

Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Lehrstuhl II: Komplexe Geometrie



Konstruktion von $SL_2(\mathbb{R})$ -Ensembles mittels Poincaré-Metrik

Diplomarbeit

von

Kathrin Schaffert

geboren am 12. Oktober 1986 in Essen

betreut von Prof. Dr. Alan Huckleberry

Erstgutachter: Prof. Dr. Alan Huckleberry
Zweitgutachter: Prof. Dr. Peter Heinzner

Eingereicht am: 16. November 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Theoretische Vorbemerkungen	7
2.1	Lie-Gruppen und ihre Wirkungen	7
2.2	Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe	21
2.3	Homogene Räume	23
2.4	Komplexe Differentialformen	29
3	Ein „perfekter“ Slice	32
3.1	Die Niveauflächen der Determinantenabbildung	33
3.2	Die Bahnen der Adjungierten Wirkung auf $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$	34
3.3	Die Isotropiegruppen der Adjungierten Wirkung	40
3.4	Die Eigentlichkeit der Adjungierten Wirkung	42
4	Invariante Strukturen auf G-Mannigfaltigkeiten	49
4.1	Invariante Hermitesche Metriken	49
4.2	Die Poincaré-Metrik und die Poincaré'sche Abstandsfunktion	52
4.3	Die invariante Struktur auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ und $\Delta \times \Delta$	57
5	Konstruktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf dem Kegel der elliptischen Elemente	59
5.1	Die Momentum-Abbildung	59
5.2	Plurisubharmonizität des Poincaré-Abstandes	62
5.3	Das Bild von μ	69
5.4	Das Bildmaß der Gleichverteilung	77
5.5	Ausblick	85
	Literaturverzeichnis	87
	Selbstständigkeitserklärung	89

1 Einleitung

Ziel des Projektes ist es, eine Methode zur Konstruktion invarianter Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Mengen von Operatoren vorzustellen. Derartige Anordnungen tauchen zahlreich bei der Lösung quantenmechanischer Probleme auf. Die gesuchten mathematischen Objekte nennt man Ensembles. In der mathematischen Modellierung sind die Operatoren Elemente der Lie-Algebra $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$ der reell symplektischen Gruppe $Sp_{2n}(\mathbb{R})$.

Man unterscheidet physikalisch zwischen Teilchen mit ganzzahligem Spin, genannt Bosonen, und Teilchen mit halbzahligem Spin, genannt Fermionen. In fermionischen Systemen ist die relevante Symmetriegruppe die kompakte unitäre Gruppe $U(n)$ bzw. kompakte Untergruppen dieser. Wahrscheinlichkeitsverteilungen vom Typ der Gauß-Verteilung lassen sich schnell finden. Hingegen sind in Bosonischen Systemen derartige Verteilungen schwerer zu ermitteln. Die Symmetriegruppe ist in diesem Fall die symplektische Gruppe $Sp_{2n}(\mathbb{R})$. Sie ist nicht kompakt. Unter einer nicht kompakten Gruppenwirkung kann ein Wahrscheinlichkeitsmaß $d\mu$ allerdings nicht invariant sein und gleichzeitig totales Maß $\int d\mu = 1$ haben. Die optimale zu erwartende Symmetrie eines solchen Maßes ist die Invarianz bezüglich der maximalen kompakten Untergruppe $U(n)$.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Bosonischen Fall. Die Idee ist es, das gewünschte Wahrscheinlichkeitsmaß als Bildmaß einer Momentum Abbildung μ zu konstruieren. Unter bestimmten Voraussetzungen kann die Existenz einer Momentum-Abbildung bewiesen werden. Dazu wird eine symplektische Mannigfaltigkeit (X, ω) benötigt. Desweiteren ist auf X eine Gruppenwirkung der reell symplektischen Gruppe $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ gegeben, welche die symplektische Struktur erhält. Die Momentum-Abbildung ordnet dann jedem Punkt der Mannigfaltigkeit X ein Element aus dem Dualraum der zugehörigen Lie-Algebra $\mathfrak{sp}_{2n}^*(\mathbb{R})$ zu, welcher mit $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$ identifiziert werden kann.

Oben beschriebenes Verfahren wird in dieser Arbeit exemplarisch für den Fall $n = 1$ durchgeführt. Alle hierzu notwendigen Grundlagen sind in Kapitel 2 überschaubar zusammengefasst. Es gilt, eine „geeignete“ Teilmenge \mathcal{E} der Lie-Algebra $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$ zu finden, die Menge der elliptischen Elemente. Dies wird Schwerpunkt in Kapitel 3 sein. In Kapitel 4 wird die Konstruktion einer invarianten Struktur im Mittelpunkt stehen. Auf der oberen Halbebene \mathbb{H} bzw. der dazu homöomorphen Einheitskreisscheibe Δ lässt sich eine invariante Metrik leicht berechnen. Diese ist eindeutig durch die Poincaré-Metrik gegeben. Hieraus wird die Poincaré'sche Abstandsfunktion d_P ermittelt. Die symplektische Mannigfaltigkeit wird das Produkt zweier Einheitskreisscheiben ohne die Diagonale $(\Delta \times \Delta) \setminus \Delta$ sein.

Im Kernteil der Arbeit, dem 5. Kapitel, wird u.a. gezeigt werden, dass durch die Poincaré'sche Abstandsfunktion eine symplektische Form $\omega = \partial\bar{\partial}d_P$ auf $(\Delta \times \Delta) \setminus \Delta$ induziert wird. Die so erhaltene symplektische Mannigfaltigkeit wird sich als geeignete Urbildmenge der Momentum-Abbildung erweisen. Die Momentum-Abbildung wird dann konkret berechnet und auf ganz $\Delta \times \Delta$ stetig fortgesetzt werden. Als Anwendungsbeispiel soll abschließend das Bildmaß der Gleichverteilung auf $\Delta \times \Delta$ bestimmt werden.

2 Theoretische Vorbemerkungen

Wie in der Einleitung erwähnt, spielen die Symmetriegruppen bei der Betrachtung physikalischer Systeme eine bedeutende Rolle. Unter der Symmetriegruppe versteht man eine Menge von Diffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit M , welche die geometrische Struktur der Mannigfaltigkeit, wie zum Beispiel eine Norm oder Metrik, erhalten. Bei der mathematischen Betrachtung stellt sich heraus, dass es sich bei den physikalisch relevanten Symmetrien in der Regel um Lie-Gruppen handelt. Dieses Kapitel ist daher u.a. dem näheren mathematischen Verständnis von Lie-Gruppen gewidmet. Daneben werden alle notwendigen Voraussetzungen zum weiteren Verständnis dieser Arbeit geschaffen. Diese Grundlagen sind unter Zuhilfenahme der Büchern [LEE], [FG] und [RE] entstanden.

2.1 Lie-Gruppen und ihre Wirkungen

Zunächst werden die Begriffe der Lie-Gruppe und der Gruppenwirkung eingeführt und anhand einiger Beispiele erläutert. Von besonderer Bedeutung für diese Arbeit ist die Betrachtung der symplektischen Gruppe, die aus diesem Grund ausführlicher diskutiert werden soll. Desweiteren werden in diesem Kapitel der Bahnenraum und die Isotropiegruppen eingeführt und im Verlauf gezeigt, dass es sich bei den Isotropiegruppen um differenzierbare Mannigfaltigkeiten handelt.

Definition: Mannigfaltigkeit

Eine reelle oder komplexe glatte *Mannigfaltigkeit* M der Dimension n ist ein Hausdorff Raum mit einer abzählbaren Basis, welcher eine reelle oder komplexe glatte Struktur besitzt. D.h. es gibt einen maximalen Atlas $\mathcal{A} = (U_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in I}$, sodass alle Kartenwechsel

$$x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

diffeomorph bzw. biholomorph sind. Die Mengen U_α sind offene Teilmengen von M und ihre Vereinigung ist $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Die Abbildungen

$$x_\alpha : U_\alpha \rightarrow x_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \text{ bzw. } \mathbb{C}^n$$

sind Homöomorphismen. Sie werden *Karten* oder *lokale Koordinaten* von M genannt.

Eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit N einer reellen Mannigfaltigkeit M ist eine Teilmenge $N \subset M$, welche eine mit den Karten von M verträgliche Struktur besitzt, d.h. es existiert eine Teilmenge $J \subset I$, sodass

1. Für alle $\alpha \in J$ gilt $x_\alpha(U_\alpha \cap N) = x_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}$
2. $\bigcup_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap N) = N$

Es seien M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $F : M \rightarrow N$ heißt *glatt*, wenn ihre Koordinatendarstellung \hat{F} unendlich-oft stetig differenzierbar ist. Dabei ist $\hat{F} := y \circ F \circ x^{-1}$ für zwei Karten (U, x) von M und (V, y) von N mit $F(U) \subset V$.

Eine Mannigfaltigkeit kann in jedem Punkt $p \in M$ linear approximiert werden durch den *Tangentialraum* $T_p M$ in diesem Punkt. Die Tangentialvektoren sind numerische Derivationen. Eine *Derivation* im Punkt $p \in M$ ist eine lineare Abbildung $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf$$

für alle $f, g \in C^\infty(M)$. Dabei wird mit $C^\infty(M)$ die Menge aller glatten reellwertigen Funktionen auf M bezeichnet.

Ist (U, x) eine Koordinatenkarte von M mit $p \in U$, dann bildet das System

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right)$$

eine Basis des $T_p M$, wobei sich

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p f := \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x(p)} f \circ x^{-1}$$

für alle $i = 1, \dots, n$ als partielle Ableitungen interpretieren lassen.

Für eine komplexe Mannigfaltigkeit M mit holomorphen Koordinaten $z = (z_1, \dots, z_n)$ und $z_k = x_k + iy_k$ ist der Tangentialraum ein $2n$ -dimensionaler reeller Vektorraum mit Basisvektoren

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_p \quad \text{für } k = 1, \dots, n$$

Die \mathbb{R} -lineare Abbildung $J : T_p M \rightarrow T_p M$ mit

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p\right) := \frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_p, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_p\right) := -\frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p$$

definiert die Multiplikation mit i auf dem Tangentialraum. Sie wird auch die *komplexe Struktur* auf $T_p M$ genannt. Für alle $X_p \in T_p M$ gilt

$$(a + ib)X_p := aX_p + J(X_p)$$

Man definiert die „komplexen“ Differentialoperatoren durch

$$\frac{\partial}{\partial z_k} \Big|_p := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p - i \frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_p \right)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \Big|_p := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p + i \frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_p \right)$$

Sie sind nicht reellwertig und somit auch keinen Tangentialvektoren. Jedoch lässt sich jede Derivation als Linearkombination der $\frac{\partial}{\partial z_k}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$ darstellen. Anwenden der komplexen Struktur liefert

$$J\left(\frac{\partial}{\partial z_k} \Big|_p\right) := i \frac{\partial}{\partial z_k} \Big|_p, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \Big|_p\right) := -i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \Big|_p \quad (2.1)$$

Jeder n -dimensionale reelle Vektorraum kann zu einem n -dimensionalen komplexen Vektorraum erweitert werden.

Definition: Komplexifizierung

Sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum. Die *Komplexifizierung* von V ist der reelle $2n$ -dimensionale Vektorraum $V^{\mathbb{C}} := V \oplus V$, zusammen mit der komplexen Struktur $J : V^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{\mathbb{C}}$, welche definiert wird durch

$$J(v, w) := (-w, v) \quad (2.2)$$

Außerdem definiert man die Konjugation C auf $V^{\mathbb{C}}$ durch

$$C(v, w) := (v, -w) \quad (2.3)$$

Ein Beispiel wird am Ende des Abschnitts 2.3 gegeben werden.

Alternativ zu obiger Definition der Tangentialvektoren als Derivationen, kann man den Tangentialraum auch mittels Kurven einführen. Dazu sei $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve mit $\gamma(0) = p$. Dann induziert γ eine lineare Abbildung $\dot{\gamma}(0)$ durch

$$\dot{\gamma}(0)(f) := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ \gamma(t)$$

wobei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine in p differenzierbare Abbildung ist. Dies liefert die folgende äquivalente Darstellung des $T_p M$

$$T_p M := \{ \dot{\gamma}(0); \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \text{ mit } \gamma(0) = p \}$$

Definition: transversale Untermannigfaltigkeiten

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Zwei Untermannigfaltigkeiten $S_1, S_2 \subset M$ heißen *transversal*, falls für alle Punkte $p \in S_1 \cap S_2$ gilt $T_p S_1 + T_p S_2 = T_p M$.

Der Schnitt $S_1 \cap S_2$ ist eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $\dim(S_1 \cap S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(M)$ von M . Falls $\dim(S_1) + \dim(S_2) = \dim(M)$, so verlangt man, dass $S_1 \cap S_2$ einelementig ist.

Die disjunkte Vereinigung der Tangentialräume wird *Tangentialbündel* genannt und mit TM bezeichnet:

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M$$

Das Tangentialbündel kann mit einer glatten Struktur versehen werden, sodass TM zu einer $2n$ -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit wird. Man betrachtet hierzu die natürliche Projektion $\pi : TM \rightarrow M$ mit $(p, X_p) \mapsto p$. Es sei $\mathcal{A} = (U_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein maximaler Atlas von M . Dann ist das System $\{\pi^{-1}(U_\alpha)\}$ eine offene Überdeckung von TM bezüglich der von π coinduzierten Topologie auf TM . Unter einer Topologie versteht man ein System offener Mengen auf einem mathematischen Raum.

Ist (U, x) eine Karte von M , so wird durch $(\pi^{-1}(U), \varphi)$ mit

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p\right) = (x_1(p), \dots, x_n(p), v_1, \dots, v_n)$$

eine Karte von TM definiert. Ihr Bildbereich ist $x(U) \times \mathbb{R}^n$ und somit eine Teilmenge des \mathbb{R}^{2n} . Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x^{-1}(x_1, \dots, x_n)}$$

Durch den Atlas $(\pi^{-1}(U_\alpha), \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ wird eine glatte Struktur auf TM definiert.

Ein Vektorfeld auf M ist ein glatter Schnitt im Tangentialbündel TM . Mit anderen Worten ist ein Vektorfeld eine glatte Abbildung $X : M \rightarrow TM, p \mapsto X_p$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $p \in M$ der Funktionswert X_p aus dem Tangentialraum $T_p M$ im Punkte p ist. Die Menge aller Vektorfelder auf M wird mit $V(M)$ bezeichnet.

Es sei $U \subset M$ eine offene Menge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung. Dann induziert das Vektorfeld $X \in V(M)$ eine Abbildung $Xf : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$Xf(p) := X_p(f)$$

Für jeden Punkt $p \in M$ gibt es eine Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = X_p$. Dann ist

$$X_p(f) = \dot{\gamma}(0)(f)$$

Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Für jedes $p \in M$ definiert man den *Pushforward* von F durch $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ mit

$$(F_* X_p)(f) = X_p(f \circ F)$$

wobei f eine beliebige glatte Funktion auf N ist und $X_p \in T_p M$.

Ist F ein Diffeomorphismus, so wird durch $q \mapsto F_*(X_{F^{-1}(q)})$ ein eindeutiges Vektorfeld auf N definiert, genannt das *Pushforward Vektorfeld* $F_* X$.

Eigenschaften des Pushforward (vgl. ([LEE]: chap.3, p.66))

Seien $F : M \rightarrow N$ und $G : N \rightarrow P$ glatte Abbildungen und $p \in M$.

- $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ ist eine lineare Abbildung
- $(G \circ F)_* = G_* \circ F_* : T_p M \rightarrow T_{G \circ F(p)} P$
- $(Id_M)_* = Id_{T_p M} : T_p M \rightarrow T_p M$
- Falls F ein Diffeomorphismus ist, so ist F_* ein Isomorphismus

Seien (x_1, \dots, x_m) und (y_1, \dots, y_n) lokale Koordinaten von M bzw. N .

