mathfrak{M}_c \longrightarrow B(K\times L, \mathcal{B}^e_{\Upsilon_{K\times L}})$$

derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(K\times L)\times\mathfrak{M}_c \arrow[rr, "\tilde h_*"] \arrow[d] & & B(K\times L, \mathcal{B}^e_{\Upsilon_{K\times L}}) \\ \mathcal{G}(K\times L)\times\mathcal{G} \arrow[r, "1\times\tilde h"] & \mathcal{G}(K\times L)\times B(L)^e \arrow[r] & \mathcal{G}(K\times L)\times B(K\times L)^e \arrow[u, "p"] \end{tikzcd}$$

kommutiert, und aus der Konstruktion von $\mathcal{G}_S(X)$ in §6A. folgt, daß $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}_0}(\Upsilon_{\mathfrak{M}_0}\times K)$ nichts anderes als $\tilde h_*^{-1}(\sigma)$ ist. Aufgrund der Ergebnisse von §6C.,D. ist der Tangentialraum von $\mathcal{G}(K\times L)\times\mathfrak{M}$ im Punkt $b_c=(X_c,(Y_c,g_c))$ isomorph zu $E_1\times E_2$ und der von $B(K\times L, \mathcal{B}^e_{\Upsilon_{K\times L}})$ im Punkt (X_c,σ) isomorph zu $E_1\times B(K\times L, \mathcal{O}^e_{X_c})$, wobei wir natürlich die durch den Nullschnitt induzierte Zerspaltung wählen. Wir wollen nun zunächst die Tangentialabbildung

$$d_{b_c}\tilde h_*: E_1\times E_2 \longrightarrow E_1\times B(K\times L, \mathcal{O}^e_{X_c})$$

berechnen. Weil $\tilde h_*$ ein $\mathcal{G}(K\times L)$-Morphismus ist, hat $d_{b_c}\tilde h_*$ die Form $d_{b_c}\tilde h_*(x,y)=(x,-\tilde h'(x)+\tilde h''(y))$. Wir behaupten:

<u>(7.8) Lemma</u>: Der Homomorphismus $\tilde h': E_1\longrightarrow B(K\times L, \mathcal{O}^e_{X_c})$ wird induziert durch die Garbenabbildung $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{U\times V}}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2, \mathcal{O}_{X_c})\longrightarrow\mathcal{O}^s_{X_c}$ mit $\varphi\longmapsto(\varphi(h_1),\dots,\varphi(h_s))$ und $\tilde h''$ durch $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{J}_\Gamma/\mathcal{J}_\Gamma^2, \mathcal{O}_{Y_c})\longrightarrow\mathcal{O}^s_{Y_c}$ mit $\varphi\longmapsto(\varphi(h_1),\dots,\varphi(h_s))$.

<u>Beweis</u>: Zunächst berechnen wir die Tangentialabbildung der Einschränkung von $\tilde h_*$ auf $\mathcal{G}(K\times L)\times(Y_c,g_c)$, welche nach Konstruktion nichts anderes als die Komposition

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(K\times L) &\longrightarrow \mathcal{G}(K\times L)\times B(K\times L)^e \xrightarrow{\;p\;} B(K\times L, \mathcal{B}^s_{\Upsilon_{K\times L}}) \\ Y &\longmapsto (Y,h_1,\dots,h_s) \end{aligned}$$

ist. Daß $\tilde h'$ die behauptete Gestalt hat, ergibt sich somit aus (6.13).

Berechnen wir nun die Tangentialabbildung der Einschränkung von $\tilde h_*$ auf $\{x_o\}\times \mathfrak{M}_c$. Diese Abbildung faktorisiert sich über den Unterraum $B(K\times L, \mathcal{O}^s_{X_c})$ von $B(K\times L, \mathcal{B}_{\mathcal{T}_{X\times L}})$, und man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\{x_o\}\times\mathfrak{M}_c \arrow[rr, "\tilde h_*|\dots"] \arrow[d, "\pi"] & & B(K\times L, \mathcal{O}^s_{X_c}) \\
G \arrow[r, "\tilde h"] & B(L)^s \arrow[r, "q"] & B(L, \mathcal{O}^s_{Y_c}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Daher reicht es zu zeigen, daß die Tangentialabbildung von $q\tilde h$ durch die Garbenabbildung

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2, \mathcal{O}_{Y_c}) \longrightarrow \mathcal{O}^s_{Y_c}$$

mit

$$\varphi \longmapsto (\varphi(h_1),\dots,\varphi(h_s))$$

induziert wird. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(Y_o{,}\tilde h)"] \arrow[d, "q\tilde h"'] & G\times B(L)^s \arrow[d, "p"] \\
B(L, \mathcal{O}^s_{Y_c}) \arrow[r, "(Y_o{,}\mathrm{id})"] & B(L, \mathcal{B}^s_{\mathcal{T}_L})
\end{tikzcd}$$

ergibt sich ein entsprechendes Diagramm für die Tangentialräume:

$$\begin{tikzcd}
B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2,\mathcal{O}_{Y_c})) \arrow[r, "(0{,}d_{Y_o}\tilde h)"] \arrow[d, "d_{Y_c}(q\tilde h)"'] & B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2,\mathcal{O}_{Y_c}))\oplus B(L)^s \arrow[d, "d_{(Y_c,h)}p"] \\
B(L,\mathcal{O}_{Y_c}^s) \arrow[r, "(0{,}\mathrm{id})"] & B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2,\mathcal{O}_{Y_c}))\oplus B(L,\mathcal{O}^s_{Y_c})
\end{tikzcd}$$

Weil $p\circ(1,\tilde h): G \longrightarrow B(L, \mathcal{B}^s_{\mathcal{T}_L})$ der Nullschnitt ist, gilt für $\varphi\in B(L, \mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2, \mathcal{O}_{Y_c}))$:

$$d_{(Y_c,h)}p(\varphi, d_{Y_c}\tilde h(\varphi)) = d_{Y_c}(p\circ(1,\tilde h))(\varphi) = (\varphi,0).$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
(d_{(Y_c,h)}p)\,(0,d_{Y_c}\tilde h)(\varphi) &= d_{\dots}p(0,d\tilde h(\varphi)) \\
&= dp(\varphi,d\tilde h(\varphi)) - dp(\varphi,0) \\
((6.13))\qquad &= (\varphi,0) - (\varphi,(-\varphi(h_1),\dots,-\varphi(h_s))) \\
&= (0,\ \varphi(h_1),\dots,\varphi(h_s)).
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Behauptung.-

Wir fahren nun im Beweis von (7.7) fort. Weil $G_{\mathfrak{M}_o}(\mathcal{T}_{\mathfrak{M}_c}\times K)$ das Urbild des Nullschnittes unter der Abbildung $\tilde h_*$ ist, berechnet sich der Tangentialraum im Punkt b_c als Urbild der 0 unter der Abbildung $-\tilde h'+\tilde h'': E_1\times E_2 \longrightarrow B(K\times L, \mathcal{O}^s_{X_o})$. Die Matrix $(h_1,\dots,h_s)$ definiert einen surjektiven Garbenhomomorphismus $\mathcal{O}^s_{U\times V}\longrightarrow f_c^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$ und dual dazu eine Abbildung $\psi: \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{U\times V}}(f_c^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2), \mathcal{O}_{X_c}) \longrightarrow \mathcal{O}^s_{X_c}$. Die zugehörige Abbildung $B(K\times L,\psi)$ ist wegen (7.4)(3)(γ) injektiv direkt (vgl. (6.3) und (6.4)), und das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
E_1\times E_2 \arrow[rr, "\Theta"] \arrow[dr, "-\tilde h'+\tilde h''"'] & & F \arrow[dl, "B(K\times L{,}\psi)"] \\
& B(K\times L, \mathcal{O}^s_{X_o}) &
\end{tikzcd}$$

ist offenbar kommutativ. Daher ist $(-\tilde h'+\tilde h'')^{-1}(0) = \Theta^{-1}(0)$ der Tangentialraum von $G_{\mathfrak{M}}(\mathcal{T}_{\mathfrak{M}}\times K)$ im Punkt b_c, womit (1) gezeigt ist.

Zum Nachweis von (2) betrachten wir die Diagramme (D1) und (D2) vor (7.7). Der Kokern der Abbildung $-\vartheta_1$ ist gerade der Modul $\mathcal{L}$, welcher endlich über Y_c liegt und für den $K\times L$ privilegiert ist, vgl. (7.4)(3)(δ). Daher ist $B(K\times L,-\vartheta_1) = -\Theta_1$ direkt. Wir zeigen nun noch, daß die Abbildung $\bar\Theta_2: E_2\longrightarrow F/E_1$ direkt ist. Es ist $F/E_1 \cong B(K\times L,\mathcal{L}) \cong B(L, f_{c*}(\mathcal{L}))$, und die Abbildung $\bar\Theta_2$ wird induziert durch den Garbenhomomorphismus

$$\bar\vartheta_2:\ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{J}_\Gamma/\mathcal{J}_\Gamma^2, \mathcal{O}_{Y_c}) \longrightarrow f_{c*}(\mathcal{L}).$$

Da L für den Kokern dieser Abbildung privilegiert ist ((7.4)(5)), erhalten wir, daß auch $\bar\Theta_2$ direkt ist. Mit (6.8) ergibt sich daraus, daß auch Θ direkt ist, w.z.b.w.

Wir wollen nun ähnlich wie zu Ende von §6 C.,D. noch eine spezielle Tangentialabbildung berechnen. Dabei übernehmen wir die Bezeichnungen von (6.14) und betrachten den aus Y_o konstruierten Unterraum Y von $W\times L$ sowie den dort definierten Morphismus $g: Y\longrightarrow Z_o$. Es sei $H: B(K\times L,U)\times B(L,V)\times K\times L \longrightarrow U\times V$ der Morphismus $H(\varphi_1,\varphi_2,x,y) := (\varphi_1(x,y),\varphi_2(y))$. Dann gibt es eine Umgebung W^* von id in $B(K\times L,U)\times B(L,V)$ derart, daß $X^* := H^*(X_o)|W^*$ ein über W^* anaplatter Unterraum von $W^*\times K\times L$ ist. Dabei wollen wir W^* in $B(K\times L,U)\times W$ wählen. Mit Y^* bezeichnen wir den Raum $W^*\times_W Y$ und mit $g^*: Y^*\longrightarrow Z_o$ die aus g abgeleitete Abbildung. Man sieht leicht, daß X^* schon ein Unterraum von $Y^*\times K$ ist, so daß die Daten X^*, Y^*, g^* ein Element b_o^* von $G_{K,L}(W^*)$ definieren. Wir wollen die Tangentialabbildung der zugehörigen Abbildung

$$\Psi_{b_o^*}: W^* \longrightarrow G_{\mathfrak{M}}(\Upsilon_{\mathfrak{M}}\times K)$$

im Punkt id berechnen.