Für einen Basisvektor $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \in T_p M$ gilt

$$\begin{aligned} F_* \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p f &= \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p f \circ F = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x(p)} f \circ F \circ x^{-1} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x(p)} y_j \circ F \circ x^{-1} \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{F(p)} f \end{aligned}$$

Der *Rang* einer glatten Abbildung $F : M \rightarrow N$ im Punkt $p \in M$ wird durch den Rang der linearen Abbildung $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ definiert. Dies ist in lokalen Koordinaten gerade der Rang der Jacobi-Matrix $D(y \circ F \circ x^{-1})(x(p))$.

Definition: Holomorphe Abbildung

Es seien X und Y komplexe Mannigfaltigkeiten mit zugehörigen komplexen Strukturen J_X und J_Y . Eine glatte Abbildung $F : X \rightarrow Y$ heißt *holomorph*, falls gilt

$$F_* \circ J_X = J_Y \circ F_*$$

Lemma 2.1.1 (Semi-Stetigkeit des Rangs)

Es sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und $p_0 \in M$ ein beliebiger Punkt. Dann gibt es eine Umgebung U_0 von p_0 , sodass

$$\text{Rang}_p(F) \geq \text{Rang}_{p_0}(F)$$

für alle $p \in U_0$.

Beweis:

In lokalen Koordinaten ist $DF(p)$ eine Matrix, die glatt in p variiert. F hat in p_0 Rang r genau dann, wenn es eine $(r \times r)$ -dimensionale Untermatrix M_{p_0} von $DF(p_0)$ gibt, mit $\det(M_{p_0}) \neq 0$ und für jede $(r+1) \times (r+1)$ -dimensionale Untermatrix N_{p_0} gilt $\det(N_{p_0}) = 0$. Aus der Stetigkeit von $DF(p)$ folgt $\det(M_p) \neq 0$ für alle p in der Nähe von p_0 . Daher ist $\text{Rang}_p(F) \geq r$ für alle p in einer Umgebung U_0 . \square

Definition: Lie-Gruppe

Eine Gruppe G heißt *Lie-Gruppe*, falls G eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer differenzierbaren Gruppenstruktur ist, d.h. die Abbildungen $m : G \times G \rightarrow G$ und $i : G \rightarrow G$ mit

$$m(g, h) = gh, \quad i(g) = g^{-1} \quad (2.4)$$

sind differenzierbar.

Es gibt vielfältige Beispiele für Lie-Gruppen. Klassisches Beispiel ist die Gruppe der reellen (oder komplexen) $n \times n$ -Matrizen mit vollem Rang, genannt die *allgemeine lineare Gruppe* $GL_n(\mathbb{R})$. Sie ist eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation und eine offene n^2 -dimensionale Untermannigfaltigkeit des Vektorraumes aller $n \times n$ -Matrizen $M(n, \mathbb{R})$. Die Matrizenmultiplikation ist differenzierbar, da die Einträge der Produktmatrix AB Polynome der Einträge von A und B sind. Da sich mit Hilfe der Cramer'schen Regel die Einträge von A^{-1} als rationale Funktionen der Einträge von A ausdrücken lassen, ist die Inversion ebenfalls differenzierbar.

Untergruppen von Lie-Gruppen, welche gleichzeitig eingebettete Untermannigfaltigkeiten sind, sind abgeschlossene Lie-Untergruppen.

Zahlreiche Lie-Gruppen lassen sich als eingebettete Untergruppen konstruieren. Zu diesen gehört auch die *reell symplektische Gruppe* $Sp_{2n}(\mathbb{R})$, die wesentliche Grundlage dieser Arbeit sein wird. Sie ist eine Lie-Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $GL_{2n}(\mathbb{R})$. Als reell symplektische Gruppe bezeichnet man die Menge aller $2n \times 2n$ -Matrizen, welche die symplektische Standardform $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ invariant lassen. Anders ausgedrückt sind dies alle invertierbaren Abbildungen $A : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ mit der Eigenschaft $\omega(Av, Aw) = \omega(v, w)$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^{2n}$. Die Darstellungsmatrix der Standardform ist gegeben durch die Blockmatrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & Id_n \\ -Id_n & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Eine Matrix A ist genau dann aus $Sp_{2n}(\mathbb{R})$, wenn die Gleichung $A^T J A = J$ erfüllt ist. In diesem Fall gilt $\det(A) = 1$. Die symplektische Gruppe lässt sich demnach wie folgt darstellen

$$Sp_{2n}(\mathbb{R}) = \{A \in SL_{2n}(\mathbb{R}); A^T J A = J\} \quad (2.6)$$

Für den Spezialfall $n = 1$ lässt sich sogar die Gleichheit $Sp_2(\mathbb{R}) \cong SL_2(\mathbb{R})$ nachweisen. Sei dazu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp_2(\mathbb{R}) \quad (2.7)$$

dann folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned} A^T J A &= \begin{pmatrix} 0 & ad - bc \\ bc - ad & 0 \end{pmatrix} = J \\ \Leftrightarrow & ad - bc = 1 \\ \Leftrightarrow & \det(A) = 1 \\ \Leftrightarrow & A \in SL_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Die Gruppen $Sp_2(\mathbb{R})$ und $SL_2(\mathbb{R})$ sind isomorph.

Definition: Gruppenwirkung

Sei G eine Gruppe und M eine Menge. Eine *Gruppenwirkung* von G auf M ist eine Abbildung $G \times M \rightarrow M, (g, p) \mapsto g(p)$ mit den folgenden Eigenschaften

- (1) $g_1(g_2(p)) = (g_1 g_2)(p) \quad \forall g_1, g_2 \in G, p \in M$
- (2) $e(p) = p \quad \forall p \in M$

Dabei wird mit e das neutrale Element in G bezeichnet.

Falls M eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer glatten Lie-Gruppen-Wirkung G ist, bezeichnet man M auch als *G -Raum*.

Sei M ein G -Raum. Dann ist für jedes $g \in G$ die Abbildung $\phi_g : M \rightarrow M$ mit $\phi_g(p) = g(p)$ ein Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung $\phi_{g^{-1}}$.

Um die Gruppenwirkung von g auf ein Element p zu kennzeichnen, wird in dieser Arbeit auch die Notation $g.p$ anstatt $g(p)$ verwendet.

Für jedes $p \in M$ wird der *Orbit* oder die *Bahn* von p unter G definiert durch

$$G.p := \{g(p); g \in G\} \quad (2.8)$$

Als *Isotropiegruppe* von p bezeichnet man die Menge aller Punkte $g \in G$, welche den Punkt p fixieren, d.h.

$$G_p := \{g \in G; g(p) = p\} \quad (2.9)$$

Die Orbits definieren eine Partition von M durch die Relation

$$\begin{aligned} p \sim q : & \iff \exists g \in G; g(p) = q \\ & \iff q \in G.p \end{aligned}$$

Die Äquivalenzklassen sind also genau die Bahnen von G . Die Menge der Bahnen bezeichnet man mit M/G . Die surjektive Abbildung

$$\pi : M \rightarrow M/G; p \mapsto G.p$$

wird *kanonische Projektion* genannt. Sie induziert eine Topologie auf M/G durch

$$V \subset M/G \text{ offen} \iff \pi^{-1}(V) \text{ offen in } M$$

Im obigen Fall wird diese auch *Quotiententopologie* genannt. Zusammen mit dieser Topologie nennt man M/G den *Bahnenraum* der Wirkung. Um den Bahnenraum mit einer differenzierbaren Struktur auszustatten, müssen zusätzlich einschränkende Bedingungen an die Gruppenwirkung gestellt werden.

Eine Gruppe operiert *transitiv* auf M , wenn für je zwei Punkte $p, q \in M$ ein Gruppenelement $g \in G$ existiert, sodass $g(p) = q$ gilt. Anders formuliert ist der Orbit von jedem Punkt ganz M , d.h. $G.p = M$ für jedes $p \in M$. Die Wirkung wird *frei* genannt, falls $G_p = \{e\}$ für alle $p \in M$.

Lie-Gruppen wirken *glatt, frei und transitiv* auf sich selbst durch Links- oder Rechtsmultiplikation. Durch Einschränkung der Multiplikation auf eine Lie-Untergruppe $H \subset G$ wird eine glatte und freie Wirkung von H auf G definiert. Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung $L_g : G \rightarrow G$ mit $L_g(h) = gh$ ein Diffeomorphismus, genannt die *Linkstranslation*. Analog definiert man die *Rechtstranslation*. In ähnlicher Weise wirkt jede Lie-Gruppe durch *Konjugation* glatt auf sich selbst. Die Konjugation wird erklärt durch die Abbildung $G \times G \rightarrow G$ mit $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$. Für jedes $h \in G$ ist die Isotropiegruppe G_h die Menge aller Elemente von G , die mit h kommutieren, d.h. $gh = hg$.

Im Verlauf der Arbeit werden weitere Lie-Gruppen-Wirkungen auf Mannigfaltigkeiten ihre Anwendung finden. Von besonderer Bedeutung sind dabei *eigentliche Wirkungen*.

Definition: Eigentliche Wirkung

Sei M eine Mannigfaltigkeit mit einer glatten Lie-Gruppen-Wirkung G . Die Gruppenwirkung heißt *eigentlich*, falls die Abbildung $\phi : G \times M \rightarrow M \times M$ mit $(g, p) \mapsto (g(p), p)$ eigentlich ist.

Dabei nennt man eine stetige Abbildung F zwischen zwei topologischen Räumen *eigentlich*, falls für jede kompakte Teilmenge K die Urbildmenge $F^{-1}(K)$ kompakt ist.

Eine direkte Folgerung aus der Definition wird im nachfolgendem Korollar formuliert.

Korollar 2.1.2

Es sei G eine eigentliche Lie-Gruppen-Wirkung auf einer Mannigfaltigkeit M , dann ist die Isotropiegruppe G_p für jedes $p \in M$ kompakt.

Beweis:

Die Abbildung $\phi : G \times M \rightarrow M \times M$ mit $(g, p) \mapsto (g(p), p)$ ist eigentlich, das heißt Urbilder kompakter Mengen sind kompakt.

Sei $p \in M$ beliebig. Die Punktmenge $K := \{p\} \times \{p\} \subset M \times M$ ist kompakt. Somit folgt, dass $\phi^{-1}(K) = G_p \times \{p\}$ kompakt ist. Dann ist aber auch G_p kompakt. \square

Um die Eigentlichkeit einer Gruppenwirkung zu zeigen, ist es oft hilfreich die nachstehende äquivalente Charakterisierung zu verwenden.

Satz 2.1.3

Sei M eine Mannigfaltigkeit mit einer glatten Lie-Gruppen-Wirkung G . Die Wirkung ist eigentlich genau dann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

Ist $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in M und $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in G , sodass $(g_i(p_i))_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert, dann existiert eine konvergente Teilfolge $(g_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Beweis:

Es wird nachfolgende Tatsache benutzt (vgl. z.B. ([LEE]: Appendix, p.553)):

Ist M ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis, so sind die folgenden Aussagen äquivalent

- i) M ist kompakt
- ii) Jede Folge in M besitzt eine konvergente Teilfolge

Es folgt nun der Beweis des Satzes.

„ \Rightarrow “: Es sei $(p_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset M$ eine konvergente Folge in M mit $p_i \rightarrow p$ und $(g_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset G$ eine Folge in G mit $g_i(p_i) \rightarrow y$. Betrachte

$$K = \{(g_i(p_i), p_i); i \in \mathbb{N}\} \cup \{(y, p)\}$$

Da die Folgen $g_i(p_i)$ und p_i konvergieren, liegen in jeder offenen Umgebung von (y, p) unendlich viele Folgenglieder und endlich viele außerhalb. Es reichen folglich endlich viele Umgebungen aus um K zu überdecken. Somit ist K kompakt. Aus der Eigentlichkeit der Wirkung folgt, dass die Urbildmenge

$$\phi^{-1}(K) = \{(g_i, p_i); i \in \mathbb{N}\} \cup \{(g, p) \in G \times M; g(p) = y\}$$

kompakt ist, d.h. die Folge $(g_i, p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(g_{i_k}, p_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Somit existiert eine konvergente Teilfolge von g_i mit $g_{i_k} \rightarrow g$. Insbesondere erhält man aus der Stetigkeit der Gruppenwirkung $g_{i_k}(p_{i_k}) \rightarrow g(p) = y$.

„ \Leftarrow “: Sei $K \times K' \subset M \times M$ kompakt. Dann ist

$$\phi^{-1}(K \times K') = \{(g, p) \in G \times M; g(p) \in K \text{ und } p \in K'\}$$

Sei $(g_i, p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\phi^{-1}(K \times K')$. Somit ist $(g_i(p_i), p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $K \times K'$. Da $K \times K'$ kompakt ist, gibt es konvergente Teilfolgen $(g_{i_k}(p_{i_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ und $(p_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $g_{i_k}(p_{i_k}) \rightarrow y \in K$ und $p_{i_k} \rightarrow p \in K'$. Nach Voraussetzung existiert eine konvergente Teilfolge $g_{i_{k_l}} \rightarrow g$. Die Folge $(g_{i_{k_l}}, p_{i_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ ist somit eine konvergente Teilfolge in $\phi^{-1}(K \times K')$. \square

Beispielsweise ist die Wirkung einer Lie-Gruppe G auf sich selbst durch Linksmultiplikation eigentlich. Dies folgt sofort aus der Stetigkeit der Multiplikation und Inversion auf G . Ist K eine kompakte Lie-Gruppe, so folgt aus der Tatsache, dass jede Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt, sofort, dass jede glatte Wirkung von K auf einer beliebigen Mannigfaltigkeit M eigentlich ist.

Es können nun hinreichende Bedingungen formuliert werden, unter denen der Quotientenraum M/G zu einer glatten Mannigfaltigkeit wird. Der Beweis kann in ([LEE]: chap.9; p.218) nachgelesen werden.

Satz 2.1.4

Es sei G eine Lie-Gruppe, die glatt, frei und eigentlich auf einer glatten Mannigfaltigkeit M operiert. Dann ist der Bahnenraum M/G eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim(M) - \dim(G)$. Es existiert eine eindeutige glatte Struktur, sodass die Quotientenabbildung $\pi : M \rightarrow M/G$ eine glatte Abbildung konstanten Rangs ist.

Definition: G -Äquivarianz

Es seien M und N zwei glatte G -Räume. Eine Abbildung $F : M \rightarrow N$ heißt *äquivariant* bezüglich der G -Wirkung, falls für jedes $g \in G$ gilt

$$F(g.p) = g.F(p) \tag{2.10}$$

An dieser Stelle soll der Satz vom Rang im Kontext differenzierbarer Mannigfaltigkeiten formuliert werden. Ein Beweis befindet sich in ([LEE]: chap.7; p.167).

Satz vom Rang für Mannigfaltigkeiten

Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n . Desweiteren sei eine glatte Abbildung $F : M \rightarrow N$ mit konstantem Rang k gegeben. Dann gibt es für jeden Punkt $p \in M$ Koordinaten (U, x) in der Nähe von p und (V, y) in der Nähe von $F(p)$, sodass F in diesen Koordinaten folgende Gestalt hat

$$\hat{F}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \tag{2.11}$$

Dabei ist $\hat{F} = y \circ F \circ x^{-1}$ die Koordinatendarstellung von F .

Folgender Satz lässt sich nun zeigen:

Satz 2.1.5

Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten mit einer glatten Lie-Gruppen-Wirkung G , welche transitiv auf M wirkt. Sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. F sei äquivariant bezüglich der G -Wirkung auf M und N . Dann hat F konstanten Rang k . Insbesondere sind die Fasern von F abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten von M der Dimension $m - k$.

Beweis:

Sei $p_0 \in M$ beliebig. Für jeden Punkt $p \in M$ existiert ein $g \in G$ mit $g(p_0) = p$. Da $g.F(p_0) = F(g.p_0)$ kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_{p_0}M & \xrightarrow{F_*} & T_{F(p_0)}N \\ g_* \downarrow & & \downarrow g_* \\ T_pM & \xrightarrow{F_*} & T_{F(p)}N \end{array}$$

Da die G -Wirkung auf M bzw. N ein Diffeomorphismus ist, ist der Pushforward g_* ein Isomorphismus. Der Rang von F_* in einem beliebigen Punkt p entspricht somit dem Rang von F_* im Punkt p_0 . Mit anderen Worten hat F konstanten Rang.

Aus dem Satz vom Rang folgt, dass die Fasern $F^{-1}(q)$ Untermannigfaltigkeiten von M sind. Denn sei $p \in F^{-1}(q)$. Dann gibt es glatte Koordinaten (U, x) in der Nähe von p und (V, y) in der Nähe von $q = F(p)$, sodass in diesen Koordinaten

$$\hat{F}^{-1}(y(q)) \cap x(U) = \{(x_1, \dots, x_m) \in x(U); x_1 = \dots = x_k = const\}$$

Insbesondere sind die Fasern einer glatten Abbildung immer abgeschlossen. □

Für jedes $p \in M$ definiert man die *Bahnabbildung* $\alpha^{(p)} : G \rightarrow M$ durch $g \mapsto g(p)$. Die Abbildung ist glatt als Komposition von $G \xrightarrow{(id,p)} G \times M \xrightarrow{g(p)} M$. Ihr Bild ist die G -Bahn von p und die Fasern $G_p = (\alpha^{(p)})^{-1}(p)$ sind die Isotropiegruppen. Folgende Rechnung

$$\alpha^{(p)}(g'g) = (g'g).p = g'.(g.p) = g'.\alpha^{(p)}(g) \tag{2.12}$$

zeigt, dass $\alpha^{(p)}$ äquivariant ist bezüglich der Linksmultiplikation von G auf sich selbst und der gegebenen Gruppenwirkung auf M . Somit folgt aus Satz 2.1.5, dass die Isotropiegruppe G_p im Punkt $p \in M$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von G ist. Da G_p auch eine Gruppe ist, ist G_p eine Lie-Untergruppe von G .

Für jedes $g \in G$ und einen beliebigen Punkt $p \in M$ gilt

$$G_{g(p)} = \{h \in G; g^{-1}hg(p) = p\} = gG_pg^{-1}$$

Somit sind die Lie-Gruppen $G_{g(p)}$ und G_p isomorph.

Eine glatte Abbildung $F : M \rightarrow N$ heißt *Immersion*, falls F_* in jedem Punkt injektiv ist oder äquivalent dazu $\text{Rang}(F) = \dim(M)$.

Aus dem Satz vom Rang folgt unmittelbar:

Korollar 2.1.6

Für eine glatte Abbildung $F : M \rightarrow N$ mit konstantem Rang gilt

Ist F injektiv, so ist F eine Immersion.

Zum Abschluss dieses Unterkapitels soll der Fokus auf kompakten Gruppenwirkungen auf Mannigfaltigkeiten und insbesondere auf deren Quotienten liegen.

Satz 2.1.7

Es sei M ein topologischer Raum und K eine kompakte Gruppe mit einer stetigen Gruppenwirkung auf M . Dann ist die kanonische Projektion

$$\begin{aligned} \pi : M &\rightarrow M/K \\ p &\mapsto [p] = \{\tilde{p} \in M \mid \exists k \in K : k(p) = \tilde{p}\}, \end{aligned}$$

stetig und eigentlich. Dabei ist M/K mit der Quotiententopologie versehen.

Beweis:

Die Quotiententopologie gewährleistet die Stetigkeit von π .

Sei nun $\tilde{K} \subset M/K$ kompakt. Zu zeigen ist, dass $\pi^{-1}(\tilde{K})$ kompakt ist.

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\tilde{K}) &= \{p \in M \mid \exists [\tilde{p}] \in \tilde{K} \text{ mit } p \in [\tilde{p}]\} \\ &= \{p \in M \mid \exists [\tilde{p}] \in \tilde{K} \exists k \in K \text{ mit } k(\tilde{p}) = p\} \end{aligned}$$

Sei p_i eine Folge in $\pi^{-1}(\tilde{K})$. Dann gibt es eine Folge $[\tilde{p}_i]$ in \tilde{K} und eine Folge k_i in K mit $k_i(\tilde{p}_i) = p_i$. Da \tilde{K} und K kompakt sind, gibt es konvergente Teilfolgen. Nach Einschränkung auf eine gemeinsame Indexmenge folgt

$$\begin{aligned} [\tilde{p}_{i_j}] &\rightarrow [\tilde{p}] \in \tilde{K} \\ k_{i_j} &\rightarrow k \in K \end{aligned}$$

Da die Gruppenwirkung stetig ist, gibt es folglich auch eine konvergente Teilfolge $p_{i_j} = k_{i_j}(\tilde{p}_{i_j})$ mit Grenzwert

$$\lim_{j \rightarrow \infty} p_{i_j} = k(\tilde{p}) =: p \in \pi^{-1}(\tilde{K})$$

□

Satz 2.1.8

Es seien M, N topologische Räume und K eine kompakte Gruppe mit einer stetigen Wirkung $K \times M \rightarrow M$ auf M . Desweiteren sei eine stetige K -invariante Abbildung $\varphi : M \rightarrow N$ gegeben. Dann existiert eine stetige Abbildung $\tau_\varphi : M/K \rightarrow N$ mit $\varphi = \tau_\varphi \circ \pi$. Oder anders formuliert, das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi} & M/K \\ \varphi \downarrow & & \swarrow \tau_\varphi \\ N & & \end{array}$$

Diese Eigenschaft wird als *Universelle Eigenschaft* des Quotienten bezeichnet.

Beweis:

Man definiert die gewünschte Abbildung $\tau_\varphi : M/K \rightarrow N$ folgendermaßen

$$[p] \mapsto \varphi(p) \tag{2.13}$$

Die Zuordnung ist wohldefiniert, denn für $\tilde{p} \in [p]$ gibt es ein $k \in K$ mit $\tilde{p} = k(p)$ und somit folgt aus der K -Invarianz

$$\varphi(\tilde{p}) = \varphi(k(p)) = \varphi(p)$$

Die Abbildung τ_φ ist stetig, denn für jede offene Teilmenge $U \subset N$ gilt

$$\tau_\varphi^{-1}(U) = \{[p] \in M/K : \varphi(p) \in U\}$$

und aus der Stetigkeit von φ folgt die Offenheit von

$$\pi^{-1}(\tau_\varphi^{-1}(U)) = \{p \in M : \varphi(p) \in U\} = \varphi^{-1}(U)$$

□

Falls im obigen Satz zusätzlich φ surjektiv ist, so gilt dies auch für τ_φ . Damit τ_φ bijektiv ist, muss φ noch folgende zusätzliche Bedingung erfüllen:

Lemma 2.1.9

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 3.4.2. Falls φ die K -Orbits separiert, das heißt für alle $[p] \neq [\tilde{p}] \in M/K$ folgt $\varphi(p) \neq \varphi(\tilde{p})$, so ist τ_φ injektiv.

Satz 2.1.10

Es sei M ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis. Weiter seien eine stetige Gruppenwirkung G und eine kompakte Gruppenwirkung K auf M gegeben. Falls G und K kommutieren, gibt es genau eine zugehörige G -Wirkung auf M/K , so dass die kanonische Projektion $\pi : M \rightarrow M/K$ äquivariant ist bezüglich der G -Wirkung. Ist die G -Wirkung auf M eigentlich, so ist auch die zugehörige G -Wirkung auf M/K eigentlich.

Beweis:

Die Bedingung, dass π äquivariant bezüglich G sei, liefert

$$[g(p)] = \pi(g(p)) = g(\pi(p)) = g([p])$$

für alle $g \in G$ und $p \in M$. Die G -Wirkung auf M/K lässt sich dann wie folgt definieren

$$G \times M/K \rightarrow M/K; (g, [p]) \mapsto [g(p)]$$

Insbesondere ist obige Abbildung wohldefiniert, denn für $\tilde{p} \in [p]$ existiert ein $k \in K$ mit $k(p) = \tilde{p}$ und da G mit K kommutiert gilt

$$[g(\tilde{p})] = [g(k(p))] = [k(g(p))] = [g(p)]$$

Die Eindeutigkeit folgt per Definition.

Im Folgenden ist nun eine eigentliche G -Wirkung auf M gegeben, das heißt für jede konvergente Folge $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in M und jede Folge $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in G derart, dass $(g_i(p_i))_{i \in \mathbb{N}}$ in M konvergiert, gibt es eine konvergente Teilfolge $(g_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$.

Es sei also eine konvergente Folge $[p_i]$ in M/K mit $[p_i] \rightarrow [p]$ und eine Folge g_i in G mit $g_i([p_i]) = [g_i(p_i)] \rightarrow [\tilde{p}] \in M/K$ gegeben. Man betrachtet die Mengen

$$\begin{aligned} K' &:= \{[p_i] : i \in \mathbb{N}\} \cup \{[p]\} \\ K'' &:= \{[g_i(p_i)] : i \in \mathbb{N}\} \cup \{[\tilde{p}]\} \end{aligned}$$

Da die Folgen konvergieren liegen in jeder offenen Umgebung von $[p]$ bzw. $[\tilde{p}]$ unendlich viele Folgenglieder von $[p_i]$ bzw. $[g_i(p_i)]$ und endlich viele außerhalb. Somit sind K' und K'' kompakt. Aus der Eigentlichkeit der Quotientenabbildung π erhält man die Kompaktheit der Urbildmengen $\pi^{-1}(K')$ und $\pi^{-1}(K'')$. Daher besitzen die Folgen $(p_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \pi^{-1}(K')$ und $(g_i(p_i))_{i \in \mathbb{N}} \subset \pi^{-1}(K'')$ konvergente Teilfolgen in M . Aus der Eigentlichkeit der G -Wirkung auf M folgt die Existenz einer konvergenten Teilfolge g_{i_j} in G und somit die Eigentlichkeit der Wirkung auf M/K . □

2.2 Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe

Einer Lie-Gruppe kann kanonisch eine Lie-Algebra zugeordnet werden. Dabei handelt es sich um einen endlich-dimensionalen Vektorraum mit einer zugehörigen Struktur, genannt die Lie-Klammer. Die Lie-Algebra kann als eine Art „Linearisierung“ der Lie-Gruppe angesehen werden. Viele wesentliche Eigenschaften von Lie-Gruppen spiegeln sich in ihren Lie-Algebren wieder, und umgekehrt. Da die Lie-Algebra in der Regel einfacher zu verstehen ist als die zugehörige abstrakte Lie-Gruppe, lohnt es sich Lie-Algebren zu studieren, um Auskunft über Lie-Gruppen zu erhalten.

Beim Quantisierungsprozess, d.h. beim Übergang eines klassischen physikalischen Systems in ein korrespondierendes quantenmechanisches System, treten Lie-Algebren von Operatoren ganz natürlich auf. Um ein quantenmechanisches System zu verstehen, ist es hilfreich sich mit der Lie-Algebra der relevanten Symmetriegruppe auseinander zu setzen.

Definition: Lie-Algebra

Eine *Lie-Algebra* ist ein reeller oder komplexer Vektorraum \mathfrak{g} zusammen mit einer Abbildung $[\cdot, \cdot]$, genannt die *Lie-Klammer*

$$[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, (X, Y) \mapsto [X, Y] \quad (2.14)$$

Sie erfüllt folgende Eigenschaften:

Für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ gilt:

(i) Bilinearität: $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$

$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$$

(ii) Antisymmetrie:

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

(iii) Jacobi-Identität:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Ein Untervektorraum $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ heißt *Lie-Unteralgebra* von \mathfrak{g} , falls \mathfrak{h} unter der Lie-Klammer abgeschlossen ist. In diesem Fall ist \mathfrak{h} selbst wieder eine Lie-Algebra.

Ein Beispiel für eine Lie-Algebra ist der Vektorraum $M(n, \mathbb{R})$ aller $n \times n$ -Matrizen zusammen mit der Kommutatorklammer $[A, B] := AB - BA$. Diese Lie-Algebra wird mit $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ bezeichnet.

Ein weiteres Beispiel ist der Raum aller glatten Vektorfelder $V(M)$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit M . Es seien $X, Y: M \rightarrow TM$ Vektorfelder. Dann definiert man die Lie-Klammer von X und Y durch $[X, Y] := XY - YX$. Eine einfache Rechnung zeigt,

dass $[X, Y]$ ein Vektorfeld auf M ist. Der Wert des Vektorfeldes im Punkt p ist eine Derivation mit

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

Dabei wird mit Xf die Abbildung $p \mapsto X_p f$ bezeichnet.

Durch $[\cdot, \cdot] : V(M) \times V(M) \rightarrow V(M)$ wird eine bilineare, schiefsymmetrische Abbildung auf $V(M)$ definiert, welche die Jacobi-Identität erfüllt. Das Paar $(V(M), [\cdot, \cdot])$ heißt Lie-Algebra der glatten Vektorfelder.

Ein Vektorfeld X auf einer Lie-Gruppe G bezeichnet man als *linksinvariant*, falls es unter allen Linkstranslationen invariant ist, d.h.

$$(L_g)_* X_h = X_{gh}, \quad \forall g \in G$$

Die Menge aller glatten links-invarianten Vektorfelder auf einer Lie-Gruppe G ist eine Untergruppe von $V(G)$. Insbesondere ist sie abgeschlossen unter der Lie-Klammer, denn für zwei links-invariante Vektorfelder X, Y auf G gilt

$$\begin{aligned} (L_g)_*[X, Y](h)(f) &= (L_g)_* X_h(Yf) - (L_g)_* Y_h(Xf) \\ &= X_{gh}(Yf) - Y_{gh}(Xf) = [X, Y](gh)(f) \end{aligned}$$

Somit ist die Menge aller glatten links-invarianten Vektorfelder eine Lie-Unteralgebra von $V(G)$. Sie wird *Lie-Algebra der Lie-Gruppe G* genannt und mit $\text{Lie}(G)$ bezeichnet.

Ein linksinvariantes Vektorfeld $X \in \text{Lie}(G)$ wird eindeutig durch die Auswertung $X(e) \in T_e G$ festgelegt. Die Abbildung

$$X \mapsto X(e)$$

ist ein Vektorraumisomorphismus von $\text{Lie}(G)$ nach $T_e G$ mit Umkehrabbildung

$$\xi \mapsto \{g \mapsto X_\xi(g) := (L_g)_* \xi\}$$

Durch obige Abbildung wird die Lie-Algebra Struktur auf $T_e G$ festgelegt durch

$$[\xi, \eta] := [X_\xi, X_\eta](e)$$

für alle $\xi, \eta \in T_e G$.

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird daher die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe G stets mit dem Tangentialraum in der Identität identifiziert. Insbesondere ist $\text{Lie}(G)$ endlich dimensional mit Dimension $\dim_{\mathbb{R}}(G)$.