Es sei

$$(\xi_1,\xi_2): \mathcal{O}^n_{X_o}\times f_o^{-1}(\mathcal{O}^m_{Y_o}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2, \mathcal{O}_{X_o})\times f_o^{-1}(\mathcal{H}om(\mathcal{J}_r/\mathcal{J}_r^2, \mathcal{O}_{Y_o}))$$

der Garbenhomomorphismus mit

$$\xi_1(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_m)(\overline{\varphi}) := \sum_\nu \alpha_\nu \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial X_\nu}} + \sum_\mu \beta_\mu \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial Y_\mu}}$$

und

$$\xi_2(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_m)(\overline{\psi}) := \sum_\mu \beta_\mu \overline{\frac{\partial\psi}{\partial Y_\mu}}$$

wenn φ bzw. ψ Schnitte in $\mathcal{J}$ bzw. $\mathcal{J}_r$ sind. Dabei haben wir die Koordinatenfunktionen des $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{C}^m$ mit X_ν bzw. Y_μ bezeichnet sowie mit $\overline{}$ die Restklassenabbildung. Aus (ξ_1, ξ_2) erhalten wir einen Morphismus

$$(\Xi_1,\Xi_2): B(K\times L, \mathcal{O}^n_{X_o})\times B(L,\mathcal{O}^m_{Y_o}) \longrightarrow E_1\times E_2\ ,$$

der sich offenbar über den Unterraum $\mathrm{Ker}(\Theta) \cong T_{b_o} G_{\mathfrak{M}}(\Upsilon_{\mathfrak{M}}\times K)$ von $E_1\times E_2$ faktorisiert. Die so erhaltene Abbildung von $B(K\times L,\mathcal{O}^n_{X_o})\times B(L,\mathcal{O}^m_{Y_o})$ in Ker (Θ) wollen wir mit Ξ bezeichnen. Dann gilt:

<u>(7.9) Satz</u>: (1) Die Tangentialabbildung

$$d_{id}\Psi_{b_o^*}: B(K\times L)^n\times B(L)^m \longrightarrow T_{b_o}(G_{\mathfrak{M}}(\Upsilon_{\mathfrak{M}}\times K)) \cong \mathrm{Ker}(\Theta)$$

ist die Komposition von Ξ mit der kanonischen Projektion von $B(K\times L)^n\times B(L)^m$ auf $B(K\times L,\mathcal{O}^n_{X_o})\times B(L,\mathcal{O}^m_{Y_o})$.

(2) $d_{id}\Psi_{b_o^*}$ ist direkt. Der Kokern dieser Abbildung ist isomorph zu dem endlichdimensionalen Vektorraum $\mathcal{T}^1(f_o/Z_o, \mathcal{O}_{Y_o})_{x_o}$.

<u>Beweis</u>: (1) folgt leicht aus den entsprechenden Aussagen (6.9) und (6.14).

zu (2) : Aus dem Diagramm (D1) vor (7.7) erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0\to \mathrm{Ker}(\vartheta_1)\to \mathrm{Ker}(\vartheta)\to f_o^{-1}(\mathcal{H}om(\mathcal{J}_r/\mathcal{J}_r^2,\mathcal{O}_{Y_o}))\longrightarrow \mathcal{L}\ ,$$

wobei $\mathcal{L}$ der in (7.4) definierte Modul ist, der ein Untermodul von $\mathcal{T}^2(X_o/Y_o,\mathcal{O}_{X_o})$ war und daher endlich über Y_o lag. Entsprechend ergibt sich aus dem Diagramm (D2) eine exakte Sequenz

$$0\to\mathrm{Ker}(\Theta_1)\to\mathrm{Ker}(\Theta)\to E_2\to F/E_1\ ,$$

und F/E_1 identifiziert sich mit dem Modul $B(L, f_{o*}(\mathcal{L}))$. Aus dem Diagramm von Garben

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}^n_{X_o} \arrow[r] \arrow[d, "\xi_1"'] & \mathcal{O}^n_{X_o}\times f_o^{-1}(\mathcal{O}^m_{Y_o}) \arrow[r] \arrow[d, "\xi"'] & f_o^{-1}(\mathcal{O}^m_{Y_o}) \arrow[r] \arrow[d, "\xi_2"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\vartheta_1) \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\vartheta) \arrow[r] & f_o^{-1}(\mathcal{H}om(\mathcal{J}_r/\mathcal{J}_r^2,\mathcal{O}_{Y_o})) \arrow[r] & \mathcal{L}
\end{tikzcd}$$

und dem entsprechenden Diagramm von Banachräumen

$$(*)\quad\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B(K\times L,\mathcal{O}^n_{X_o}) \arrow[r] \arrow[d, "\Xi_1"'] & B(K\times L,\mathcal{O}^n_{X_o})\times B(L,\mathcal{O}^m_{Y_o}) \arrow[r] \arrow[d, "\Xi"'] & B(L,\mathcal{O}^m_{Y_o}) \arrow[r] \arrow[d, "\Xi_2"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\Theta_1) \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\Theta) \arrow[r] & B(L,\mathcal{H}om(\mathcal{J}_r/\mathcal{J}_r^2,\mathcal{O}_{Y_o})) \arrow[r] & B(L,f_{o*}(\mathcal{L}))
\end{tikzcd}$$

erhalten wir das kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(\xi_2)_{x_o} \arrow[r] & \mathrm{Koker}(\xi_1)_{x_o} \arrow[r] & \mathrm{Koker}(\xi)_{x_o} \arrow[r] & \mathrm{Koker}(\xi_2)_{x_o} \arrow[r] & \mathcal{L}_{x_o} \\
\mathrm{Ker}(\Xi_2) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Koker}(\Xi_1) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Koker}(\Xi) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Koker}(\Xi_2) \arrow[r] \arrow[u] & B(L,f_{o*}(\mathcal{L})). \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Man überlegt sich nun leicht, daß gilt:

$$\mathrm{Ker}(\xi_2)\cong f_o^{-1}(\mathcal{T}^0(Y_o/Z_o,\mathcal{O}_{Y_o})),\quad \mathrm{Koker}(\xi_2)\cong f_o^{-1}(\mathcal{T}^1(Y_o/Z_o,\mathcal{O}_{Y_o})).$$

Ferner ist $\mathrm{Ker}(\vartheta_1)$ nichts anderes als $\mathcal{H}om(\tilde{\mathcal{J}}/\tilde{\mathcal{J}}^2,\mathcal{O}_{X_o})$, wenn $\tilde{\mathcal{J}}\subseteq\mathcal{O}_{U\times Y_o}$ das Ideal von $(1\times f_o)(X_o)$ in $U\times Y_o$ bezeichnet. Daher gilt: $\mathrm{Koker}(\xi_1)\cong\mathcal{T}^1(X_o/Y_o,\mathcal{O}_{X_o})$ und $\mathrm{Koker}(\xi)\cong\mathcal{T}^1(f_o/Z_o,\mathcal{O}_{Y_o})$. Entsprechend ist

$$\mathrm{Ker}(\Xi_2)\cong B(L,\mathcal{T}^0(Y_o/Z_o,\mathcal{O}_{Y_o})),$$
$$\mathrm{Koker}(\Xi_2)\cong B(L,\mathcal{T}^1(Y_o/Z_o,\mathcal{O}_{Y_o}))$$
$$\mathrm{Koker}(\Xi_1)\cong B(K\times L,\mathcal{T}^1(X_o/Y_o,\mathcal{O}_{X_o}))\cong B(L,f_{o*}(\mathcal{T}^1(X_o/Y_o,\mathcal{O}_{X_o}))).$$

Das obige Diagramm können wir daher auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}^0(Y_0/Z_0,\mathcal{O}_{Y_0})_{y_0} \arrow[r, "\delta^0_{y_0}"] & \mathcal{T}^1(X_0/Y_0,\mathcal{O}_{X_0})_{x_0} \arrow[r] & \mathcal{T}^1(f_0/Z_0,\mathcal{O}_{Y_0})_{x_0} \arrow[r] & \mathcal{T}^1(Y_0/Z_0,\mathcal{O}_{Y_0})_{y_0} \arrow[r, "\tilde{\delta}^1_{y_0}"] & \mathcal{L}_{x_0} \\
B(L,\mathcal{T}^0(Y_0/Z_0,\mathcal{O}_{Y_0})) \arrow[r, "d^0"] \arrow[u] & B(L,f_{0*}\mathcal{T}^1(X_0/Y_0,\mathcal{O}_{X_0})) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Koker}(\Xi) \arrow[r] \arrow[u, "\rho"] & B(L,\mathcal{T}^1(Y_0/Z_0,\mathcal{O}_{Y_0})) \arrow[r, "\tilde{d}^1"] \arrow[u] & B(L,f_{0*}(\mathcal{L})) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Wegen der Voraussetzung (7.1)(3) ist Koker(δ^0) auf y_0 konzentriert und daher Koker(d^0)=B(L,Koker(δ^0))=Koker(δ^0)$_{y_0}$. Entsprechend folgt aus (7.4)(5) Ker($\tilde{d}1$)=B(L,Ker($\tilde{\delta}1$), was wieder nichts anderes als Ker($\tilde{\delta}^1$)$_{y_0}$ ist (Man beachte, daß der Kokern von $\mathcal{T}^1(Y_0/Z_0,\mathcal{O}_{Y_0}) \longrightarrow f_{0*}(\mathcal{L})$ nichts anderes als der Kokern von ϑ_2 ist!) . Insgesamt sind somit die äußeren Pfeile in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Koker}(\delta^0)_{y_0} \arrow[r] & \mathcal{T}^1(f_0/Z_0,\mathcal{O}_{Y_0})_{x_0} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\tilde{\delta}^1)_{y_0} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Koker}(d^0) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Koker}(\Xi) \arrow[r] \arrow[u, "\rho"] & \mathrm{Ker}(\tilde{d}^1) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

bijektiv. Mit dem Fünferlemma ergibt sich nun, daß auch ρ bijektiv ist. Damit ist der zweite Teil von (2) gezeigt.

Wir haben nun noch nachzuweisen, daß $d_{id}\Psi_{b_0^*}$ direkt ist. Weil die Projektion von $B(K\times L)^n\times B(L)^m$ auf $B(K\times L,\mathcal{O}^n_{X_0})\times B(L,\mathcal{O}^m_{Y_0})$ surjektiv direkt ist, reicht es offenbar zu zeigen, daß Ξ direkt ist. Hierzu betrachten wir das Diagramm (✱). Die Abbildung Ξ_1 bzw. Ξ_2 ist direkt, weil $K\times L$ bzw. L privilegiert ist für Koker(ξ_1)$\cong\mathcal{T}^1(X_0/Y_0,\mathcal{O}_{X_0})$ bzw.
Koker($\mathcal{O}^m_{Y_0}\longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{J}_r/\mathcal{J}_r^2,\mathcal{O}_{Y_0})$)$\cong\mathcal{T}^1(Y_0/Z_0,\mathcal{O}_{Y_0})$. Ferner ist

$$\mathrm{Ker}(\Xi_2)\cong B(L,\mathcal{T}^0(Y_0/Z_0,\mathcal{O}_{Y_0}))\xrightarrow{d^0}\mathrm{Koker}(\Xi_1)\cong B(L,f_{0*}(\mathcal{T}^1(X_0/Y_0,\mathcal{O}_{X_0})))$$

direkt, vgl. oben. Die untere Zeile in dem Diagramm (✱) ist wegen (6.8) direkt, weil es sich dabei um die Kern-Kokern-Sequenz des Diagramms (D2) handelt. Mit (6.8) - angewandt auf das Diagramm (✱) - ergibt sich nun, daß auch Ξ direkt ist, w.z.b.w.

D. Beweis von (5.1)

1.Bezeichnungen: Es seien K,L stets zwei festgewählte Polyzylinder mit den in B. beschriebenen Eigenschaften, $G_{K,L}$ der zu Beginn von C. eingeführte Funktor und $\mathcal{G}_{K,L}$ eine Umgebung von b_0 in $\mathfrak{G}_{\mathfrak{m}}(\Gamma_{\mathfrak{m}}\times K)$, welche sich in den Tangentialraum

$T_{K,L}:=T_{b_0}\mathfrak{G}_{\mathfrak{m}}(\Gamma_{\mathfrak{m}}\times K)$ einbetten läßt. Für einen banachanalytischen Raumkeim (S,s_0) sei $\widetilde{G}_{K,L}(S,s_0)$ die Menge aller Tupel b=(X,Y,g) mit den folgenden Eigenschaften:

1) Y ist ein über S anaplatter abgeschlossener Unterraum von $S\times V'$, wobei V' eine Umgebung von L in V ist.

2) $g:Y\longrightarrow Z_0$ ist ein Morphismus.

3) X ist ein über S anaplatter abgeschlossener Unterraum von $Y\times U'$, wobei U' eine Umgebung von K in U ist.

4) X,Y,g induzieren $X_0\cap(U'\times V')$, $Y_0\cap V'$, g_0 in der Faser über s_0.

Dabei sollen zwei solche Tupel identifiziert werden, wenn sie nach geeigneter Verkleinerung von S,U',V' gleich sind. Offenbar ist $\widetilde{G}_{K,L}(S,s_0)$ funktoriell in (S,s_0). Es sei $\underline{F}$ wie schon oben das gefaserte Gruppoid der Deformationen des Abbildungskeimes f_0/Z_0 über der Kategorie der komplexen Raumkeime. Die Elemente in $\widetilde{G}_{K,L}(S,s_0)$ und $G_{K,L}(S,s_0)$ wollen wir im folgenden kurz mit $b,b_1,b',\ldots$ bezeichnen, die Objekte in $\underline{F}$ mit $a,a_1,a',\ldots$. Jedem Element b in $G_{K,L}(S,s_0)$ kann man offenbar eine Deformation q(b) zuordnen. Ist $(S,s_0)\xrightarrow{\varphi}(S',s_0')$ ein Morphismus komplexer Raumkeime und $b'\in G_{K,L}(S',s_0')$, so hat man eine kanonische Abbildung $q(\varphi^*(b'))\longrightarrow q(b')$ von Deformationen über φ. Es sei noch angemerkt, daß jede Deformation über (S,s_0) die Gestalt q(b) hat, falls $\mathcal{O}_{S,s_0}$ artinsch ist. Das ergibt sich leicht aus (7.2).

2. Konstruktion der versellen Deformation: Wir betrachten die gegen Ende von C. definierte Abbildung $\Psi_{b_0^*}:W^*\longrightarrow\mathcal{G}_{K,L}$. Die zugehörige Tangentialabbildung

$$d_{id}\Psi_{b_0^*}:B(K\times L)^n\times B(L)^m\longrightarrow T_{K,L}$$

ist direkt, und der Kokern ist ein endlichdimensionaler Vektorraum der Dimension $k:=\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}^1(f_0/Z_0,\mathcal{O}_{Y_0})_{x_0})$ ((7.9)). Wir wählen eine k-dimensionale lokal abgeschlossene Untermannigfaltigkeit $\mathcal{T}^1$ von $T_{K,L}$ welche b_0 enthält, so daß die Tangentialabbildung eine bijektive Abbildung

$$T_{b_0}\mathcal{T}^1\longrightarrow\mathrm{Koker}(d_{id}\Psi_{b_0^*})$$

induziert. Wir setzen dann $S_{K,L}:=\mathcal{G}_{K,L}\cap\mathcal{T}^1$ und $\alpha_{K,L}:=q(\mathfrak{b}_{K,L}|S_{K,L})$, wenn $\mathfrak{b}_{K,L}$ das "universelle" Element in $G_{K,L}(\mathcal{G}_{K,L})$ bezeichnet.
Es soll im folgenden gezeigt werden, daß $S_{K,L}$, $\alpha_{K,L}$ die gesuchte

semiuniverselle Deformation ist. Wir merken an, daß $S_{K,L}$ ein endlichdimensionaler komplexer Raum der Einbettungsdimension $\leq k$ ist!

<u>3. Konstruktion von S^* und b^*</u>: Sei $b=(X,Y,g)$ ein Element in $\tilde{G}_{K,L}(S,s_c)$, wobei X,Y,g die Eigenschaften 1) bis 4) zu Beginn dieses Abschnitts haben. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
S\times B(K\times L,U')\times B(L,V')\times K\times L \arrow[r, "H_1"] \arrow[d, "\text{proj.}"'] & S\times U'\times V' \arrow[d, "\text{proj.}"] \\
S\times B(K\times L,U')\times B(L,V')\times L \arrow[r, "H_2"] & S\times V'
\end{tikzcd}$$

wobei $H_1(s,\varphi,\psi,x,y)=(s,\varphi(x,y),\psi(y))$

und $H_2(s,\varphi,\psi,y)=(s,\psi(y))$ ist.

Es gibt dann eine Umgebung S^* von (s_c,id) in $S\times B(K\times L,U')\times B(L,V')$ derart, daß $H_1^*(X)|S^*$ bzw. $H_2^*(Y)|S^*$ anaplatt über S^* sind. Die Abbildung g induziert einen Morphismus $g^*: H_2^*(Y)|S^*\longrightarrow Z_c$, und man sieht leicht, daß die Daten $H_1^*(X)|S^*$, $H_2^*(Y)|S^*$, g^* ein Element von $G_{K,L}(S^*)$ definieren, welches wir im folgenden kurz mit b^* bezeichnen. Dabei wählen wir S^* stets so klein, daß sich $\Psi_{b^*}: S^*\longrightarrow \mathcal{G}_{\mathfrak{m}}(\Upsilon_{\mathfrak{m}}\times K)$ über $\mathcal{G}_{K,L}$ faktorisiert. Wir werden den folgenden Hilfssatz benötigen:

<u>(7.10) Lemma</u>: Der Raum $\tilde{S}^*:=\Psi_{b^*}^{-1}(S_{K,L})$ ist glatt über S in einer Umgebung von (s_c,id). Insbesondere gibt es – wenigstens nach Verkleinerung von S als Umgebung von s_c – ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S^* \arrow[r, "\Psi_{b^*}"] & \mathcal{G}_{K,L} \arrow[d] \\
S \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r] & S_{K,L}
\end{tikzcd},$$

wobei σ ein S-Morphismus ist mit $\sigma(s_c)=(s_c,id)$.

<u>Beweis</u>: Wir betrachten das kartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S^* \arrow[r, "\Psi_{b^*}"] & T_{K,L} \\
\tilde{S}^* \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[r] & \mathcal{T}^1 \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"]
\end{tikzcd}.$$

Die Restriktion der Tangentialabbildung $d_{(s_c,id)}\Psi_{b^*}$ auf den Unterraum $0\times B(K\times L)^n\times B(L)^m$ ist nichts anderes als die Tangentialabbildung $d_{id}\Psi_{b_c^*}$, die direkt ist. Daher ist die Abbildung

$$0\times B(K\times L)^n\times B(L)^m\longrightarrow T_{K,L}/T_{b_c}(\mathcal{T}^1)$$

surjektiv direkt, wie aus der Konstruktion von $\mathcal{T}^1$ folgt. Aus dem nachfolgenden Hilfssatz ergibt sich somit die Behauptung.-

<u>(7.11) Lemma</u>: Gegeben sei ein kartesisches Diagramm von banach-analytischen Räumen

$$\begin{tikzcd}
S\times W \arrow[r, "\psi"] & T \\
S' \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\psi'"] & T' \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}$$

wobei T,T' und W glatt sowie i,j abgeschlossene Einbettungen sind. Es sei $s'_c\hat{=}(s_c,w_c)$ ein Punkt von S' und $t'_c=\psi'(s'_c)$. Ist dann der durch die Tangentialabbildung von ψ induzierte Homomorphismus

$$0\times T_{w_c}W\longrightarrow T_{t'_c}(T)/T_{t'_c}(T')$$

surjektiv direkt, so ist S' glatt über S in s'_c.