Für $G = GL(n, \mathbb{R})$ ist $\text{Lie}(GL(n, \mathbb{R})) \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Die Matrixeinträge x_{ij} definieren globale Koordinaten auf $GL(n, \mathbb{R})$. Dann ist der kanonische Isomorphismus von $T_{Id} GL(n, \mathbb{R})$ und $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \Big|_{Id} \longleftrightarrow (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

Für die Lie-Untergruppe $H = SL(n, \mathbb{R})$ bezeichnet man die Lie-Algebra $\text{Lie}(H)$ mit $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Diese ist eine Lie-Unteralgebra von $\text{Lie}(G)$ mit

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : \text{Tr}(A) = 0\} \quad (2.15)$$

Für den Fall $n = 2$ ist $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ ein dreidimensionaler reeller Vektorraum. Eine Basis ist zum Beispiel gegeben durch

$$e_- := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e_+ := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Auf der Lie-Algebra einer Lie-Gruppe G ist eine natürliche Gruppenwirkung gegeben, welche $\text{Lie}(G)$ zu einem G -Raum macht: die *Adjungierte Wirkung*.

Für jedes $g \in G$ ist die Konjugation gegeben durch $C_g : G \rightarrow G$ mit $C_g(h) = ghg^{-1}$. Die Konjugation induziert eine G -Wirkung auf $\text{Lie}(G)$ vermöge

$$\text{Ad}(g) = (C_g)_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \quad (2.16)$$

Diese Wirkung wird Adjungierte Wirkung von G auf $\text{Lie}(G)$ genannt.

Beispielsweise lässt sich die Adjungierte Wirkung auf $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ wie folgt berechnen. Für $A \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ definiert man die differenzierbare Kurve $\gamma_A : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow SL(n, \mathbb{R})$; $t \mapsto e^{At}$ mit $\gamma_A(0) = Id$ und $\dot{\gamma}_A(0) = A$. Das Bild $\text{Im}(\gamma_A)$ ist Teilmenge von $G := SL(n, \mathbb{R})$. Dies folgt aus der Definition der Exponentialabbildung (siehe hierzu Kapitel 5.1). Für eine beliebige glatte Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ und einen Punkt $B \in G$ folgt dann

$$\begin{aligned} \text{Ad}(B)(A)(f) &= (C_B)_* \dot{\gamma}_A(0)(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ C_B \circ \gamma_A(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(Be^{At}B^{-1}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(e^{BAB^{-1}t}) = \dot{\gamma}_{BAB^{-1}}(0)(f) \end{aligned}$$

Somit folgt $\text{Ad}(B)(A) = BAB^{-1}$.

2.3 Homogene Räume

Bei der Konstruktion invarianter Strukturen kann man sich in vielen Fällen die Transitivität der Gruppenwirkung zu Nutze machen. Da invariante Metriken in Kapitel 4 eine zentrale Rolle spielen werden, lohnt es sich an dieser Stelle den Begriff des homogenen Raumes einzuführen.

Als *Homogenen Raum* bezeichnet man eine glatte Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer transitiven glatten Lie-Gruppen-Wirkung G . Homogene Räume lassen sich recht einfach als Quotient einer Lie-Gruppe und einer Lie-Untergruppe konstruieren. Diese Vorgehensweise soll im Folgenden erläutert werden.

Vorab ein Beispiel, auf das im weiteren Verlauf der Arbeit zurückgegriffen wird. Die *obere Halbebene* ist gegeben durch

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

Biholomorphe Abbildungen einer nicht leeren, offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ auf sich selbst heißen *Automorphismen* von D . Die Menge aller Automorphismen wird als *Automorphismengruppe* $\text{Aut}(D)$ bezeichnet. Sie ist eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen. Die Automorphismen h_A der oberen Halbebene sind die gebrochen linearen Transformationen der Form

$$h_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (2.17)$$

wobei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$.

Die Abbildung $SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{H})$ mit $A \mapsto h_A$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Seinen Kern bilden die zwei Matrizen $\Gamma := \pm Id$. Die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\mathbb{H})$ ist somit isomorph zu der Gruppe $SL_2(\mathbb{R})/\Gamma$. Die Quotientengruppe $SL_2(\mathbb{R})/\Gamma$ wird *projektive lineare Gruppe* genannt und mit $PSL_2(\mathbb{R})$ bezeichnet. Sie wirkt glatt und transitiv auf \mathbb{H} durch (2.17), denn für jedes $w = x + iy \in \mathbb{H}$ mit $y > 0$ gibt es eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

sodass

$$A(i) = w$$

gilt. Folglich ist die obere Halbebene zusammen mit der Automorphismengruppe ein homogener Raum. Obige Transformationen werden *Möbius Transformationen* genannt.

Als nächstes soll die Konstruktion homogener Räume dargestellt werden.

Zunächst sei $H \subset G$ eine Lie-Untergruppe. Für jedes $g \in G$ definiert man die *linke Nebenklasse* von g modulo H als die Menge

$$gH := \{gh : h \in H\}$$

Die Menge aller Nebenklassen bezeichnet man mit G/H . Zusammen mit der Quotiententopologie, bestimmt durch die Abbildung $\pi : G \rightarrow G/H$ mit $g \mapsto gH$, wird G/H zu

einem topologischen Raum, genannt der *Nebenklassenraum* von G modulo H .

Die Rechtsmultiplikation von H auf G entsprechend $H \times G \rightarrow G; (h, g) \mapsto gh^{-1}$ ist eine glatte und freie Gruppenwirkung. Zwei Elemente g_1 und g_2 aus G liegen auf derselben H -Bahn, wenn $g_1h = g_2$ für ein $h \in H$. Dies ist genau dann der Fall, wenn g_1 und g_2 Elemente derselben Nebenklasse sind. Folglich ist der Raum aller Nebenklassen nichts anderes als der Bahnenraum, bestimmt durch die Rechtswirkung von H auf G .

Es sei nun H eine abgeschlossene Untergruppe von G . Mit Hilfe von Satz 2.1.3 soll gezeigt werden, dass die Wirkung von H auf G eigentlich ist. Dazu sei $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in G und $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in H , sodass $g_i h_i^{-1}$ in G konvergiert. Aus der Stetigkeit der Multiplikation und Inversion auf G folgt, dass $h_i = (g_i^{-1}(g_i h_i^{-1}))^{-1}$ in G konvergiert. Unter der zusätzlichen Annahme, dass H abgeschlossen ist, folgt sofort, dass der Grenzwert von h_i sogar ein Element aus H ist.

Auf G/H lässt sich eine transitive G -Wirkung definieren durch

$$G \times G/H \rightarrow G/H; (\tilde{g}, gH) \mapsto (\tilde{g}g)H \quad (2.18)$$

Es soll nun Satz 2.1.4 in diesem Kontext mit $\pi : G \rightarrow G/H$ bewiesen werden.

Satz 2.3.1

Es sei G eine Lie-Gruppe und H eine abgeschlossene Lie-Untergruppe von G . Dann ist der Raum der Nebenklassen G/H zusammen mit der durch (2.18) gegebenen Wirkung ein homogener Raum. Insbesondere besitzt G/H eine eindeutige glatte Struktur, sodass $\pi : G \rightarrow G/H$ eine glatte Abbildung konstanten Rangs ist.

Beweis:

Durch die Rechtsmultiplikation einer abgeschlossenen Lie-Untergruppe H wird eine glatte, freie und eigentliche Wirkung auf G definiert.

Um die Transitivität von (2.18) einzusehen, nehme man zwei beliebige Nebenklassen $g_1H, g_2H \in G/H$. Dann ist $g_2g_1^{-1} \in G$ mit $(g_2g_1^{-1}) \cdot (g_1H) = g_2H$.

Die glatte Struktur auf G/H lässt sich wie folgt definieren. Man wähle eine hinreichend kleine Untermannigfaltigkeit \hat{U} von G mit $e \in \hat{U}$. Außerdem seien \hat{U} und H transversale Untermannigfaltigkeiten mit $\dim(\hat{U}) + \dim(H) = \dim(M)$. Dann folgt $\hat{U} \cap H = \{e\}$. Per Konstruktion ist die Abbildung $\pi|_{\hat{U}} : \hat{U} \rightarrow U$ bijektiv. Das Bild $U := \pi(\hat{U})$ wird definiert als offene Umgebung des neutralen Elementes $H \in G/H$. Für $g \in G$ definiert man $g(U)$ als offene Umgebung des Punktes gH . Die offenen Mengen $g(U)$ definieren eine Topologie auf G/H . Durch die Identifikation von U mit \hat{U} , werden die Karten von U mittels der Koordinaten von \hat{U} als Untermannigfaltigkeit von G definiert. Die Abbildung $\pi|_{\hat{U}}$ ist dann ein Diffeomorphismus. Für $g(U) \subset G/H$ verfährt man analog unter Verwendung der Bijektion $g \circ \pi|_{\hat{U}} : \hat{U} \rightarrow g(U)$. \square

Die Bedeutung von Satz 2.3.1 wird sichtbar im nächsten Satz. Dieser zeigt, dass jeder homogene Raum äquivalent zu einem Quotienten obiger Gestalt ist.

Satz 2.3.2

Es sei $\alpha : G \times M \rightarrow M$ eine Lie-Gruppen-Wirkung. Dann ist die kanonische Abbildung $\tilde{\alpha}^{(p)} : G/G_p \rightarrow M$ mit $gG_p \mapsto g(p)$ für jeden beliebigen Punkt $p \in M$ eine injektive Immersion. Falls G eigentlich wirkt, ist der Orbit $G.p$ eine geschlossene Untermannigfaltigkeit von M und $\tilde{\alpha}^{(p)}$ ist ein G -äquivarianter Diffeomorphismus.

Beweis:

Zu Vereinfachung der Notation sei im Folgenden stets $H := G_p$. Vermöge Satz 2.3.1 ist G/H eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer transitiven G -Wirkung. Die kanonische Abbildung $\tilde{\alpha}^{(p)} : G/H \rightarrow G_p$; $gH \mapsto g(p)$ ist glatt. Um dies einzusehen, betrachtet man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xleftarrow{(\pi|_{\hat{U}})^{-1}} & G/H \\ \alpha^{(p)} \downarrow & \swarrow \tilde{\alpha}^{(p)} & \\ G_p & & \end{array}$$

Somit ist $\tilde{\alpha}^{(p)} = \alpha^{(p)} \circ \pi|_{\hat{U}}$ in jedem Punkt ein lokaler Diffeomorphismus. Außerdem ist die Abbildung $\tilde{\alpha}^{(p)}$ injektiv, denn aus $g'(p) = g(p)$ folgt $g^{-1}g' \in H$ und somit eine Bijektion auf ihr Bild $\tilde{\alpha}^{(p)}(G/H)$. Somit ist $\tilde{\alpha}^{(p)}$ auch ein globaler Diffeomorphismus. Aus

$$\tilde{\alpha}^{(p)}(g'.(gH)) = \tilde{\alpha}^{(p)}(g'gH) = (g'g).p = g'.(g.p) = g'.\tilde{\alpha}^{(p)}(g)$$

erhält man die G -Äquivarianz von $\tilde{\alpha}^{(p)}$. Somit folgt aus Satz 2.1.5, dass $\tilde{\alpha}^{(p)}$ konstanten Rang hat. Mit Korollar 2.1.6 erhält man die erste Behauptung, dass $\tilde{\alpha}^{(p)}$ eine Immersion ist.

Das Bild von $\tilde{\alpha}^{(p)}$ ist die G -Bahn von p . Ist die Wirkung eigentlich, so ist $\tilde{\alpha}^{(p)}$ sogar ein Homöomorphismus auf das Bild $G.p$, wobei $G.p \subset M$ die Unterraumtopologie trägt. Um dies einzusehen, zeigt man, dass $\tilde{\alpha}^{(p)}$ geschlossen ist. Sei dazu $A \subset G/H$ abgeschlossen, d.h. $\pi^{-1}(A)$ ist abgeschlossen in G . Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}^{(p)}(A) &= \tilde{\alpha}^{(p)} \circ \pi \circ \pi^{-1}(A) = \alpha^{(p)}(\pi^{-1}(A)) = \alpha(\pi^{-1}(A) \times \{p\}) \\ &= \{g(p); g \in \pi^{-1}(A)\} \end{aligned}$$

Sei $(g_i(p))_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\tilde{\alpha}^{(p)}(A)$. Dann folgt aus Satz 2.1.3, dass eine konvergente Teilfolge $g_{i_k} \in \pi^{-1}(A)$ existiert. Da $\pi^{-1}(A)$ abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert $\lim_{k \in \mathbb{N}} g_{i_k} =: g \in \pi^{-1}(A)$. Somit ist $g(p) \in \tilde{\alpha}^{(p)}(A)$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\tilde{\alpha}^{(p)}(G/H) = G.p$ eine Untermannigfaltigkeit von M ist. Sei dazu $q = g(p) \in G.p$ beliebig. Dann folgt aus dem Satz vom Rang, dass es Koordinaten (U_0, x) von gH und (V_0, y) von q mit $\tilde{\alpha}^{(p)}(U_0) \subset V_0$ gibt, sodass $\tilde{\alpha}^{(p)}$ in diesen Koordinaten folgende Gestalt hat

$$y \circ \tilde{\alpha}^{(p)} \circ x^{-1}(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

wobei $k = \dim(G) - \dim(H)$ ist.

Dann gilt $y(\tilde{\alpha}^{(p)}(U_0)) = W \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}$ mit $W \subset \mathbb{R}^m$ offen und $m = \dim(M)$. Sei $V := y^{-1}(W) \subset M$ offen. Dann ist $\tilde{\alpha}^{(p)}(U_0) = V \cap \tilde{\alpha}^{(p)}(G/H) = V \cap G.p$. Insbesondere ist $q \in V$. Insgesamt erhält man

$$y(V \cap G.p) = y(\tilde{\alpha}^{(p)}(U_0)) = W \cap \mathbb{R}^k \times \{0\} = y(V) \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}$$

Da $q \in G.p$ beliebig war, folgt die Behauptung. \square

Aus obigem Satz erhält man sofort die folgende Dimensionsformel

$$\dim(G.p) = \dim(G) - \dim(G_p)$$

Falls die Wirkung von G auf M transitiv ist, dann folgt $G.p = M$ für jedes $p \in M$. Mit anderen Worten ist jeder homogene Raum diffeomorph zu dem Quotienten G/G_p .

Dieser Satz lässt sich nun auf das anfangs in diesem Kapitel diskutierte Beispiel der oberen Halbebene \mathbb{H} übertragen. Die Isotropiegruppe im Punkte $i \in \mathbb{H}$ besteht aus den 2×2 -Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ mit } a^2 + b^2 = 1 \quad (2.19)$$

Dies ist die abgeschlossene Untergruppe $SO(2) \subset SL_2(\mathbb{R})$. Es gilt $\mathbb{H} \cong SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$. Die obere Halbebene \mathbb{H} lässt sich biholomorph auf die Einheitskreisscheibe

$$\Delta := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$$

abbilden. Die biholomorphe Abbildung ist gegeben durch die *Cayley-Transformation*

$$h_C : \mathbb{H} \rightarrow \Delta; z \mapsto \frac{z - i}{z + i} \quad (2.20)$$

mit der Inversen Funktion

$$h_{C^{-1}} : \Delta \rightarrow \mathbb{H}; z \mapsto i \frac{1 + z}{1 - z} \quad (2.21)$$

Dabei ist

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \text{ und } C^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Automorphismengruppe von Δ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\text{Aut}(\Delta) &= \left\{ \frac{az+b}{bz+\bar{a}}; a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ e^{i\varphi} \frac{z-w}{\bar{w}z-1}; w \in \Delta, 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}\end{aligned}$$

Man definiert die Gruppe

$$SU(1,1) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}; |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\},$$

aller komplexen 2×2 -Matrizen, welche die nicht ausgearbeitete, hermitesche Form

$$(z, w) := -\bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2$$

des \mathbb{C}^2 invariant lassen. $\text{Aut}(\Delta)$ ist isomorph zu $SU(1,1)/\Gamma$. Die Isotropiegruppe in Null ist die kompakte Untergruppe K der Diagonalmatrizen

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}; |a|^2 = 1 \right\} = \text{Diag}(e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}) \quad (2.22)$$

Dies sind die Drehungen um Null. Die Einheitskreisscheibe lässt sich somit als homogener Raum $\Delta \cong SU(1,1)/K$ realisieren.