<u>Beweis</u>: Nach geeigneter Verkleinerung der betrachteten Räume darf man annehmen, daß T ein Produkt $T'\times V$ ist, wobei sich $j(T')$ mit $T'\times\{v_c\}$ identifiziert, wenn $j(t'_c)=(t'_c,v_c)$. Offenbar ist dann das induzierte Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S\times W \arrow[r] & V \\
S' \arrow[u] \arrow[r] & \{v_c\} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

ebenfalls kartesisch, so daß man die Aussage nur für den Spezialfall $T'=\{t'_c\}$ zeigen muß.

Sei nun E ein glatter Raum, welcher S als abgeschlossenen Unterraum enthält. Nach geeigneter Verkleinerung von S,E und W

gibt es eine analytische Abbildung $E \times W \xrightarrow{\tilde{\psi}} T$ mit $\tilde{\psi}|S \times W = \psi$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook] & E \\ S' \arrow[u] \arrow[r, hook] & E' = \tilde{\psi}^{-1}(t'_c) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

ist dann offenbar kartesisch, so daß es reicht, die Behauptung für den Fall zu zeigen, daß S glatt ist.

Betrachten wir nun also die Situation, daß $T' = \{t'_c\}$ und S glatt ist. Aus der Voraussetzung folgt dann insbesondere, daß $d_{(s_c,w_o)}(\psi)$ surjektiv direkt ist. Daher ist mit S auch $S' = \psi^{-1}(t'_c)$ im Punkt s'_c glatt (Satz über implizite Funktionen). Damit $S' \to S$ glatt ist, reicht es deshalb zu zeigen, daß die Tangentialabbildung $T_{s'_c}S' \to T_{s_c}S$ surjektiv direkt ist. Das ergibt sich aber leicht aus der Voraussetzung.-

Wir betrachten noch einmal das Diagramm

$$\begin{tikzcd} S^* \arrow[r] & \mathfrak{G}_{K,L} \\ S \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r, "\varphi"] & S_{K,L} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

aus (7.10). Man sieht leicht, daß die durch b und $\sigma^*(b^*) = \varphi^*(\mathfrak{b}_{K,L}|S_{K,L})$ induzierten Deformationen auf S in natürlicher Weise isomorph sind. Ist nun $\mathcal{O}_{S,s_c}$ artinsch, so wird jede Deformation des Abbildungskeimes f_c/Z_c durch ein Element b in $\tilde{G}_{K,L}(S,s_c)$ induziert. Daher erhält man insbesondere:

(7.12) Folgerung: $(S_{K,L}, \alpha_{K,L})$ ist eine formal semiuniverselle Deformation des Abbildungskeimes f_c/Z_c.

4. Vergleich von $(S_{K,L}, \alpha_{K,L})$ und $(S_{K',L'}, \alpha_{K',L'})$: Seien K',L' Polyzylinder in K,L, welche ebenfalls die Voraussetzungen in B. erfüllen. Das universelle Element $\mathfrak{b}_{K,L}$ in $G_{K,L}(\mathfrak{G}_{K,L})$ induziert – wenigstens nach Verkleinerung von $\mathfrak{G}_{K,L}$ als Umgebung von b_c – durch Beschränken auf die Polyzylinder K',L' ein Element $\mathfrak{b}_{K,L}|(K',L')$ in $G_{K',L'}(\mathfrak{G}_{K,L})$. Hierzu gehört ein Morphismus $\mathfrak{G}_{K,L} \to \mathfrak{G}_{K',L'}$, und nach geeigneter Verkleinerung von $\mathfrak{G}_{K,L}$ und $T_{K,L}$ gibt es einen Morphismus $\tau: T_{K,L} \to T_{K',L'}$ derart, daß

das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{G}_{K,L} \arrow[r] \arrow[d] & T_{K,L} \arrow[d, "\tau"] \\ \mathfrak{G}_{K',L'} \arrow[r] & T_{K',L'} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Aus der Untermannigfaltigkeit $\mathcal{T}^1$ von $T_{K,L}$ erhalten wir nun die Untermannigfaltigkeit $\mathcal{T}'^1 := \tau(\mathcal{T}^1)$ von $T_{K',L'}$, welche offenbar wieder die Eigenschaft hat, daß die Komposition

$$T_{b_c}\mathcal{T}'^1 \hookrightarrow T_{K',L'} \longrightarrow \mathrm{Koker}(d_{id}\Psi'_{b_o^*})$$

surjektiv ist. Die Abbildung τ induziert dann einen Morphismus $\varrho: S_{K,L} \to S_{K',L'} := \mathcal{T}'^1 \cap \mathfrak{G}_{K',L'}$ und einen Morphismus $\alpha_{K,L} \to \alpha_{K',L'}$ von Deformationen. Weil $(S_{K,L}, \alpha_{K,L})$ und $(S_{K',L'}, \alpha_{K',L'})$ formal semiuniversell sind, muß ϱ notwendig ein Isomorphismus sein.

5. Nachweis der Versalität: Sei $i:(S,s_c) \hookrightarrow (S',s_c)$ eine abgeschlossene Einbettung und $a \to a'$ ein Morphismus von Deformationen über i. Ferner sei ein Morphismus $a \to \alpha_{K,L}$ vorgegeben. Wir haben zu zeigen, daß es eine Liftung $a' \to \alpha_{K,L}$ gibt.

Es sei $\varphi: S \to S_{K,L}$ der zu $a \to \alpha_{K,L}$ gehörige Homomorphismus der komplexen Räume und $b := \varphi^*(\mathfrak{b}_{K,L}|S_{K,L})$. Man überlegt sich leicht, daß es für hinreichend kleine Polyzylinder K',L' ein Element b' in $G_{K',L'}(S',s_c)$ gibt mit $i^*(b') = b$, so daß die zugehörige Deformation $q(b')$ isomorph zu a' ist. Dabei soll der Isomorphismus $q(b') \cong a'$ natürlich so beschaffen sein, daß der gegebene Morphismus $a \to a'$ durch die kanonische Abbildung $q(b) = q(i^*(b')) \longrightarrow q(b')$ induziert wird. Wir betrachten dann das Diagramm

$$\begin{tikzcd} S^* \arrow[dr, "\psi_{b^*}"] & \\ S'^* \arrow[u] \arrow[r, "\psi_{b'^*}"'] & \mathfrak{G}_{K',L'} \end{tikzcd}$$

(wobei S^* der wie oben gebildete offene Unterraum von $S \times B(K' \times L', U) \times B(L',V)$ ist, analog für S'^*), woraus sich ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde S^* \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \tilde S'^* \arrow[r] & S_{K',L'} \cong S_{K,L} \end{tikzcd}$$

ergibt. Nach Konstruktion enthält $\tilde S^*$ den Unterraum $S \times \{id\}$, und die Komposition

$$S \cong S \times \{id\} \xhookrightarrow{\sigma} \tilde S^* \longrightarrow S_{K',L'} \cong S_{K,L}$$

ist der vorgegebene Morphismus φ. Weil $\tilde S'^*$ glatt über S' ist, gibt es (wenigstens nach geeigneter Verkleinerung der betrachteten Räume) einen S'-Morphismus $\sigma': S' \longrightarrow \tilde S'^*$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & \tilde S^* \arrow[d] \\ S' \arrow[r, "\sigma'"] & \tilde S'^* \end{tikzcd}$$

kommutiert. Bezeichnet φ' die Komposition der Morphismen

$$S' \xrightarrow{\sigma'} \tilde S'^* \longrightarrow S_{K',L'} \cong S_{K,L} ,$$

so erhalten wir einen Morphismus von Deformationen

$$a' = q(b') \cong q(\varphi'^*(\mathfrak{b}_{K',L'} | S_{K',L'})) \longrightarrow q(\mathfrak{b}_{K',L'} | S_{K',L'}) \cong \mathfrak{a}_{K,L}$$

welcher den gegebenen Morphismus $a \longrightarrow \mathfrak{a}_{K,L}$ fortsetzt. Damit ist (5.1) bewiesen.

<u>Bemerkung</u>: Der Beweis zeigte insbesondere, daß $(S_{K,L}, \mathfrak{a}_{K,L})$ sogar versell ist für Deformationen über banachanalytischen Raumkeimen.

Kapitel III. Einige globale Modulprobleme

§8 Deformationen von Abbildungen und Moduln

A. Versalität und formale Versalität

Da die in diesem Abschnitt angeschnittenen Probleme lokaler Natur sind, werden wir bei den betrachteten Gruppoiden als Basiskategorie die Kategorie der analytischen Algebra wählen. Sei Λ eine analytische $\mathbb{C}$-Algebra, $\underline{C}_\Lambda$ die Kategorie der analytischen Λ-Algebren und $p: \underline{F} \longrightarrow \underline{C}_\Lambda$ ein kogefasertes Gruppoid, welches semihomogen im Sinne von [40], (1.2), ist. Mit einem Querstrich bezeichnen wir wie in §4 die Bildung von Isomorphieklassen einer Kategorie. Wir wollen stets voraussetzen, daß $\overline{\underline{F}}(\mathbb{C})$ einelementig ist und $\overline{\underline{F}}(\mathbb{C}[\varepsilon])$ ein endlichdimensionaler Vektorraum ist. ($\mathbb{C}[\varepsilon]$ sei dabei die Algebra $\mathbb{C}\{X\}/(X^2)$ der dualen Zahlen über $\mathbb{C}$).

Wir wollen zunächst einige Bezeichnungen für diesen Abschnitt fixieren. Die Objekte in $\underline{F}$ werden wir mit kleinen Buchstaben $a, b, c, \ldots$ und die zugehörigen analytischen Algebren mit $A, B, C, \ldots$ bezeichnen. Für einen Homomorphismus $\Phi: A \longrightarrow B$ und ein Objekt a über A sei $a \otimes_A B := \Phi_*(a)$. Unter Ω_A oder auch Ω_a verstehen wir den Modul $m_A / (m_\Lambda A + m_A^2)$.