Die Abbildung $\phi : SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow SU(1,1)$ mit $A \mapsto CAC^{-1}$ ist ein Gruppenisomorphismus. Mit anderen Worten können die Gruppen $SL_2(\mathbb{R}) \cong SU(1,1)$ miteinander identifiziert werden.

Die Lie-Algebra $\mathfrak{su}(1,1)$ besteht aus den komplexen spurfreien 2×2 -Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} i\varphi & \bar{z} \\ z & -i\varphi \end{pmatrix}$$

mit $\varphi \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$. Eine Basis $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ von $\mathfrak{su}(1,1)$ wird definiert durch

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Die Komplexifizierung der reellen Lie-Algebra $\mathfrak{su}(1,1)$ ist

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : \text{Tr}(A) = 0\}$$

Die komplexe Struktur ist durch die gewöhnliche Matrizenmultiplikation mit i gegeben.

2.4 Komplexe Differentialformen

Unter dem *Dualraum* V^* eines endlich-dimensionalen reellen Vektorraumes V versteht man die Menge aller Homomorphismen von V nach \mathbb{R} , d.h.

$$V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{R}) = \{F : V \rightarrow \mathbb{R}; F \text{ ist linear}\}$$

Ist (e_1, \dots, e_n) eine Basis von V , so wird durch $e_1^*, \dots, e_n^* \in V^*$ mit

$$e_i^*(v) = v_i \quad \text{für alle } v = \sum_{j=1}^n v_j e_j \in V$$

eine Basis von V^* definiert, genannt die *Dualbasis*.

In diesem Abschnitt sei M stets eine komplexe n -dimensionale Mannigfaltigkeit und $p \in M$ ein beliebiger Punkt.

Definition

Eine komplexe r -Form im Punkt $p \in M$ ist eine alternierende, \mathbb{R} -multilineare Abbildung

$$\varphi : \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{r\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{C}$$

Die Menge aller komplexen r -Formen in p wird mit $\Lambda^r T_p^* M$ bezeichnet.

Der Raum aller 1-Formen auf $T_p M$ ist der Dualraum $\Lambda^1 T_p^* M = T_p^* M$. Die Menge aller komplexen r -Formen $\Lambda^r T_p^* M$ ist für jedes $p \in M$ ein komplexer Vektorraum der Dimension

$$\dim_{\mathbb{C}}(\Lambda^r T_p^* M) = \binom{2n}{r}$$

Mit

$$\Lambda^r(TM)^* := \coprod_{p \in M} \Lambda^r T_p^* M$$

wird ihre disjunkte Vereinigung bezeichnet.

Das *innere Produkt* $\wedge : T_p^* M \times T_p^* M \rightarrow \Lambda^2 T_p^* M$ zweier 1-Formen φ und ψ wird definiert durch

$$\varphi \wedge \psi(v, w) := \varphi(v)\psi(w) - \varphi(w)\psi(v)$$

Definition

Eine komplexe r -dimensionale *Differentialform* oder kurz *r-Form* auf einer offenen Teilmenge $U \subset M$ ist ein Schnitt $\omega \in \Gamma(U, \Lambda^r(TM)^*)$ mit der Eigenschaft, dass für alle glatten Vektorfelder X_1, \dots, X_r auf M die Abbildung

$$p \mapsto \omega(X_1(p) \dots, X_r(p))$$

glatt ist. Die Menge aller komplexen r -dimensionalen Differentialformen auf M bezeichnet man mit $\mathcal{A}^r(U)$.

Mit anderen Worten ordnet jede r -Form ω auf U jedem $p \in U$ eine r -Form ω_p in p zu.

Es sei (U, z) eine holomorphe Koordinatenkarte von M mit $p \in U$. Für alle $k = 1, \dots, n$ werden durch $dz_k, d\bar{z}_k : T_p M \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$dz_k := dx_k + idy_k \quad \text{und} \quad d\bar{z}_k := dx_k - idy_k$$

die Standard-1-Formen auf U definiert. Sie bilden eine Basis von $\mathcal{A}^1(U)$ und es gilt

$$dz_i\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right) = \delta_{ij} \quad \text{bzw.} \quad d\bar{z}_i\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right) = \delta_{ij}$$

Sei f eine glatte Funktion auf U , dann ist ihr *Differential* $df \in \mathcal{A}^1(U)$ in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$df := \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k$$

Ein glattes Vektorfeld X auf M lässt sich lokal schreiben als

$$X = \sum_{k=1}^n \xi_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$$

wobei die Koeffizienten ξ_k glatte Funktionen auf U mit Werten in \mathbb{C} sind. Man kann nun df auf X anwenden und erhält

$$df(X) = \sum_{k=1}^n \xi_k \frac{\partial f}{\partial z_k} + \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}$$

Folglich gilt

$$df(X) = X(f) \tag{2.24}$$

Man definiert den Operator $d := \partial + \bar{\partial}$ mit

$$\partial f := \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k \quad \text{und} \quad \bar{\partial} f := \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k$$

Gelegentlich wird auch der Operator $d^c := i(\bar{\partial} - \partial)$ verwendet. Dann gilt

$$dd^c = 2i\partial\bar{\partial} \quad (2.25)$$

Mit Hilfe von (2.1) kann man zeigen, dass für jede glatte Funktion f und jedes Vektorfeld X auf U die folgende Gleichung gilt

$$d^c f(X) = -df(JX) \quad (2.26)$$

In lokalen Koordinaten hat jede 2-Form auf U die Gestalt

$$\omega_p = \sum_{1 \leq i < j \leq 2n} a_{ij}(p) \omega_i \wedge \omega_j$$

wobei $\omega_j := dz_j$ bzw. $\omega_{n+j} := d\bar{z}_j$ für $j = 1, \dots, n$ gilt und $p \mapsto a_{ij}(p)$ für alle i, j glatte Funktionen auf U mit Werten in \mathbb{C} sind.

Das Differential $d : \mathcal{A}^r(U) \rightarrow \mathcal{A}^{r+1}(U)$ einer r -Form erhöht ihren Grad um Eins.

Für eine 1-Form

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{2n} a_i(p) \omega_i$$

wird ihr Differential erklärt durch

$$d\omega_p := \sum_{i=1}^{2n} da_i(p) \wedge \omega_i$$

mit

$$da_i(p) := \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial z_k}(p) dz_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial \bar{z}_k}(p) d\bar{z}_k$$

Die *innere Multiplikation* ι_X reduziert den Grad einer r -Form um Eins. Für eine 2-Form ω wird die 1-Form $\iota_X \omega$ auf M erklärt durch

$$\iota_X \omega(Y) := \omega(X, Y)$$

für alle $X, Y \in V(M)$.

Es sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N . Dann kann eine r -Form ω auf N mittels F auf M zurückgezogen werden.

Der *Pullback* von ω wird definiert durch $F^* \omega$ mit

$$(F^* \omega)_p(X_1, \dots, X_r) := \omega_p(F_* X_1, \dots, F_* X_r)$$

für alle $X_1, \dots, X_r \in T_p M$.

Es gelten die folgenden Regeln (vgl. [FG]: chap. VI, p. 304)

- $F^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = F^* \omega_1 \wedge F^* \omega_2$
- $F^*(d\omega) = d(F^* \omega)$, insbesondere gilt $F^*(df) = d(f \circ F)$

3 Ein „perfekter“ Slice

In diesem Kapitel soll die Adjungierte Wirkung der Lie-Gruppe $Sp_2(\mathbb{R}) \cong SL_2(\mathbb{R})$ auf der zugehörigen Lie-Algebra untersucht werden. Es wird sich herausstellen, dass für $A \in SL_2(\mathbb{R})$ mit $\det(A) < 0$ die Bahnen der Gruppenwirkung gerade die Fasern der G -invarianten Determinantenabbildung $\det : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ sind. Für $\det(A) > 0$ bestehen die Fasern aus zwei Zusammenhangskomponenten. Jede von diesen beschreibt eine G -Bahn. Die Nullfaser lässt sich im \mathbb{R}^3 als Kegeloberfläche darstellen. Der positive Kegel, der negative Kegel und der Ursprung beschreiben die drei Bahnen der Wirkung im Falle $\det(A) = 0$.

Desweiteren sollen die Isotropiegruppen bestimmt werden. Das Gebiet in $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, für welches die Isotropiegruppen kompakt sind, ist im \mathbb{R}^3 das Innere des Determinantenkegels. In der Physik bezeichnet man diese Menge als *Kegel der elliptischen Elemente* \mathcal{E} . Sie zeichnet sich dadurch aus, dass für $A \in \mathcal{E}$ die zugehörigen 1-parametrischen Untergruppen $g_t = \exp(tA)$ der Symmetriegruppe $SL_2(\mathbb{R})$ „elliptisches Verhalten“ zeigen. Mit anderen Worten lassen sich die Bahnen, welche durch die Wirkung der 1-parametrischen Untergruppen entstehen, in der Nähe von Fixpunkten als Ellipsen darstellen. Die Menge der Fixpunkte ist $\text{Fix}(A) = \{\lambda A; \lambda \in \mathbb{R}\}$. Man weist nach, dass die Wirkung 1-parametrischer Untergruppen senkrecht zu $\text{Fix}(A)$ auf elliptischen Kurven verläuft. Somit entfernen sich die Punkte in dieser Umgebung nicht beliebig weit, sondern bleiben für alle Zeit auf endlichen Bahnen. Diese Eigenschaft ist aus physikalischer Sicht besonders wünschenswert.

Aus mathematischer Sicht ist es sinnvoll, an dieser Stelle eine noch stärkere Eigenschaft als Kompaktheit zu fordern. Hier sei daran erinnert, dass das Ziel des Projektes die Konstruktion eines Ensembles in $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ mittels der Momentum-Abbildung μ ist. Ein *Ensemble* ist eine Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer invarianten Wahrscheinlichkeitsverteilung P . Bei der Wahl einer geeigneten symplektischen Mannigfaltigkeit (X, ω) wird sich herausstellen, dass die Gruppenwirkung auf X eigentlich ist. Dies impliziert, dass die G -Wirkung auf der Bildmenge $\text{Im}(\mu) \subset \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ ebenfalls eigentlich sein muss. Als Kandidat für ein Ensemble kommt aus diesem Grund nur eine Teilmenge von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ in Frage, welche diese Eigenschaft erfüllt. Erfreulicherweise trifft dies auf das Innere des Kegels zu. In diesem Sinne ist das Gebiet innerhalb des Kegels „perfekt“.

Im Folgenden sei stets $G := Sp_2(\mathbb{R}) \cong SL_2(\mathbb{R})$ mit zugehöriger Lie-Algebra $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

3.1 Die Niveauflächen der Determinantenabbildung

In diesem Abschnitt sollen die Niveauflächen von $\det : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ bestimmt werden. Dazu sei $A = xe_- + yh + ze_+ \in \mathfrak{g}$. Man identifiziert A mit dem Vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Es gilt

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} y & z \\ x & -y \end{pmatrix} = -y^2 - xz$$

Anwendung der folgenden Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x + z \\ y &\longrightarrow y \\ z &\longrightarrow x - z \end{aligned}$$

liefert

$$\begin{aligned} A &= (x + z)e_- + yh + (x - z)e_+ \\ &= x(e_+ + e_-) + yh - z \underbrace{(e_+ - e_-)}_{=: J} \\ &= \begin{pmatrix} y & x - z \\ x + z & -y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zu einem späteren Zeitpunkt wird auch die Notation $e_1 := e_+ + e_-$, $e_2 := h$ und $e_3 := -J$ verwendet. In dieser Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ erhält man

$$\det(A) = z^2 - x^2 - y^2$$

Das Nullniveau der Determinantenabbildung lässt sich im \mathbb{R}^3 als Kegeloberfläche darstellen:

$$C_{\det} := \det^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^2 = x^2 + y^2\} \quad (3.1)$$

Wir definieren die Mengen

$$\begin{aligned} C_{in} &:= \{A \in \mathfrak{g}; \det(A) > 0\} \\ C_{out} &:= \{A \in \mathfrak{g}; \det(A) < 0\} \end{aligned}$$

Die Niveauflächen sind gegeben durch

$$\mathcal{N}_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \det(A) = c\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^2 - x^2 - y^2 = c\}$$

Innerhalb des Kegels, also für $c > 0$, sind obige Flächen zweischalige Hyperboloide im \mathbb{R}^3 . Für $c < 0$ werden sie durch einschalige Hyperboloide beschrieben.

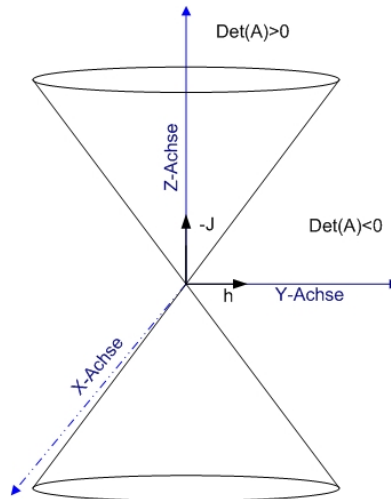


Abbildung 3.1: Der Determinanten-Kegel

3.2 Die Bahnen der Adjungierten Wirkung auf $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$

In Kapitel (2.2) wurde gezeigt, dass die Adjungierte Wirkung auf $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ durch die Konjugation gegeben ist. Zur Erinnerung:

$$G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}; (B, A) \mapsto BAB^{-1} \quad (3.2)$$

Folgender Satz soll in diesem Abschnitt bewiesen werden:

Satz 3.2.1

Sei $A = x(e_- + e_+) + yh - z(e_+ - e_-) \in \mathfrak{g}$. Für $\det(A) = c < 0$ ist die Bahn von A unter der Adjungierten Wirkung (3.2) gegeben durch

$$G.A = \det^{-1}(c)$$

Für $\det(A) = c > 0$ gilt

$$G.A = \det^{-1}(c) \cap \{z > 0\} \quad \text{oder} \\ G.A = \det^{-1}(c) \cap \{z < 0\}$$

in Abhängigkeit von dem Vorzeichen von z . Insbesondere sind die Bahnen abgeschlossen.

Im ersten Fall stimmen die Bahnen der Adjungierten Wirkung genau mit den Niveauflächen \mathcal{N}_c der Determinantenabbildung überein.

1.Fall: $\det(A) = c < 0$

In diesem Fall gilt

Lemma 3.2.2

Sei $A \in \mathfrak{g}$ mit $\det(A) = c < 0$, dann ist A diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten. Außerdem existiert eine Matrix $Q \in SL_2(\mathbb{R})$, sodass

$$Q^{-1}AQ = \text{Diag}(\lambda, -\lambda) = \lambda h \quad (3.3)$$

dabei ist $\lambda := \pm\sqrt{-c} \in \mathbb{R}$.

Das heißt, A ist konjugiert zu einem Vielfachen des Operators h .

Beweis:

Sei $A \in \mathfrak{g}$. Dann ist das charakteristische Polynom von A gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{ch}_t(A) &= \det\left(\begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix}\right) = (a-t)(d-t) - bc = \underbrace{ad - bc}_{\det(A)} - t \underbrace{(a+d)}_{\text{Tr}(A)=0} + t^2 \\ &= t^2 + \det(A) \end{aligned}$$

und die Eigenwerte lassen sich bestimmen zu

$$t = \pm\sqrt{-\det(A)} = \pm\sqrt{-c}.$$

Somit ist A diagonalisierbar mit Transformationsmatrix $Q \in GL_2(\mathbb{R})$.