Aus dem obigen kogefaserten Gruppoid erhält man in natürlicher Weise ein kogefasertes Gruppoid

$$\hat p: \hat{\underline{F}} \longrightarrow \hat{\underline{C}}_\Lambda$$

über der Kategorie der lokalen kompletten Λ-Algebren mit Restekörper $\mathbb{C}$, siehe [40], p.9. Ferner hat man einen Funktor $\underline{F} \xrightarrow{\wedge} \hat{\underline{F}}$ und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \underline{F} \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "p"'] & \hat{\underline{F}} \arrow[d, "\hat p"] \\ \underline{C}_\Lambda \arrow[r, "\wedge"] & \hat{\underline{C}}_\Lambda \end{tikzcd}$$

Es sei noch einmal an den Begriff der Versalität erinnert. Ein Objekt ξ in $\underline{F}$ heißt versell, wenn es die zu der Eigenschaft (V) in §4 duale Liftungseigenschaft erfüllt, wenn also gilt:

(V) Sei $a' \longrightarrow a$ ein Morphismus in $\underline{F}$, so daß $A' \longrightarrow A$ surjektiv ist. Dann läßt sich jeder Morphismus $\xi \xrightarrow{\varrho} a$ liften zu einem Morphismus $\xi \xrightarrow{\varrho'} a'$.

Ist die zu der Liftung gehörige Abbildung $\Omega_{\xi} \longrightarrow \Omega_{a'}$ sogar eindeutig bestimmt, so nennt man ξ semiuniversell. ξ heißt universell, wenn die zu der Liftung ϱ' in (V) gehörige Abbildung $p(\varrho')$ zwischen den analytischen Algebren sogar eindeutig bestimmt ist. Demgegenüber wollen wir ein Objekt $\bar{\xi}$ in $\hat{\underline{F}}$ formal versell (bzw. formal semiuniversell bzw. formal universell) nennen, wenn die entsprechende Eigenschaft in $\hat{\underline{F}}$ erfüllt ist. Aus dem Satz von Schlessinger folgt, daß es stets formal semiuniverselle Objekte in $\hat{\underline{F}}$ gibt, siehe [40] ,(1.11).

Die folgende einfache Beobachtung werden wir häufig benutzen: Sei a ein Objekt in $\underline{F}$. Dann ist a genau dann versell, wenn $a \otimes_A A\{X\}_n$ versell ist. Gleiches gilt für die Eigenschaft formal versell.

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen:

(8.1) Satz: Es möge ein verselles Objekt a in $\underline{F}$ existieren. Dann gilt:

(a) Es gibt ein semiuniverselles Objekt in $\underline{F}$.

(b) Jedes formal verselle Objekt in $\underline{F}$ ist schon versell.

Zum Beweis benötigen wir den folgenden Hilfssatz aus [40] , (2.10):

(8.2) Lemma: Sei $\bar{b}$ in $\hat{\underline{F}}$ formal semiuniversell, $\bar{a}$ formal versell und $\bar{b} \to \bar{a}$ ein Morphismus. Dann ist $\bar{A}$ ein freier Potenzreihenring über $\bar{B}$.

Beweis: Weil $\bar{a}$ formal versell ist, gibt es einen Morphismus $\bar{a} \longrightarrow \bar{b}$. Die Komposition $\bar{b} \to \bar{a} \to \bar{b}$ ist ein Endomorphismus von $\bar{b}$, für den die zugehörige Abbildung $\Omega_{\bar{b}} \longrightarrow \Omega_{\bar{b}}$ wegen der formalen Semiuniversalität notwendig die Identität ist. Insbesondere ist die Abbildung $\Omega_{\bar{b}} \longrightarrow \Omega_{\bar{a}}$ injektiv. Sei

$$n := \dim_{\mathbb{C}}(\Omega_{\bar{a}}) - \dim_{\mathbb{C}}(\Omega_{\bar{b}}) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_{\bar{A}}/(\mathfrak{m}_{\bar{B}}\bar{A} + \mathfrak{m}_{\bar{A}}^2))$$

und $\bar{C} := \bar{B}[\![X]\!]_n$; $\bar{c} := \bar{b} \otimes_{\bar{B}} \bar{C}$. Offenbar gibt es dann einen surjektiven $\bar{B}$-Homomorphismus $\Psi : \bar{C} \longrightarrow \bar{A}$, welcher einen Isomorphismus

$$\bar{\Psi} : \bar{C}_* := \bar{C}/(\mathfrak{m}_{\bar{C}}^2 + \mathfrak{m}_{\Lambda}\bar{C}) \longrightarrow \bar{A}_* := \bar{A}/(\mathfrak{m}_{\bar{A}}^2 + \mathfrak{m}_{\Lambda}\bar{A})$$

induziert. Aus dem vorgegebenen Morphismus $\bar{b} \to \bar{a}$ erhält man einen Morphismus $\psi : \bar{c} \to \bar{a}$ über Ψ, so daß $\bar{\psi} : \bar{c} \otimes_{\bar{C}} \bar{C}_* \longrightarrow \bar{a} \otimes_{\bar{A}} \bar{A}_*$ ein Isomorphismus ist. Wir betrachten die Komposition

$$\bar{\varphi} : \bar{a} \longrightarrow \bar{a} \otimes_{\bar{A}} \bar{A}_* \xrightarrow{\bar{\Psi}^{-1}} \bar{c} \otimes_{\bar{C}} \bar{C}_* \quad .$$

Weil $\bar{a}$ formal versell ist, läßt sich $\bar{\varphi}$ liften zu einem Morphismus $\bar{a} \xrightarrow{\varphi} \bar{c}$. Die Komposition $\bar{C} \xrightarrow{\Psi} \bar{A} \xrightarrow{p(\varphi)} \bar{C}$ ist nach Konstruktion ein surjektiver Endomorphismus von $\bar{C}$ und daher ein Isomorphismus. Folglich sind auch $\bar{A}$ und $\bar{C}$ isomorph, was zu zeigen war. _

Beweis des Satzes: zu (a): Sei $\bar{b}$ ein formal semiuniverselles Objekt und $\bar{b} \to \hat{a}$ ein Morphismus. $\hat{A}$ ist ein freier Potenzreihenring über $\bar{B}$. Seien $x_1, \dots, x_n$ Elemente in A, deren Bilder in $\hat{A}$ Unbestimmte für $\bar{B} \to \hat{A}$ sind. Wir behaupten, daß

$$B := A/(x_1, \cdots, x_n) \quad , \quad b := a \otimes_A B$$

semiuniversell ist. Zunächst bemerken wir, daß nach Konstruktion $\bar{b} \cong \hat{b}$ gilt. Sei $C := B\{X\}_n$, $c := b \otimes_B C$ und $C_* := C/(\mathfrak{m}_C^2 + \mathfrak{m}_{\Lambda} C)$. Wie im Beweis des vorangegangenen Hilfssatzes gibt es einen Morphismus $a \longrightarrow c \otimes_C C_*$, für den die zugehörige Abbildung $\Omega_A \longrightarrow \Omega_{C_*}$ ein Isomorphismus ist. Weil a versell ist, läßt sich dieser Morphismus liften zu einem Morphismus $a \longrightarrow c$. Nach Konstruktion ist die zugehörige Abbildung $A \longrightarrow C$ surjektiv. Die Komplettierungen dieser analytischen Algebren sind beide isomorph zu $B[\![X]\!]_n$. Daher ist $\hat{A} \longrightarrow \hat{C}$ ein Isomorphismus und folglich auch $A \longrightarrow C$. Insbesondere ist $c = b \otimes_B B\{X\}_n$ versell und daher auch b. Das war zu zeigen!

zu (b): Sei c in $\underline{F}$ ein formal verselles Objekt, b semiuniversell und $b \longrightarrow c$ ein Morphismus. Nach dem Hilfssatz ist $\hat{C}$ ein freier Potenzreihenring über $\hat{B}$. Offenbar ist dann auch C ein freier Potenzreihenring über B. Daher ist mit b auch c versell, was zu zeigen war.-

B. Deformationen holomorpher Abbildungen

Sei $f_o: X_o \longrightarrow Y_o$ ein Morphismus von kompakten komplexen Räumen über dem komplexen Raum Z_o. Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, daß es eine semiuniverselle Deformation von f_o/Z_o gibt.

Zunächst sei an die folgenden fundamentalen Sätze der Deformationstheorie erinnert.

<u>(8.3) Theorem</u> (Douady, Forster-Knorr, Grauert, Palamodov): Jeder kompakte komplexe Raum besitzt eine semiuniverselle Deformation.

Zum Beweis siehe [6], [10], [16], [34]. Daß die semiuniverselle Deformation auch versell in unserem Sinne ist, wird in [6] gezeigt.

Sei $f: X \longrightarrow S$ eine flache eigentliche holomorphe Abbildung und Y ein weiterer Raum über S. Für einen Raum T über S sei

$$Mor_S(X,Y)(T)$$

die Menge aller T-Morphismen

$$X \times_S T \longrightarrow Y \times_S T .$$

Dann gilt, vgl. [5], [37] oder auch [41]:

<u>(8.4) Theorem</u> (Douady, Pourcin): Der Funktor

$$T \longmapsto Mor_S(X,Y)(T)$$

ist darstellbar durch einen separierten komplexen Raum $\mathcal{M}or_S(X,Y)$.

Mit Hilfe dieser Resultate ist es nun einfach, die Sätze von Horikawa aus [22], [23] zu verallgemeinern.

<u>(8.3) Theorem</u>: Sei Z_o ein komplexer Raum und $f_o: X_o \longrightarrow Y_o$ ein Morphismus kompakter Räume über Z_o. Dann gibt es eine semiuniverselle Deformation für f_o/Z_o.

<u>Beweis</u>: Wegen (8.1) reicht es, eine verselle Deformation anzugeben. Sei $X \longrightarrow S$ bzw. $Y \longrightarrow T$ eine eigentliche holomorphe Abbildung, welche eine verselle Deformation von $X_{s_o} \cong X_o$ bzw. $Y_{t_o} \cong Y_o$ ist. Es seien

$$M := \mathcal{M}or_{S\times T}(X \times T, Y \times S) \times_{S\times T} \mathcal{M}or_{S\times T}(Y \times S, Z_o \times S \times T),$$

$$X_M := X \times_S M , \quad Y_M := Y \times_T M$$

sowie

$$f: X_M \longrightarrow Y_M , \quad g: Y_M \longrightarrow Z_o$$

die "universellen" Abbildungen. Man überlegt sich leicht, daß

$$\begin{tikzcd} X_M \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & Y_M \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Z_o \\ & M & \end{tikzcd}$$

eine verselle Deformation für f_o/Z_o ist!