Q ist die Koordinatenwechsellmatrix der Standardbasis zu einer Basis aus Eigenvektoren (v_1, v_2) zu den Eigenwerten λ und $-\lambda$. Durch Übergang zu $Q \rightarrow \frac{1}{\sqrt{|\det(Q)|}}Q$, kann ohne Einschränkung Q aus $SL_2(\mathbb{R})$ angenommen werden, das heißt der Basiswechsel ist orientierungserhaltend. Gegebenenfalls muss man die Basisvektoren v_1 und v_2 hierzu vertauschen. \square

Folgerung

Obiges Lemma zeigt, dass A entweder auf der Bahn von λh oder auf der Bahn von $-\lambda h$ liegt. Da

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} h \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -h$$

liegen insbesondere h und $-h$ auf einer Bahn und es folgt sofort

$$G.(\lambda h) = \det^{-1}(c), \quad (3.4)$$

denn für alle $M \in G.(\lambda h) = \{B\lambda h B^{-1}; B \in SL_2(\mathbb{R})\}$ gilt offensichtlich $\det(M) = c$.

Die Bahnen außerhalb des Kegels haben folgende Gestalt:

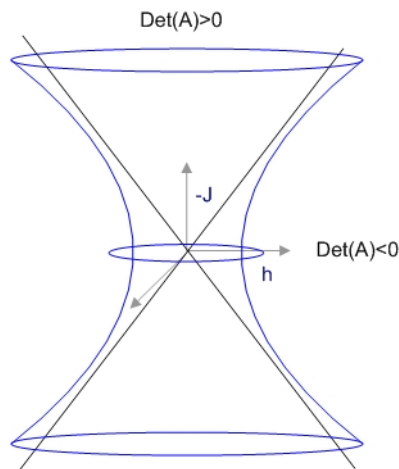


Abbildung 3.2: Bahnenstruktur in C_{out}

2.Fall: $\det(A) = c > 0$

Lemma 3.2.3

Sei $A \in \mathfrak{g}$ mit $\det(A) = c > 0$, dann ist A konjugiert zu einem Vielfachen der Matrix J , d.h. es existiert eine Matrix $Q \in SL_2(\mathbb{R})$, sodass

$$A = Q(\pm\lambda J)Q^{-1} \tag{3.5}$$

mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dabei ist $\lambda := \sqrt{c} \in \mathbb{R}^{>0}$.

Beweis:

In diesem Fall hat A die Eigenwerte $\pm i\lambda$. Man wähle einen Vektor v aus dem Eigenraum zum Eigenwert $i\lambda$, das heißt $v \in \mathbb{C}^2$ mit $Av = i\lambda v$. Da A nur reelle Einträge hat, gilt $A\bar{v} = \overline{Av} = -i\lambda\bar{v}$. Also ist \bar{v} Eigenvektor zum Eigenwert $-i\lambda$. Es gilt $v + \bar{v} = 2\text{Re}(v) \in \mathbb{R}^2$ und $i(v - \bar{v}) = -2\text{Im}(v) \in \mathbb{R}^2$. Man betrachtet nun die folgende Basis $(v + \bar{v}, i(v - \bar{v}))$ des \mathbb{R}^2 . Dann gilt

$$\begin{aligned} A(v + \bar{v}) &= i\lambda(v - \bar{v}) \\ Ai(v - \bar{v}) &= -\lambda(v + \bar{v}) \end{aligned}$$

Demzufolge lässt sich A in den neuen Koordinaten wie gewünscht darstellen. Insbesondere kann die Koordinatenwechselmatrix aus $SL_2(\mathbb{R})$ gewählt werden, unter Berücksichtigung, dass hierzu die Basisvektoren gegebenenfalls vertauscht werden müssen. \square

Folgerung

Obiges Lemma zeigt, dass die Bahn von A entweder mit der Bahn von λJ oder $-\lambda J$ übereinstimmt. Im Gegensatz zum 1. Fall liegen J und $-J$ aber nicht auf derselben Bahn, denn angenommen sie wären konjugiert, so führt folgende Rechnung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(ac+bd) & a^2+b^2 \\ -(c^2+d^2) & ac+bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

wegen $a^2 + b^2 = -1$ und $c^2 + d^2 = -1$ zu einem Widerspruch.

Ist $A \in G.J$, so existiert ein $Q \in SL_2(\mathbb{R})$, sodass

$$A = QJQ^{-1} = \begin{pmatrix} -(ac+bd) & a^2+b^2 \\ -(c^2+d^2) & ac+bd \end{pmatrix}$$

und aus

$$\begin{aligned} x - z &= a^2 + b^2 \\ x + z &= -(c^2 + d^2) \end{aligned}$$

folgt

$$-2z = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0 \text{ bzw. } z < 0$$

Man erhält

$$G.(\lambda J) = \det^{-1}(c) \cap \{z < 0\}$$

Analog folgt $z > 0$, falls $A \in G.(-J)$ und somit

$$G.(-\lambda J) = \det^{-1}(c) \cap \{z > 0\}$$

Aus der Stetigkeit der Determinantenabbildung folgt, dass die Fasern abgeschlossen sind.

Mithin ist Satz 3.2.1 vollständig bewiesen. □

Die Bahnstruktur im Inneren des Kegels lässt sich wie folgt darstellen:

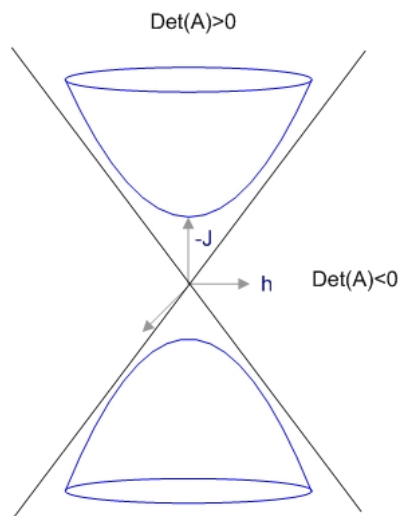


Abbildung 3.3: Bahnstruktur in C_{in}

Jede G -Bahn im Inneren des Kegels schneidet die z -Achse in genau einem Punkt λJ .

Abschließend sollen nun noch die Bahnen auf der Kegeloberfläche betrachtet werden, das heißt der Fall $\det(A) = 0$. Da der Ursprung $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ ein Fixpunkt ist, wird im Anschluss die Aufmerksamkeit auf einen Punkt aus $C_{det} \setminus \{\mathbf{0}\}$ gerichtet.

Lemma 3.2.4

Sei $A \in \mathfrak{g}$ und $\det(A) = 0$, dann ist das charakteristische Polynom von A gegeben durch $\text{ch}_A(t) = t^2$. Insbesondere ist 0 zweifacher Eigenwert von A .

Beweis: $\text{ch}_A(t) = \det(A) - t\text{Tr}(A) + t^2$ □

Für die weitere Betrachtung benötigt man ein Resultat der linearen Algebra, dessen Beweis sich unter anderem in ([FOR]: chp. 4; p. 251) befindet.

Satz von Cayley-Hamilton

Sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum, $F \in \text{End}(V)$ und $\text{ch}_F \in K[t]$ sein charakteristisches Polynom. Dann ist

$$\text{ch}_F(F) = 0 \in \text{End}(V) \tag{3.6}$$

Insbesondere gilt für jede Matrix $A \in M(n \times n, K)$

$$\text{ch}_A(A) = 0 \in M(n \times n, K) \tag{3.7}$$

Sei nun $A \in C_{\det} \setminus \{0\}$. Dann ist A nilpotent, denn aus Lemma 3.2.4 und dem Satz von Cayley-Hamilton folgt $A^2 = 0$.

Das folgende Lemma zeigt, dass sich der Kegel durch genau drei Bahnen beschreiben lässt.

Lemma 3.2.5

Sei $A = x(e_- + e_+) + yh - zJ \in C_{\det} \setminus \{0\}$ gegeben. Für den Fall $z > 0$ gibt es eine positiv orientierte Basis \mathcal{B} , sodass sich A in dieser Basis darstellen lässt als

$$M^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Insbesondere liegt A auf der Bahn von M^+ .

Für den Fall $z < 0$ gibt es eine positiv orientierte Basis \mathcal{B} , sodass sich A darstellen lässt als

$$M^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Insbesondere liegt A auf der Bahn von M^- .

Beweis:

Zunächst sei ein beliebiger Vektor $v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0$ gegeben, wobei v kein Eigenvektor von A sei. Dann sind die Vektoren v und Av linear unabhängig. Andernfalls gäbe es ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $Av = \lambda v$ und v wäre Eigenvektor zum Eigenwert λ . Somit ist das System (v, Av) eine Basis für \mathbb{R}^2 . Da $A^2 = 0$ ist, lässt sich A in dieser Basis darstellen als M^+ . Falls der Basiswechsel nicht orientierungserhaltend ist, gehe man zur Basis (Av, v) über. In diesem Fall lässt sich A darstellen als M^- .

Man wähle nun $v = e_1$. Dann ist $Av = (y, x + z)^t$. Für die Basis $\mathcal{B} = (v, Av)$ und die Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ ist dann die Koordiantenwechselmatrix $Q_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ gegeben durch

$$Q_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = ([e_1]_{\mathcal{B}}, [e_2]_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{y}{x+z} \\ 0 & \frac{1}{x+z} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

denn

$$e_2 = \frac{Av - ye_1}{x + z}$$

Da $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} > |x|$ folgt

$$\det(Q_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}) = \frac{1}{x + z} > 0 \Leftrightarrow z > 0$$

Wählt man nun $v = e_2$, so folgt die Behauptung für $\mathcal{B} = (Av, v)$ völlig analog. \square

Folgerung

Es wurde gezeigt, dass unter der Voraussetzung von Lemma 3.2.5 die Matrix A entweder auf der Bahn von M^+ oder auf der Bahn von M^- liegt. Insbesondere liegen M^+ und M^- nicht auf derselben Bahn. Die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat Determinante $\text{Det}(P) = -1$ und es gilt $M^+ = PM^-P^{-1}$.

Angenommen M^+ und M^- wären konjugiert zueinander, dann würde eine Matrix aus $SL_2(\mathbb{R})$ existieren mit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

So folgt $-c^2 = 1$, im Widerspruch zu $c \in \mathbb{R}$. Somit wird durch die Wahl einer positiv orientierten Basis die Bahn von A eindeutig festgelegt.

Für den Fall $\det(A) = 0$ gibt es genau drei Bahnen $\{0\}$, $G.M^+ = C_{\det} \cap \{z > 0\}$ und $G.M^- = C_{\det} \cap \{z < 0\}$. Die Bahnen $G.M^+$ und $G.M^-$ sind nicht abgeschlossen, da sie die Nullmatrix nicht enthalten.

3.3 Die Isotropiegruppen der Adjungierten Wirkung

Das Gebiet in \mathfrak{g} , für welches die Isotropie kompakt ist, nennt man *Menge der elliptischen Elemente*. Sie wird mit dem Buchstaben \mathcal{E} bezeichnet. Folgender Satz gibt Auskunft über die elliptischen Elemente in $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

Satz 3.3.1

Sei $A \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ gegeben. Die Isotropiegruppe $G_A = \{B \in SL_2(\mathbb{R}); BAB^{-1} = A\}$ unter der Adjungierten Wirkung ist genau dann kompakt, wenn $\det(A) > 0$ ist.

Beweis:

Sei $A \in \mathfrak{g}$ mit $\det(A) > 0$ gegeben. Dann ist die Isotropiegruppe in einem beliebigen Punkt A konjugiert zu der Isotropiegruppe im Punkt λJ . Diese stimmt mit der Isotropiegruppe

$$G_J = \{B \in SL_2(\mathbb{R}); BJB^{-1} = J\}$$

überein. Es ist somit hinreichend zu zeigen, dass G_J kompakt ist.

Es gilt

$$\begin{aligned} BJB^{-1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(ac+bd) & a^2+b^2 \\ -(c^2+d^2) & ac+bd \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\langle v, w \rangle & \|v\|^2 \\ -\|w\|^2 & \langle v, w \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $v := (a, b)$ und $w := (c, d)$ aus \mathbb{R}^2 .

Aus $BJB^{-1} = J$ folgt $\|v\|^2 = \|w\|^2 = 1$ und $\langle v, w \rangle = 0$, d.h. das Paar (v, w) ist eine Orthonormalbasis für \mathbb{R}^2 . Da $\det(B) = 1$ ist, gilt somit $G_J = SO_2(\mathbb{R})$. Die spezielle orthogonale Gruppe $SO_2(\mathbb{R})$ ist isomorph zum Kreis S^1 . Da $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ kompakt ist, ist somit auch G_J kompakt.

Es bleibt zu beweisen, dass für $\det(A) \leq 0$ die Isotropiegruppen nicht kompakt sind. Sei zunächst $\det(A) < 0$. Wie oben ist es hinreichend die Behauptung für G_h zu zeigen. Folgende Rechnung

$$BhB^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad+bc & -2ab \\ 2cd & -(ad+bc) \end{pmatrix} = h$$

liefert $ad+bc = 1, ab = 0, cd = 0$.

Mit $ad - bc = 1$ folgt

$$ad = 1 \quad \text{und} \quad bc = 0$$

Die Isotropiegruppe ist gegeben durch

$$G_h = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R}^* \right\}$$

G_h ist bzgl. der Norm $\|A\| = \text{Tr}(AA^T)$ nicht beschränkt und daher auch nicht kompakt, denn für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\text{Tr}\left(\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}\right) = \text{Tr}\left(\begin{pmatrix} n^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}\right) = n^2 + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Sei nun $\det(A) = 0$. Für $A = 0$ ist $G_A = SL_2(\mathbb{R})$ und somit nicht kompakt, da $SL_2(\mathbb{R})$ nicht beschränkt ist.

Man berechnet

$$G_{M^+} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\}$$

Da G_{M^+} aus zwei Kopien von \mathbb{R} besteht, ist die Isotropiegruppe folglich nicht beschränkt. Analog folgt, dass G_{M^-} nicht kompakt ist. \square

Für die Isotropiegruppen längs der z -Achse folgt aus obigem Beweis

$$G_{\lambda J} = G_J = SO_2(\mathbb{R}) \quad (3.11)$$

In diesem Abschnitt wurde somit gezeigt, dass die Menge der elliptischen Elemente in $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ aus dem offenen Kegel $\mathcal{E} = C_{in}$ besteht. Sie ist nicht zusammenhängend, sondern hat zwei Zusammenhangskomponenten \mathcal{E}_+ und \mathcal{E}_- , welche sich im \mathbb{R}^3 wie folgt darstellen lassen

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_+ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > \sqrt{x^2 + y^2}\} \\ \mathcal{E}_- &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < -\sqrt{x^2 + y^2}\} \end{aligned}$$

3.4 Die Eigentlichkeit der Adjungierten Wirkung

Im letzten Abschnitt wurde bewiesen, dass die Menge der elliptischen Elemente gegeben ist durch $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_-$. Im Folgenden soll die Eigentlichkeit der Adjungierten Wirkung auf \mathcal{E} nachgewiesen werden. Es reicht dies auf einer der beiden Zusammenhangskomponenten von \mathcal{E} zu zeigen. Der Beweis wird für \mathcal{E}_- durchgeführt werden.

Falls es sich als sinnvoll erweist, werden in diesem Abschnitt die Elemente aus $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ mit Vektoren aus dem \mathbb{R}^3 identifiziert. Zur Vereinfachung der Notation werden in diesem Fall kleine Buchstaben sowohl für die Elemente von $SL_2(\mathbb{R})$ als auch für die Elemente von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ verwendet. Konkret bedeutet dies, dass für die in Abschnitt 3.1 eingeführte Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, die Identifizierung $A = xe_1 + ye_2 + ze_3 = (x, y, z)$ verwendet wird.

Zunächst einige vorbereitende Aussagen über die Untergruppe $\mathcal{P} \subset SL_n(\mathbb{R})$ der symmetrischen positiv-definiten $n \times n$ -Matrizen.

Alle Matrizen aus $SL_2(\mathbb{R})$ haben eine eindeutige KP -Zerlegung, d.h. jedes $A \in SL_2(\mathbb{R})$ lässt sich darstellen als Produkt einer Matrix K aus der kompakten Gruppe $SO_2(\mathbb{R})$ und einer symmetrischen positiv-definiten Matrix P aus \mathcal{P} .

Um dies einzusehen benötigt man die folgenden zwei Lemmata:

Lemma 3.4.1

Ist $P \in \mathcal{P}$, so kommutiert P mit $P^{-\frac{1}{2}}$, d.h. $PP^{-\frac{1}{2}} = P^{-\frac{1}{2}}P$.
Insbesondere ist auch $P^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{P}$.

Beweis:

Da P symmetrisch ist, ist P orthogonal diagonalisierbar, d.h. es gibt eine orthogonale Matrix Q und eine Diagonalmatrix $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, sodass $P = QDQ^T$. Da P positiv definit ist, sind alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positiv. Es folgt $P^{-\frac{1}{2}} = QD^{-\frac{1}{2}}Q^T$ mit $D^{-\frac{1}{2}} = \text{Diag}(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})$ und somit

$$PP^{-\frac{1}{2}} = QDQ^TQD^{-\frac{1}{2}}Q^T = Q \underbrace{DD^{-\frac{1}{2}}}_{=D^{-\frac{1}{2}}D} Q^T = QD^{\frac{1}{2}}Q^T = P^{\frac{1}{2}} = \dots = P^{-\frac{1}{2}}P$$

□

Lemma 3.4.2

Ist eine Matrix $B \in SL_2(\mathbb{R})$ symmetrisch und orthogonal, so gilt $B = \pm Id$.

Beweis:

Da $B \in SL_2(\mathbb{R})$ orthogonal ist, gibt es ein $\alpha \in [0, 2\pi)$ mit

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Aus der Symmetrie folgt sofort $\sin(\alpha) = 0$. Aus $\det(B) = 1$ erhält man $\cos(\alpha) = \pm 1$. □

Der folgende Satz kann nun bewiesen werden:

Satz 3.4.3

Jede Matrix $A \in SL_2(\mathbb{R})$ besitzt eine eindeutige KP bzw. PK -Zerlegung.

Beweis:

Die Existenz einer KP -Zerlegung folgt mit

$$A = \underbrace{A(A^T A)^{-\frac{1}{2}}}_{\in SO(2)} \underbrace{(A^T A)^{\frac{1}{2}}}_{\in P}$$

Die Matrix $P = A^T A$ ist symmetrisch und positiv definit, denn für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$ gilt

$$x^T P x = x^T A^T A x = (Ax)^T A x > 0$$

Folglich ist auch $P^{\frac{1}{2}}$ symmetrisch und positiv definit. Aus Lemma 3.4.1 erhält man die Orthogonalität von $K := A(A^T A)^{-\frac{1}{2}}$ wie folgt

$$\begin{aligned} K^T K &= (A^T A)^{-\frac{1}{2}} A^T A (A^T A)^{-\frac{1}{2}} = P^{-\frac{1}{2}} P P^{-\frac{1}{2}} = P^{-1} P = Id \\ K K^T &= A (A^T A)^{-\frac{1}{2}} (A^T A)^{-\frac{1}{2}} A^T = A P^{-1} A^T = A P^{-1} P A^{-1} = Id \end{aligned}$$

Um die Eindeutigkeit zu beweisen, nehme man zwei Zerlegungen $A = KP = K'P'$. Es gilt

$$P^T P = P'^T K'^T K K^T K' P' = P'^T P'$$

und hieraus folgt

$$\begin{aligned} (P'^{-1})^T P^T P P'^{-1} &= Id \\ \Rightarrow (P P'^{-1})^T (P P'^{-1}) &= Id \end{aligned}$$

D.h. die Matrix PP'^{-1} ist symmetrisch und orthogonal. Folglich ist $PP'^{-1} = \pm Id$. Aus $P, P' \in SL_2(\mathbb{R})$ erhält man $P = P'$ und somit die Eindeutigkeit.

Der Beweis einer eindeutigen PK -Zerlegung geht völlig analog dazu. □

Desweiteren wird zu einem späteren Zeitpunkt noch folgende Äquivalenz benötigt.

Lemma 3.4.4

Eine symmetrische Matrix $P \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ist genau dann positiv definit, wenn es eine symmetrische Matrix S gibt mit $P = e^S$.

Beweis:

„ \Rightarrow “: Sei P symmetrisch und positiv definit. Dann ist P diagonalisierbar mit positiven Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^{>0}$. Die Behauptung folgt mit

$$S = Q \text{Diag}(\ln(\lambda_1), \dots, \ln(\lambda_n)) Q^{-1}$$

wobei Q die Koordinatenwechselmatrix von der Standardbasis zu einer Basis aus Eigenvektoren v_1, \dots, v_n zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist.

„ \Leftarrow “: Sei S symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dann sind die Eigenwerte der Matrix e^S gegeben durch $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ und somit alle positiv. □

Im Folgenden wird mit $\Sigma_{\mathfrak{g}} := \{\lambda J; \lambda > 0\} \subset \mathfrak{g}$ die negative z -Achse bezeichnet. Durch $\Sigma_{\mathfrak{g}}$ werden die G -Orbits von \mathcal{E}_- parametrisiert. In diesem Sinne ist $\Sigma_{\mathfrak{g}}$ ein *Slice* oder *Schnitt* durch die G -Bahnen. Jede Bahn lässt sich eindeutig durch $s \in \Sigma_{\mathfrak{g}}$ bestimmen.

Zunächst soll gezeigt werden, dass \mathcal{E}_- sich als eine Produktmannigfaltigkeit auffassen lässt. Da jede G -Bahn in \mathcal{E}_- die negative z -Achse in einem Punkt schneidet, ist anschaulich klar, dass man \mathcal{E}_- als Produkt von G und $\Sigma_{\mathfrak{g}}$ darstellen kann. Dies soll nun mathematisch exakt beschrieben werden.

Mit $G = SL_2(\mathbb{R})$ definiert man die Produktmannigfaltigkeit $M := G \times \Sigma_{\mathfrak{g}}$. Auf M ist eine eigentliche G -Wirkung gegeben durch

$$g \cdot (g_0, s_0) := (gg_0, s_0)$$

Die Isotropiegruppen längs der z -Achse sind gegeben durch die kompakte Lie-Untergruppe $K := SO_2 \subset G$ (vgl. (3.11)). Durch

$$k.(g_0, s_0) := (g_0 k^{-1}, s_0)$$

wird eine glatte und freie Wirkung von K auf M definiert.

Da jedes Element aus \mathcal{E}_- auf genau einer Bahn $G.s$ liegt, ist die Abbildung $\varphi : M \rightarrow \mathcal{E}_-$ mit $\varphi(g, s) := g(s)$ surjektiv. Für jedes $s \in \Sigma_{\mathfrak{g}}$ ist $k \in SO_2$ Element der Isotropiegruppe G_s und es folgt

$$\varphi(k.(g, s)) = gk^{-1}(s) = g(k^{-1}(s)) = g(s) = \varphi(g, s)$$

Somit ist φ invariant bezüglich der K -Wirkung auf M .

Aus $\varphi(g_1, s_1) = g_1(s_1) = g_2(s_2) = \varphi(g_2, s_2)$ folgt $s_1 = s_2 = s$. Andernfalls würden s_1 und s_2 auf einer G -Bahn liegen. Dies wäre ein Widerspruch zu $s_1, s_2 \in \Sigma_{\mathfrak{g}}$. Also existiert ein $k \in K$ mit $g_1 = g_2 k$ oder anders formuliert $(g_1, s_1) = k^{-1}.(g_2, s_2)$. Mit anderen Worten separiert φ die K -Orbits.

Mit Satz 2.1.8 erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \times \Sigma_{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\pi} & (G \times \Sigma_{\mathfrak{g}})/K \\ \varphi \downarrow & \swarrow \tau_{\varphi} & \\ \mathcal{E}_- & & \end{array}$$

wobei die Abbildung $\tau_{\varphi} : M/K \rightarrow \mathcal{E}_-$ mit $[(g, s)] \mapsto g(s)$ bijektiv ist. Aus

$$\tau_{\varphi}(g.[(g_0, s_0)]) = \tau_{\varphi}([(gg_0, s_0)]) = gg_0(s_0) = g.\tau_{\varphi}([(g_0, s_0)])$$

folgt, dass τ_{φ} äquivariant bezüglich der G -Wirkung ist.

Satz 3.4.5

Der Quotientenraum $(G \times \Sigma_{\mathfrak{g}})/K$ lässt sich mit $\mathcal{P} \times \Sigma_{\mathfrak{g}}$ identifizieren.

Beweis:

Man betrachte die Abbildung $(G \times \Sigma_{\mathfrak{g}})/K \rightarrow \mathcal{P} \times \Sigma_{\mathfrak{g}}$ mit

$$[(g, s)] = [(pk, s)] \mapsto (p, s) \tag{3.12}$$

wobei $g = pk$ die eindeutige PK -Zerlegung von g ist.

Die Abbildung ist wohldefiniert, denn für $(g', s) \in [(g, s)]$ existiert ein $k' \in K$ mit

$$g' = gk' = pkk'$$

Aus der Eindeutigkeit der PK -Zerlegung folgt die Behauptung. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\pi|_{\mathcal{P} \times \Sigma_{\mathfrak{g}}} : (p, s) \mapsto [(pk^{-1}, s)] \quad \text{für ein } k \in K$$

Sie ist stetig als Komposition $\mathcal{P} \times \Sigma_{\mathfrak{g}} \hookrightarrow G \times \Sigma_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} (G \times \Sigma_{\mathfrak{g}})/K$ und offen. Sei dazu $U \subset \mathcal{P} \times \Sigma_{\mathfrak{g}}$ offen. Dann gibt es eine offene Menge $V \subset G \times \Sigma_{\mathfrak{g}}$ mit $U = V \cap (\mathcal{P} \times \Sigma_{\mathfrak{g}})$ und es folgt

$$\pi|_{\mathcal{P} \times \Sigma_{\mathfrak{g}}}(U) = \pi(V) \cap (G \times \Sigma_{\mathfrak{g}})/K = \pi(V)$$

Somit ist 3.12 ein Homöomorphismus. \square

Man betrachtet nun das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (G \times \Sigma_{\mathfrak{g}})/K & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{P} \times \Sigma_{\mathfrak{g}} \\ \tau_{\varphi} \downarrow & \swarrow \alpha & \\ \mathcal{E}_{-} & & \end{array}$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha &:= \tau_{\varphi} \circ \pi|_{\mathcal{P} \times \Sigma_{\mathfrak{g}}} : \mathcal{P} \times \Sigma_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{E}_{-} & (3.13) \\ (p, s) &\mapsto pk^{-1}(s) = p(s) \end{aligned}$$

Obige Abbildung ist G -äquivariant. Dies folgt aus der Äquivarianz von τ_{φ} und π .

Satz 3.4.6

Die Abbildung $\alpha : \mathcal{P} \times \Sigma_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{E}_{-}$ hat konstanten Rang längs $\Sigma_{\mathfrak{g}}$. Insbesondere ist für jedes $s \in \Sigma_{\mathfrak{g}}$ die " \mathcal{P} -Bahn" $\mathcal{P}.s = \{p(s) : p \in \mathcal{P}\} \subset \mathfrak{g}$ transversal zu $\Sigma_{\mathfrak{g}}$, d.h.

$$T_s \mathfrak{g} = T_s \mathcal{P}.s \oplus T_s \Sigma_{\mathfrak{g}}$$

Beweis:

Es reicht die Behauptung für $s = J \in \mathcal{P} \cap \Sigma_{\mathfrak{g}}$ zu zeigen. Da G homöomorph zu $\mathcal{P} \times K$ ist, folgt für den Quotienten $G/K \cong \mathcal{P}$. Somit ist $\mathcal{P}.s \cong G.s$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathfrak{g} .

Die Einschränkung von α auf $\{Id\} \times \Sigma_{\mathfrak{g}}$ ist die Identitätsabbildung auf $\Sigma_{\mathfrak{g}}$

$$\alpha^{Id} := \alpha|_{\{Id\} \times \Sigma_{\mathfrak{g}}} = Id_{\Sigma_{\mathfrak{g}}} : \Sigma_{\mathfrak{g}} \rightarrow \Sigma_{\mathfrak{g}} \hookrightarrow \mathfrak{g}$$

und somit folgt für jedes $s \in \Sigma_{\mathfrak{g}}$

$$(\alpha^{Id})_* = Id_{T_s \Sigma_{\mathfrak{g}}} : T_s \Sigma_{\mathfrak{g}} \rightarrow T_s \mathfrak{g} \quad (3.14)$$

Für die Kurve $\gamma(t) = (t+1)J$ in $\Sigma_{\mathfrak{g}}$ gilt $\gamma(0) = J$ und $\dot{\gamma}(0) = J$. Folglich ist J Basisvektor von $T_J \Sigma_{\mathfrak{g}}$ und aus (3.14) erhält man $J \in T_J \mathfrak{g}$.

Man betrachtet nun die Einschränkung von α auf $\mathcal{P} \times \{J\}$.

$$\alpha_J := \alpha|_{\mathcal{P} \times \{J\}} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}.J \hookrightarrow \mathfrak{g}$$

und somit gilt für $Id \in \mathcal{P}$

$$(\alpha_J)_* : T_{Id}\mathcal{P} \rightarrow T_J\mathcal{P}.J$$

Aus Lemma 3.4.4 folgt, dass die Kurve $\gamma(t) = \exp(tS)$ mit $\gamma(0) = Id$ und $\dot{\gamma}(0) = S$ genau dann in \mathcal{P} verläuft, wenn S symmetrisch ist. Dann erhält man

$$\begin{aligned} (\alpha_J)_*\dot{\gamma}(0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tS).J = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{tS} J e^{-tS} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sum_{j,k=1}^{\infty} (-1)^j \frac{t^{(j+k)}}{j!k!} S^k J S^j \\ &= \left(\sum_{j,k=1}^{\infty} (-1)^j \frac{(j+k)t^{(j+k-1)}}{j!k!} S^k J S^j \right) \Big|_{t=0} \\ &= SJ - JS \end{aligned}$$

Man betrachtet nun die folgenden zwei linear unabhängigen symmetrischen Matrizen

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

aus \mathfrak{g} . Dann sind

$$v_1 := S_1 J - J S_1 = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$v_2 := S_2 J - J S_2 = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

im Bild von $(\alpha_J)_*$. Insbesondere sind sie linear unabhängig und bilden somit eine Basis von $T_J\mathcal{P}.J$. Die Basis (S_1, S_2, J) von $T_{(Id,J)}(\mathcal{P} \times \Sigma_{\mathfrak{g}}) \cong T_{Id}\mathcal{P} \oplus T_J\Sigma_{\mathfrak{g}}$ wird mittels α_* auf eine Basis (v_1, v_2, J) von $T_J\mathfrak{g}$ abgebildet. Folglich hat $\alpha_* : T_{(Id,J)}(\mathcal{P} \times \Sigma_{\mathfrak{g}}) \rightarrow T_J\mathfrak{g}$ im Punkt (Id, J) vollen Rang.