C. Deformationen von Moduln

Sei $f: X \longrightarrow S$ eine flache eigentliche holomorphe Abbildung, $s_o \in S$, $X_o = X_{s_o}$ die Faser über s_o und $\mathcal{M}_o$ ein kohärenter $\mathcal{O}_{X_o}$-Modul. Eine Deformation von $\mathcal{M}_o$ über einem Raumkeim (T,t_o) in $\underline{An}/(S,s_o)$ besteht aus einem Paar $(\mathcal{M},\alpha)$, wobei $\mathcal{M}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_{X_T}$-Modul und $\alpha: \mathcal{M}_{t_o} \longrightarrow \mathcal{M}_o$ ein Isomorphismus ist. Dabei bezeichne X_T das Faserprodukt $X \times_S T$ und $\mathcal{M}_{t_o}$ die Faser von $\mathcal{M}$ über t_o. Ist $(\mathcal{M}',\alpha')$ eine weitere Deformation von $\mathcal{M}_o$ über dem Raumkeim (T',t_o'), so besteht ein Morphismus $(\mathcal{M}',\alpha') \longrightarrow (\mathcal{M},\alpha)$ aus einem (S,s_o)-Morphismus $(T',t_o') \xrightarrow{\varphi} (T,t_o)$ und einem Isomorphismus $(1_X \times_S \varphi)^*(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'$, welcher mit den Isomorphismen α, α' verträglich ist. Offenbar bilden die Deformationen von $\mathcal{M}_o$ ein gefasertes Gruppoid $p: \underline{F} \longrightarrow \underline{An}/(S,s_o)$. Wir wollen zeigen:

<u>(8.6) Theorem</u>: $\mathcal{M}_o$ besitzt eine semiuniverselle Deformation.

Bevor wir den Beweis beginnen, sei an das folgende Resultat von Pourcin [37], Prop.1, erinnert:

<u>(8.7) Satz</u>: Sei $Y \longrightarrow T$ ein Morphismus analytischer Räume und $\mathcal{E}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul, welcher T-flach ist und dessen Träger eigentlich über T liegt. Es sei $\mathcal{F}$ ein kohärenter Quotient von $\mathcal{E}$. Dann gibt es einen abgeschlossenen Unterraum Z von T mit den folgenden Eigenschaften.

(1) $\mathcal{E}_Z = \mathcal{F}_Z$.

(2) Jeder Morphismus analytischer Räume $R \longrightarrow T$ mit $\mathcal{E}_R = \mathcal{F}_R$ faktorisiert sich auf eindeutige Weise über Z

<u>Beweis von (8.6)</u>: Wir gehen bei diesem Beweis in zwei Schritten vor. Es sei Y_o der komplexe Raum $X_o[\mathcal{M}]$ sowie $i_o:X_o \longrightarrow Y_o$ bzw. $\pi_o:Y_o \longrightarrow X_o$ die kanonische Einbettung bzw. Projektion. Wir betrachten das folgende gefaserte Gruppoid $\underline{G}$ über $\underline{An}/(S,s_o)$. Ein Objekt von $\underline{G}$ über einem Raumkeim (T,t_o) in $\underline{An}/(S,s_o)$ bestehe aus einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_o \arrow[r, "i_o"] \arrow[d] & Y_o \arrow[r, "\pi_o"] \arrow[d] & X_o \arrow[d] \\ X_T \arrow[r, "i"] \arrow[dr] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p"] & X_T \arrow[dl] \\ & T & \end{tikzcd}$$

wobei p eine Deformation von Y_o über T und $\pi \circ i = id_{X_T}$ ist. Die Morphismen in $\underline{G}$ definiert man in naheliegender Weise.

Jeder Deformation $(\mathcal{M}, \alpha)$ von $\mathcal{M}_o$ über einem Raumkeim (T,t_o) in $\underline{An}/(S,s_o)$ können wir ein Objekt von $\underline{G}$ folgendermaßen zuordnen. Es sei $Y:=X_T[\mathcal{M}]$ und $i:X_T \longrightarrow Y$ bzw $\pi:Y \longrightarrow X_T$ die kanonische Einbettung bzw. Projektion. Offenbar definieren Y, i, π ein Objekt von $\underline{G}$. Man sieht leicht, daß auf diese Weise $\underline{F}$ zu einer vollen Unterkategorie von $\underline{G}$ wird.

Sei umgekehrt durch

$$X_T \xrightarrow{\ i\ } Y \xrightarrow{\ \pi\ } X_T$$

ein Objekt in $\underline{G}$ gegeben. Dann ist i eine abgeschlossene Einbettung, da dies für $X_o \xrightarrow{i_o} Y_o$ richtig war. Sei $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_Y$ das Ideal von X_T. Offenbar ist $\mathcal{J}^2=0$ genau dann, wenn $Y \cong X_T[\mathcal{M}]$ mit einem kohärenten T-flachen $\mathcal{O}_{X_T}$-Modul $\mathcal{M}$ ist wie oben beschrieben!

Nehmen wir an, daß es ein verselles Objekt

$$X_T \xrightarrow{\ i\ } Y \xrightarrow{\ \pi\ } X_T$$

in $\underline{G}$ gibt. Es sei $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_Y$ das Ideal von X_T. Nach dem Satz von Pourcin gibt es einen Unterraum $Z \subseteq T$, so daß die Bedingungen (1) und (2) in (8.7) für $\mathcal{E} = \mathcal{O}_Y$ und $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y/\mathcal{J}^2$ gelten. Offenbar ist dann $Y \times_T Z = X_Z[\mathcal{M}]$ mit einem kohärenten $\mathcal{O}_{X_Z}$-Modul $\mathcal{M}$. Dieser Modul stellt eine verselle Deformation für $\mathcal{M}_o$ dar, wie man leicht sieht.

Wir haben nun noch zu zeigen, daß es in $\underline{G}$ verselle Objekte gibt. Sei $Y' \longrightarrow R'$ eine verselle Deformation des kompakten komplexen Raumes Y_o. Wir setzen $R=R' \times S$, $Y=Y' \times S$ und

$$M := \mathcal{M}or_R(X_R,Y) \times_R \mathcal{M}or_R(Y,X_R).$$

Es bezeichne $i:X_M \longrightarrow Y \times_R M$ bzw. $\pi : Y \times_R M \longrightarrow X_M$ den universellen Morphismus. Wir betrachten die Abbildung

$$M \longrightarrow \mathcal{M}or_R(X_R,X_R),$$

welche einem Tupel von Morphismen deren Komposition zuordnet. Zu der Identität auf X_R gehört ein Schnitt

$$s:R \longrightarrow \mathcal{M}or_R(X_R,X_R) .$$

Sei T das Faserprodukt in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[d, "s"] \\ M \arrow[r] & \mathcal{M}or_R(X_R,X_R) \end{tikzcd} .$$

Wie man leicht sieht, ist dann

$$Y_T \xrightarrow{\ i_T\ } Y \times_R T \xrightarrow{\ \pi_T\ } X_T$$

die gesuchte verselle Deformation in $\underline{G}$.-

<u>§9 Über die Darstellbarkeit des relativen Picardfunktors</u>

Die auftretenden komplexen Räume brauchen in diesem Paragraphen nicht separiert zu sein.

<u>A. Ein Kriterium für Darstellbarkeit</u>

Sei S ein separierter komplexer Raum und

$$P:(\underline{An}/S)^o \longrightarrow (\underline{\text{Mengen}})$$

ein Funktor. Wir wollen in diesem Abschnitt ein einfaches Kriterium ableiten, wann dieser Funktor darstellbar ist, wann es also einen komplexen Raum Y über S und eine Funktorisomorphie

$$\mathrm{Hom}_S(-,Y) \cong P$$

gibt. Im algebraischen Fall wurden solche Kriterien von Artin ([2]) gezeigt.

Jedem Funktor P kann man in natürlicher Weise ein gefasertes Gruppoid $p:\underline{P} \longrightarrow \underline{An}/S$ zuordnen. Dabei sei ein Objekt von $\underline{P}$ ein

Paar (T,η), wobei T ein komplexer Raum über S ist und η in P(T) liegt. Ist (T',η') ein weiteres Objekt in $\underline{P}$, so besteht ein Morphismus $(T,\eta)\longrightarrow(T',\eta')$ aus einem S-Morphismus $\varphi:T\longrightarrow T'$ mit $\eta\,\dot{|}_T := \varphi^*(\eta')=\eta$. Insbesondere macht es Sinn, von Versalität usw. zu sprechen.

Wir wollen zeigen:

<u>(9.1) Satz</u>: Der Funktor $P:(\underline{An/S})^{o}\longrightarrow(\underline{\text{Mengen}})$ ist genau dann durch einen (separierten) komplexen Raum darstellbar, wenn für jeden komplexen Raum T über S die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(D1) (Garbenaxiom): P ist von lokaler Natur, d.h. die Prägarbe $U\rightsquigarrow P(U)$ auf T ist eine Garbe.

(D2) (Existenz verseller Deformationen): Sei $s_o\in S$ und $\eta_o\in P(s_o)$. Dann besitzt η_o eine verselle Deformation.

(D3) (Relative Darstellbarkeit): Seien $\xi,\eta\in P(T)$. Dann ist der Funktor

$$F(R) := \begin{cases}\emptyset & \text{falls } \xi_R\neq\eta_R\\ \{\emptyset\} & \text{falls } \xi_R=\eta_R\end{cases}$$

von der Kategorie der komplexen Räume über T in die Kategorie der Mengen darstellbar durch einen lokal abgeschlossenen (abgeschlossenen) Unterraum von T.

(D4) (Offenheit der Versalität): Sei $\xi\in P(T)$. Dann ist die Menge der Punkte, in denen ξ versell ist, eine offene Teilmenge von T.

Bevor wir den Beweis beginnen, sei ein einfacher Hilfssatz vorausgeschickt.

<u>(9.2) Lemma</u>: (1) Es mögen die Voraussetzungen $(D\cancel{1}^{\,2})$ -(D$\cancel{4}$) erfüllt sein. Ferner sei $s_o\in S$ und $\eta_o\in P(s_o)$. Dann gibt es eine Deformation (T,η) von $\eta_o\cong\eta_{t_o}$, welche in jedem Punkt von T eine universelle Deformation ist.

(2) Sei X_o ein komplexer Raum über S, $\xi_o\in P(X_o)$ und $X_1\subseteq X_o\times_S X_o$ der lokal abgeschlossene Unterraum von $X_o\times_S X_o$, welcher den Funktor F in Bedingung (D3) darstellt für $T:=X_o\times_S X_o$, $\xi:=p_1^*(\xi_o)$, $\eta:=p_2^*(\xi_o)$. Dann ist X_1 der Graph

einer Äquivalenzrelation auf X_1 (d.h. für jeden komplexen Raum Z über S ist $X_1(Z)\subseteq X_o(Z)\times X_o(Z)$ der Graph einer Äquivalenzrelation auf der Menge $X_o(Z):=\mathrm{Hom}_S(Z,X_o)$).

(3) Sei X_o ein separierter komplexer Raum, $X_1\subseteq X_o\times_S X_o$ der Graph einer Äquivalenzrelation auf X_o und $d_1,d_2:X_1\rightrightarrows X_o$ die Einschränkungen der Projektionen. Ist X_1 ein lokal abgeschlossener (abgeschlossener) Unterraum von $X_o\times_S X_o$ und ist d_1 ein lokaler Isomorphismus, so existiert der Quotient für diese Äquivalenzrelation, d.h. es gibt einen separierten komplexen Raum Y über S und einen S-Morphismus $q:X_o\longrightarrow Y$ derart, daß für jeden Raum Z über S die Sequenz

$$Z(Y)\longrightarrow Z(X_o)\rightrightarrows Z(X_1)$$

exakt ist. Ferner ist mit d_1 auch q ein lokaler Isomorphismus.

<u>Beweis:</u> zu (1): Sei (T,η) eine semiuniverselle Deformation von $\eta_{t_o}\cong\eta_o$. Wir haben zu zeigen, daß man nach Verkleinern von T als Umgebung von t_o stets erreichen kann, daß η in jedem Punkt t von T eine universelle Deformation der Faser η_t ist. Zunächst dürfen wir wegen (D4) annehmen, daß η in jedem Punkt von T versell ist. Wegen (D3) gibt es einen lokal abgeschlossenen Unterraum W von $T\times_S T$ mit $p_1^*(\eta)_W=p_2^*(\eta)_W$, welcher universell mit dieser Eigenschaft ist. Dabei seien $p_i:T\times_S T\longrightarrow T$ die Projektionen, i=1,2. Man sieht leicht, daß mit η auch

$$\xi := p_1^*(\eta)_W = p_2^*(\eta)_W\in P(W)$$

im Punkt $(t_o,t_o)\in W$ semiuniversell ist. Daher sind die Projektionen $p_i|W:W\longrightarrow T$ im Punkt (t_o,t_o) Isomorphismen. Nach Verkleinern von T als Umgebung von t_o können wir folglich erreichen, daß W die Diagonale T in $T\times_S T$ ist. Wir zeigen, daß dann η in jedem Punkt von T eine universelle Deformation ist: Seien $(R,\alpha)\xrightarrow{\varphi_1,\varphi_2}(T,\eta)$ zwei Morphismen und $R\longrightarrow T\times_S T$ die Abbildung (φ_1,φ_2). Wegen der universellen Eigenschaft von W faktorisiert sich (φ_1,φ_2) über den Unterraum W=T. Folglich ist $\varphi_1=\varphi_2$. Damit ist (1) gezeigt.

(2) folgt sofort aus der universellen Eigenschaft von X_1.

(3) ist ein trivialer Spezialfall des viel allgemeineren Satzes von Kiehl [26] :

<u>Beweis von (9.1)</u>: Sei $I:=\bigcup_{s\in S}P(s)$. Für jedes $i=(s,\eta_o)\in I$

wählen wir eine Deformation (T_i, η_i) von $\eta_o = (\eta_i)_{t_i}$, welche universell in jedem Punkt von T ist. Sei

$$X_o := \coprod_{i \in I} T_i \quad , \xi_o := \coprod_{i \in I} \eta_i \in P(X_o)$$

und $X_1 \subseteq X_o \times_S X_o$ der lokal abgeschlossene (abgeschlossene) Unterraum von $X_o \times_S X_o$ mit $p_1^*(\xi_o)_{X_1} = p_2^*(\xi_o)_{X_1}$, welcher universell mit dieser Eigenschaft ist. X_1 ist der Graph einer Äquivalenzrelation auf X_o. Weil ξ_o in jedem Punkt universell ist, gilt dies offenbar auch für $\xi_1 := p_1^*(\xi_o)_{X_1} = p_2^*(\xi_o)_{X_1}$. Daher sind die Projektionen $d_i := p_i | X_1 : X_1 \longrightarrow X_o$ lokale Isomorphismen. Die Voraussetzungen von (9.2) (3) sind somit erfüllt, und es existiert der Quotient $q : X_o \longrightarrow Y$ nach der Äquivalenzrelation X_1. Weil q ein lokaler Isomorphismus und P von lokaler Natur ist, gibt es ein ξ in P(Y) mit $q^*(\xi) = \xi_o$, wie man leicht sieht. Wir behaupten, daß (Y, ξ) den Funktor P darstellt. Zeigen wir zunächst, daß für jeden Raum Z über S die durch ξ induzierte Abbildung

$$\begin{aligned} \xi(Z) : \mathrm{Hom}_S(Z, Y) &\longrightarrow P(Z) \\ f &\longmapsto f^*(\xi) \end{aligned}$$

injektiv ist. Seien dazu $f_1, f_2 : Z \longrightarrow Y$ zwei S-Morphismen mit $f_1^*(\xi) = f_2^*(\xi)$. Wir müssen $f_1 = f_2$ zeigen. Da wir dies lokal in Z nachprüfen können, dürfen wir o.E. annehmen, daß sich die f_i liften lassen zu Abbildungen $\tilde{f}_i : Z \longrightarrow X_o$. Aufgrund der universellen Eigenschaft von X_1 und wegen $\tilde{f}_1^*(\xi_o) = \tilde{f}_2^*(\xi_o)$ faktorisiert sich die Abbildung $(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) : Z \longrightarrow X_o \times_S X_o$ über X_1. Wegen $q . d_1 = q\, d_2$ ergibt sich daraus aber $f_1 = f_2$. Zeigen wir nun, daß die Abbildung $\xi(Z)$ surjektiv ist. Sei dazu $\eta \in P(Z)$. Weil P von lokaler Natur ist und $\xi(Z)$ schon als injektiv nachgewiesen ist, reicht es offenbar, zu jedem Punkt $z \in Z$ eine Umgebung U und einen S-Morphismus $\varphi : U \longrightarrow Y$ zu finden mit $\varphi^*(\xi) = \eta | U$. Dies ergibt sich aber leicht daraus, daß X_o und damit auch Y nach Konstruktion schon eine verselle Deformation der Faser η_z von η im Punkte z enthält. Damit ist (9.1) vollständig bewiesen.

B. Der Picardfunktor

Sei $f : X \longrightarrow S$ ein Morphismus zwischen separierten komplexen Räumen. Unter dem Picardfunktor versteht man den Funktor

$$\mathrm{Pic}_{X/S}(T) := H^0(T, R^1 f_{T*}(\mathcal{O}_{X_T}^*))$$

von der Kategorie An/S in die Kategorie der Mengen. Dabei bezeichne der Index T den Basiswechsel $T \longrightarrow S$. Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen:

(9.3) Theorem: Sei $f : X \longrightarrow S$ eine flache eigentliche holomorphe Abbildung zwischen separierten komplexen Räumen, welche kohomologisch flach in der Dimension 0 ist (d.h. es ist für jeden Punkt $s \in S$ die kanonische Abbildung

$$f_*(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s) \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_{X_s})$$

bijektiv). Dann ist der Funktor $\mathrm{Pic}_{X/S}$ darstellbar.

Beweis: Wir wollen zeigen, daß die Bedingungen (D1) - (D4) in (9.1) erfüllt sind. Das Garbenaxiom (D1) ist trivialerweise erfüllt. Zeigen wir zunächst die Bedingungen (D2) und (D4). Es ist $R^1 f_{T*}(\mathcal{O}_{X_T}^*)$ die zu der Prägarbe

$$U \rightsquigarrow H^1(X_U, \mathcal{O}_{X_T}^*) = \mathrm{Pic}(X_U)$$

assoziierte Garbe. Daher lassen sich die Elemente von $\mathrm{Pic}_{X/S}(T)$ lokal durch invertierbare $\mathcal{O}_{X_T}$-Moduln repräsentieren. Sind $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ zwei invertierbare $\mathcal{O}_{X_T}$-Moduln, so sind deren Bilder in $\mathrm{Pic}_{X/S}(T)$ offenbar genau dann gleich, wenn sie lokal isomorph sind, wenn es also zu jedem Punkt t in T eine Umgebung U gibt mit $\mathcal{F}|X_U \cong \mathcal{G}|X_U$. Daher folgen die Eigenschaften (D2) und (D4) aus (8.6) bzw. (4.11), wie man leicht sieht. Um die Eigenschaft (D3) nachzuweisen, benötigen wir die folgende Aussage.

(9.4) Satz: Sei $f : X \longrightarrow T$ eigentlich und $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul, welcher flach über T liegt. Dann gibt es einen kohärenten $\mathcal{O}_T$-Modul $\mathcal{L}$ und für jeden kohärenten $\mathcal{O}_T$-Modul $\mathcal{M}$ eine in $\mathcal{M}$ funktorielle Isomorphie

$$f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{L}, \mathcal{M}).$$

Der Modul $\mathcal{L}$ und diese Isomorphie sind dabei mit Basiserweiterungen verträglich. Ferner ist $\mathcal{F}$ genau dann kohomologisch flach über T in der Dimension 0, wenn $\mathcal{L}$ lokal frei ist.

Zum Beweis siehe EGA III, 7.7.6 und Remarque 7.7.9. Damit der dort gegebene Beweis sich auf den analytischen Fall überträgt, hat man noch [27] , 4.4.1 zu verwenden.

Zeigen wir nun die Eigenschaft (D3) aus (9.1). Offenbar reicht es, die folgende Aussage nachzuweisen: Ist T ein komplexer Raum über S und sind $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ invertierbare $\mathcal{O}_{X_T}$-Moduln, so ist der Funktor

$$F(R) = \begin{cases} \{\emptyset\} & \text{, falls } \mathcal{F}_R \text{ und } \mathcal{G}_R \text{ lokal isomorph} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

von der Kategorie <u>An</u>/T in die Kategorie der Mengen darstellbar durch einen lokal abgeschlossenen Unterraum W von T. Weil $\mathcal{F}_R$ und $\mathcal{G}_R$ genau dann lokal isomorph sind, wenn dies für $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}^{-1})_R$ und $\mathcal{O}_{X_R}$ gilt, dürfen wir uns beim Beweis o.E. auf den Fall $\mathcal{G} = \mathcal{O}_{X_T}$ beschränken. Sei $\mathcal{L}$ bzw. $\check{\mathcal{L}}$ der zu $\mathcal{F}$ bzw. $\check{\mathcal{F}} := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_T}}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{X_T})$ gehörige $\mathcal{O}_T$-Modul aus (9.4). Wir zeigen zunächst, daß der Funktor

$$G(R) = \begin{cases} \{\emptyset\} & \text{, falls } \mathcal{L}_R \text{ und } \check{\mathcal{L}}_R \text{ lokal frei vom gleichen Rang wie } f_{R*}(\mathcal{O}_{X_R}) \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

von der Kategorie <u>An</u>/T in die Kategorie der Mengen durch einen lokal abgeschlossenen Unterraum von T dargestellt werden kann. Da dies Problem lokal in T ist, dürfen wir o.E. annehmen, daß $f_{T*}(\mathcal{O}_{X_T})$ frei vom Rang n ist. Es bezeichne $\mathfrak{f}_r(\mathcal{L})$ das r-te Fittingideal von $\mathcal{L}$ (zum Begriff des Fittingideals vgl. etwa [25] p.145). Das Bilden des Fittingideals verträgt sich mit Basiserweiterungen. Ferner ist $\mathcal{L}_R$ genau dann lokal frei vom Rang n, wenn $\mathfrak{f}_n(\mathcal{L}_R)=0$ und $\mathfrak{f}_{n+1}(\mathcal{L}_R)= \mathcal{O}_R$ gilt. Daher wird offenbar G dargestellt durch den lokal abgeschlossenen Unterraum

$$W' := V(\mathfrak{f}_n(\mathcal{L})+\mathfrak{f}_n(\check{\mathcal{L}})) \setminus V(\mathfrak{f}_{n+1}(\mathcal{L})+\mathfrak{f}_{n+1}(\check{\mathcal{L}})) ,$$

versehen mit der Strukturgarbe $(\mathcal{O}_T/(\mathfrak{f}_n(\mathcal{L})+\mathfrak{f}_n(\check{\mathcal{L}})))|W'$.

Zeigen wir nun die Darstellbarkeit von F. Sind $\mathcal{F}_R$ und $\mathcal{O}_{X_R}$ lokal isomorph, so ist $\mathcal{F}_R$ insbesondere kohomologisch flach in der Dimension 0 und somit $\mathcal{L}_R$ ein lokal freier $\mathcal{O}_R$-Modul vom gleichen Rang wie $f_{R*}(\mathcal{O}_{X_R})$. F ist also ein Unterfunktor von G. Da G schon dargestellt werden kann durch einen lokal abgeschlossenen Unterraum von T, reicht es, die Darstellbarkeit von F für den Fall zu zeigen, daß $\mathcal{L}$ und $\check{\mathcal{L}}$ lokal frei sind. In dieser

Situation sind aber $\mathcal{F}$ und $\check{\mathcal{F}}$ kohomologisch flach in der Dimension 0. Wir betrachten die kanonische Paarung

$$f_{R*}(\mathcal{F}_R) \otimes_{\mathcal{O}_R} f_{R*}(\check{\mathcal{F}}_R) \xrightarrow{\varphi_R} f_{R*}(\mathcal{O}_{X_R})$$

Diese Paarung ist offenbar genau dann surjektiv, wenn $\mathcal{F}_R$ lokal isomorph zu $\mathcal{O}_{X_R}$ ist. Ferner sind diese Paarungen mit Basiserweiterungen verträglich, da die Moduln $\mathcal{F}$, $\check{\mathcal{F}}$ und $\mathcal{O}_X$ kohomologisch flach in der Dimension 0 sind. Folglich wird F durch den offenen Unterraum

$$T \setminus \mathrm{Tr}(\mathrm{Koker}\,\varphi)$$

von T dargestellt. Damit ist (9.3) vollständig bewiesen!

Literatur

1. Arnold,V.I.: Singularities of smooth mappings. Russian Math. Surveys 23 (1968), 1-43
2. Artin,M.: Algebraization of formal moduli: I. Global Analysis, pp. 21-71, Tokyo (1969)
3. Artin,M.: Versal Deformations and Algebraic Stacks. Inv. Math. 27 (1974), 165-189
4. Bingener,J., Flenner,H.: Steinsche Räume zu vorgegebenen Singularitäten. Erscheint demnächst.
5. Douady,A.: Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. Ann. Inst. Fourier 16 (1966), 1-95
6. Douady,A.: Le problème des modules locaux pour les espaces ℂ-analytiques compacts. Ann. sci. ENS 7 (1974), 569-602
7. Douady,A.: Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes (d'après M.Kuranishi). Séminaire Bourbaki, n° 277, décembre 1964
8. Elkik,R.: Algébrisation du module formel d'une singularité isolée. Asterisque 16 (1974), 133-145
9. Flenner,H.: Über die de Rham Kohomologie analytischer Algebren. J.f.d.r.u.a.Math. 301 (1978), 116-131
10. Forster,O., Knorr,K.: Konstruktion verseller Deformationen kompakter komplexer Räume. Preprint (1978)
11. Forster,O, Knorr,K.: Über die Deformationen von Vektorraumbündeln auf kompakten komplexen Räumen. Math. Ann. 209 (1974), 291-346
12. Forster,O, Knorr,K.: Ein Beweis des Grauertschen Bildgarbensatzes nach Ideen von B.Malgrange. Manuscripta Math. 5 (1971), 19-44
13. Galligo,A.: Théorème de division et stabilité en géométrie analytique locale. Thèse à l'Université de Nice (1977)
14. Godement,R.: Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Hermann, Paris (1964)
15. Grauert,H.: Über die Deformationen isolierter Singularitäten analytischer Mengen. Inv. Math. 15 (1972), 171-198
16. Grauert,H.: Der Satz von Kuranishi für kompakte komplexe Räume. Inv. Math. 25 (1974), 107-142

17. Grothendieck[illegible] analytique. [illegible]
18. Grothendieck,A.: [illegible] points d'algèbre homologique. Tohoku Math. J. 9 (1957), 119-221
19. Grothendieck,A., Dieudonné,J.: Eléments de géométrie algèbrique. Publ. Math. IHES 4,... (1960-67)
20. Hartshorne,R.: On the de Rham cohomology of algebraic varieties. Publ. Math. 45 (1975), 5-99
21. Hartshorne,R.: Residues and duality. Lecture Notes in Math. 20 (1966)
22. Horikawa,E.: On deformations of holomorphic maps I. J. Math. Soc. Japan 25 (1973), 372-396
23. Horikawa,E.: On deformations of holomorphic maps II. J. Math. Soc. Japan 26 (1974), 647-667
24. Illusie,L.: Complexe cotangent et déformations I,II. Lecture Notes in Math. 239 (1971), 283 (1972)
25. Kaplansky,I.: Commutative Rings. The University of Chicago Press (1970)
26. Kiehl,R.: Äquivalenzrelationen in analytischen Räumen. Math. Z. 105 (1968), 1-20
27. Kiehl,R., Verdier,J.L.: Ein einfacher Beweis des Kohärenzsatzes von Grauert. Math. Ann. 195 (1971) 24-50
28. Kodaira,K., Spencer,D.C.: On deformations of complex analytic structures I,II. Ann. of Math. 67 (1958), 328-466
29. Kodaira,K., Spencer,D.C.: On deformations of complex analytic structures III, Stability theorems for complex structures. Ann. of Math. 71 (1960), 43-76
30. Kodaira,K. Nirenberg,L., Spencer,D.C.: On the existence of deformations of complex analytic structures. Ann. of Math. 68 (1958), 450-459
31. Kramm,B.: Über Deformationen von analytischen Abbildungskeimen. Manuscripta Math. 10 (1973), 163-189
32. Kuranishi,M.: On locally complete families of complex analytic structures. Ann. [illegible] (1962), 536-577
33. Lichtenbaum,S. [illegible] complex of a morphism. Trans. [illegible]

34. Palamodov,V.P.: Deformations of oomplex spaoes. Russian Math. Surveys 31 (1976), 129-197

35. Pourcin,G.: Déformation de singularités isolées. Asterisque 16 (1974), 161-173

36. Pouroin,G.: Sous-espaoes privilégiés d'un polyoylindre. Ann. Inst. Fourier 25 (1975), 151-193

37. Pouroin,G.: Théorème de Douady au-dessus de S. Annali della Souola norm. sup. di Pisa 23 (1969), 451-459

38. Quillen,D.: On the (oo-)homology of oommutative rings. Proo. Symp. Pure Math. AMS 17 (1970), 65-87

39. Retakh,V.S.: The "universal" deformation of germs of holomorphio mappings.Funktional. anal. appl. 8 (1974), 80-81

40. Rim,D.S.: Formal deformation theory. Groupes de monodromie en géométrie algébrique exp.6. Leoture Notes in Math. 288 (1972)

41. Sohuster,H.W.: Zur Theorie der Deformationen kompakter komplexer Räume. Inv. Math. 9 (1969/70), 284-294

42. Sohuster,H.W.: Infinitesimale Erweiterungen komplexer Räume. Comm. Math. Helv. 45 (1970), 265-286

43. Serre,J.P.: Algèbre looale, Multiplioités. Leoture Notes in Math. 11 (1975)

44. Siu,Y.T.: Every Stein Subvariety Admits a Stein Neighborhood. Inv. Math. 38 (1976), 89-100

45. Tate,J.: Homology of noetherian rings and looal rings. Illinois J. Math. 1 (1957), 14-27

46. Trautmann,G.: Deformations and moduli of ooherent analytio sheaves with finite singularities. Fonotions de plusieurs variables oomplexes III, Sém. Norguet. Leoture Notes in Math. 670 (1978)

47. Verdier,J.L.: Catégories dérivées, état O. Cohomologie étale, SGA 4 1/2. Lecture Notes in Math. 569 (1977)