Der Rang ist somit konstant längs $\Sigma_{\mathfrak{g}}$. Insbesondere wurde gezeigt, dass $\mathcal{P}.J$ transversal zu $\Sigma_{\mathfrak{g}}$ ist, d.h.

$$T_J\mathfrak{g} = T_J\mathcal{P}.J \oplus T_J\Sigma_{\mathfrak{g}}$$

□

Satz 3.4.7

Die durch (3.13) definierte Abbildung $\alpha : \mathcal{P} \times \Sigma_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{E}_-$; $(p, s) \mapsto p(s)$ ist offen.

Beweis:

Aus der Semi-Stetigkeit des Ranges folgt, dass der Rang auch in einer kleinen Umgebung von $\{Id\} \times \Sigma_{\mathfrak{g}}$ konstant ist. Der Satz vom Rang liefert somit die Offenheit von α in dieser Umgebung.

Für jedes $(p, s) \in \mathcal{P} \times \Sigma_{\mathfrak{g}}$ gibt es ein $g \in G$, sodass $g(p, s) \in \{Id\} \times \Sigma_{\mathfrak{g}}$. Dann impliziert die G -Äquivarianz von $\alpha = \tau_{\varphi} \circ \pi|_{\mathcal{P} \times \Sigma_{\mathfrak{g}}}$ auch die Offenheit in einer Umgebung von (p, s) , denn für eine offene Umgebung $U \in \mathcal{U}(p, s)$ ist auch $g.U \in \mathcal{U}(Id, s)$ offen. Folglich ist das Bild

$$\alpha(g.U) = g.\alpha(U)$$

offen in \mathcal{E}_- . Da die Abbildung $\phi_g : \mathcal{E}_- \rightarrow \mathcal{E}_-$; $\xi \mapsto g.\xi = g\xi g^{-1}$ ein Diffeomorphismus ist, ist somit auch $\alpha(U)$ offen in \mathcal{E}_- . \square

Insgesamt erhält man das folgende Resultat

Satz 3.4.8

Die Menge der elliptischen Elemente \mathcal{E}_- ist homöomorph zu der Quotientenmannigfaltigkeit $(G \times \Sigma_{\mathfrak{g}})/K$.

Aus der Eigentlichkeit der G -Wirkung auf $G \times \Sigma_{\mathfrak{g}}$ folgt mit Satz 2.1.10 die Eigentlichkeit der induzierten G -Wirkung auf dem Quotienten $(G \times \Sigma_{\mathfrak{g}})/K$.

Vielmehr folgt aus Korollar 2.1.2 sogar

Satz 3.4.9

Die Menge der elliptischen Elemente $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_-$ ist das maximale Gebiet, auf dem die adjungierte Wirkung eigentlich ist.

Insbesondere ist \mathcal{E} das maximale Gebiet, welches für die Konstruktion eines Ensembles in $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ zur Verfügung steht.

4 Invariante Strukturen auf G -Mannigfaltigkeiten

Zunächst werden in diesem Kapitel invariante Strukturen allgemein diskutiert und in diesem Zusammenhang die Bedeutung der homogenen Räume erläutert. Im nachfolgenden Abschnitt wird dann unter Zuhilfenahme dieser Erkenntnisse die Poincaré-Metrik im Modell der oberen Halbebene und die daraus resultierende Poincaré'sche Abstandsfunktion berechnet. Mit Hilfe der oberen Halbebene bzw. der dazu biholomorphen Einheitskreisscheibe und der assoziierten Poincaré-Metrik soll die gewünschte symplektische Mannigfaltigkeit konstruiert werden, welche als Urbildbereich der Momentum-Abbildung dient. Das Produkt zweier Einheitskreisscheiben ohne die Diagonale $(\Delta \times \Delta) \setminus \Delta$ wird sich als geeignet erweisen. Die symplektische Struktur auf $(\Delta \times \Delta) \setminus \Delta$ wird aus der Poincaré'schen Abstandsfunktion abgeleitet. Sie ist invariant unter der Diagonalwirkung der Symmetriegruppe $SL_2(\mathbb{R}) \cong SU(1, 1)$. Der Theorieteil dieses Kapitels ist unter Zuhilfenahme des Buches [BE] entstanden.

4.1 Invariante Hermitesche Metriken

Definition: Hermitesche Metrik

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine *Hermitesche Metrik* h ist eine Familie von positiv definiten hermiteschen Formen $h = (h_p)_{p \in M}$ mit

$$h_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{C},$$

sodass für alle Vektorfelder $\eta, \xi : M \rightarrow TM$ die Abbildung

$$p \mapsto h_p(\eta(p), \xi(p))$$

glatt ist.

Obige Definition ist nur dann sinnvoll, wenn der Tangentialraum im Punkt p eine komplexe Struktur J besitzt, sodass die Multiplikation mit i definiert ist. Ist M eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n , so ist der Tangentialraum ein $2n$ -dimensionaler reeller Vektorraum mit einer natürlichen komplexen Struktur (vgl. Kaptiel 2.1).

Aus der positiven Definitheit einer hermiteschen Form h_p folgt, dass sie nicht ausgeartet ist, d.h. falls $h_p(v, w) = 0$ für alle $w \in T_p M$ gilt, so folgt sofort $v = 0$.

Definition: G -Invarianz

Sei M eine Mannigfaltigkeit und G eine Gruppenwirkung auf M . Eine Hermitesche Metrik h heißt G -invariant, falls für alle $g \in G$ und $p \in M$ gilt

$$h_p(\eta(p), \xi(p)) = h_{g(p)}(g_*\eta(p), g_*\xi(p)) \quad (4.1)$$

für alle Vektorfelder $\eta, \xi : M \rightarrow TM$.

Invariante Metriken lassen sich im Allgemeinen nicht leicht konstruieren, da die Bedingung (4.1) für jeden Punkt $p \in M$ nachzuweisen ist. Unter der zusätzlichen Annahme, dass G transitiv auf M wirkt, reicht es den Nachweis von (4.1) für einen Punkt p_0 , den Basispunkt, zu erbringen.

Sei also nun durch G eine transitive Wirkung auf M gegeben, d.h. für alle $p, q \in M$ existiert ein $g \in G$ mit $g(p) = q$. Weiter sei p_0 ein Punkt in M und h_{p_0} eine hermitesche Form auf $T_{p_0}M$. Dann induziert h_{p_0} für jedes $q \in M$ und für ein $g \in G$ mit $g(p_0) = q$ eine hermitesche Form auf T_qM durch

$$h_q(\eta, \xi) := h_{p_0}((g^{-1})_*\eta, (g^{-1})_*\xi) \quad (4.2)$$

für alle $\eta, \xi \in T_qM$.

Es stellt sich die Frage, ob h_q unabhängig von g definiert ist. Um dies zu gewährleisten, muss für $g_1(p_0) = g_2(p_0) = q$ gelten

$$h_{p_0}((g_1^{-1})_*\eta, (g_1^{-1})_*\xi) = h_{p_0}((g_2^{-1})_*\eta, (g_2^{-1})_*\xi)$$

Aus $p_0 = g_1^{-1}g_2(p_0)$ folgt, dass $g_1^{-1}g_2$ Element der Isotropiegruppe G_{p_0} ist. Daher ist obige Fragestellung äquivalent zu der Frage, ob h_{p_0} invariant bezüglich der Gruppenwirkung von G_{p_0} ist. In diesem Fall ist zu prüfen, ob für alle $\eta_{p_0}, \xi_{p_0} \in T_{p_0}M$ und für alle $g \in G_{p_0}$

$$h_{p_0}(\eta_{p_0}, \xi_{p_0}) = h_{p_0}(g_*\eta_{p_0}, g_*\xi_{p_0}) \quad (4.3)$$

gilt.

Falls (4.3) erfüllt ist, ist die durch (4.2) definierte Hermitesche Metrik $h = (h_p)_{p \in M}$ invariant. Um dies einzusehen sei $q = g(p_0) \in M$ beliebig. Dann gilt $(\tilde{g}g)(p_0) = \tilde{g}(q)$ für jedes $\tilde{g} \in G$. Da die Hermitesche Metrik h nach Voraussetzung unabhängig von g definiert ist, folgt aus (4.2)

$$\begin{aligned} h_{\tilde{g}(q)}(\tilde{g}_*\eta, \tilde{g}_*\xi) &= h_{p_0}(((\tilde{g}g)^{-1})_*\tilde{g}_*\eta, ((\tilde{g}g)^{-1})_*\tilde{g}_*\xi) \\ &= h_{p_0}((\tilde{g}g)^{-1}\tilde{g})_*\eta, (\tilde{g}g)^{-1}\tilde{g})_*\xi) \\ &= h_{p_0}((g^{-1}\tilde{g}^{-1}\tilde{g})_*\eta, (g^{-1}\tilde{g}^{-1}\tilde{g})_*\xi) \\ &= h_{p_0}((g^{-1})_*\eta, (g^{-1})_*\xi) \\ &= h_q(\eta, \xi) \end{aligned}$$

Die Konstruktion einer G -invarianten Metrik auf M lässt sich somit vereinfachen zu der Konstruktion einer G_{p_0} -invarianten hermiteschen Form auf $T_{p_0}M$. Diese Tatsache wird im Folgenden Satz festgehalten.

Satz 4.1.1

Sei M ein homogener Raum. Für ein $p_0 \in M$ gebe es eine hermitesche Form h_{p_0} auf $T_{p_0}M$. Ist h_{p_0} invariant unter der G_{p_0} -Wirkung, so induziert h_{p_0} eine G -invariante Hermitesche Metrik $h = (h_p)_{p \in M}$ auf ganz M . Insbesondere ist die Metrik h durch h_{p_0} und Bedingung (4.1) eindeutig festgelegt.

Umgekehrt ist für jede G -invariante Metrik h und für jeden beliebigen Punkt $p \in M$ die hermitesche Form h_p invariant unter der Wirkung von G_p . Somit ist die Zuordnung $h \longleftrightarrow h_{p_0}$ eindeutig.

Sei nun h_p eine hermitesche Form auf T_pM und $g_p := \operatorname{Re}(h_p)$ und $\omega_p := \operatorname{Im}(h_p)$, sodass $h_p = g_p + i\omega_p$. Aus der Eigenschaft

$$h_p(v, w) = \overline{h_p(w, v)} \text{ für alle } v, w \in T_pM$$

können die im Anschluss dargelegten Eigenschaften von Real- und Imaginärteil hergeleitet werden.

Die Familie $g = (g_p)_{p \in M}$ ist eine Familie von *Riemannschen Metriken*, d.h. für alle $p \in M$ ist

$$g_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$$

eine symmetrische \mathbb{R} -Bilinearform. Außerdem ist g_p invariant unter der Multiplikation mit J , d.h.

$$g_p(Jv, Jw) = g_p(v, w) \tag{4.4}$$

für alle $v, w \in T_pM$.

Weiter ist $\omega = (\omega_p)_{p \in M}$ eine Familie antisymmetrischer, \mathbb{R} -bilinearer und unter der Multiplikation mit J invarianter Formen auf T_pM , d.h.

$$\omega_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$$

erfüllt für alle $v, w \in T_pM$ die Gleichung

$$\omega_p(v, w) = -\omega_p(w, v) = \omega_p(Jv, Jw)$$

Insbesondere ist auch h_p invariant unter der Multiplikation mit J für alle $p \in M$ und aus

$$\begin{aligned} h_p(Jv, Jw) &= g_p(Jv, Jw) + i\omega_p(Jv, Jw) \\ &= ig_p(v, Jw) + i\bar{i}\omega_p(Jv, w) \\ &= \omega_p(Jv, w) + ig_p(v, Jw) \end{aligned}$$

erhält man

$$g_p(v, w) = \omega_p(Jv, w) \quad \text{und} \quad \omega_p(v, w) = g_p(v, Jw)$$

und somit

$$\begin{aligned} h_p(v, w) &= g_p(v, w) + ig_p(v, Jw) \\ &= \omega_p(Jv, w) + i\omega_p(v, w) \end{aligned}$$

Die Hermitesche Metrik h wird also eindeutig durch eine Riemannsche Metrik g bestimmt, welche mit der komplexen Struktur J im Sinne von (4.4) verträglich ist. Somit können g und h miteinander identifiziert werden. Die hermitesche Form h ist genau dann positiv definit, wenn g es ist.

Definition: Kähler-Mannigfaltigkeit

Es sei M eine komplexe n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer hermiteschen Metrik g . Dann heißt M *Kähler-Mannigfaltigkeit*, falls die schiefsymmetrische Bilinearform $\omega(\cdot, \cdot) := g(J\cdot, \cdot)$, aufgefasst als äußere 2-Form, geschlossen ist.

4.2 Die Poincaré-Metrik und die Poincaré'sche Abstandsfunktion

Die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ dient als Modell für eine nichteuklidische Geometrie. In diesem Abschnitt soll die Poincaré-Metrik und die daraus resultierende Abstandsfunktion hergeleitet werden. Sie definiert eine hyperbolische Metrik auf der oberen Halbebene. Die Geodäten, d.h. die lokal kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten, sind die Halbgeraden, die auf der reellen Achse senkrecht stehen, und die Halbkreise in \mathbb{H} mit dem Mittelpunkt auf der reellen Achse. In dieser Geometrie ist das hyperbolische Parallelenaxiom erfüllt, d.h., zu jeder „Geraden“ h und zu jedem Punkt P , der nicht auf h liegt, gibt es mindestens zwei Parallelen zu h , die durch den Punkt P verlaufen (vgl. [FR]: chp. 4, p. 264 f.).

Die Lie-Gruppe $SL_2(\mathbb{R})$ wirkt glatt und transitiv auf der oberen Halbebene \mathbb{H} durch

$$A.z = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

Wie bereits in Abschnitt (2.3) gezeigt wurde ist $\mathbb{H} \cong SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$ ein homogener Raum. Nachfolgend sei stets $G = SL_2(\mathbb{R})$ und $K = SO_2(\mathbb{R})$.

Ziel ist es eine G -invariante Metrik h auf \mathbb{H} zu finden. Jede K -invariante Form auf $T_i\mathbb{H}$ induziert eine eindeutige G -invariante Metrik.

Sei $h_i : T_i\mathbb{H} \times T_i\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige hermitesche Form mit Darstellungsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

wobei

$$\begin{aligned} h_{11} &= h_i\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \in \mathbb{R} \\ h_{12} &= \overline{h_{21}} = h_i\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \in \mathbb{C} \\ h_{22} &= h_i\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Für alle $k \in K$ und für alle $X, Y \in T_i\mathbb{H}$ soll gelten

$$h(k_*X, k_*Y) = h(X, Y) \quad (4.5)$$

Für $k = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in K$ mit $a^2 + b^2 = 1$ berechnet man

$$\begin{aligned} k_*\frac{\partial}{\partial x} &= (a^2 - b^2)\frac{\partial}{\partial x} - 2ab\frac{\partial}{\partial y} \\ k_*\frac{\partial}{\partial y} &= 2ab\frac{\partial}{\partial x} + (a^2 - b^2)\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

Somit gilt für einen beliebigen Vektor $X = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} = (\alpha, \beta)$ in Vektorschreibweise

$$k_*X = \underbrace{\begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}}_{=:D} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Die Spaltenvektoren von D stehen senkrecht aufeinander und haben Länge Eins. Außerdem ist $\det(D) = 1$. Das Pushforward Vektorfeld k_*X ist also nichts anderes als eine Drehung $D \in SO_2(\mathbb{R})$ in \mathbb{R}^2 .

Damit die symmetrische Form h_i invariant ist, muss gelten $D^TSD = S$ oder äquivalent dazu $SD = DS$. Dies impliziert die Gleichungen $h_{12} = h_{21} = 0$ und $h_{11} = h_{22}$. Die symmetrische Form h_i auf $T_i\mathbb{H}$ ist somit genau dann K -invariant, wenn die Darstellungsmatrix ein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix Id ist. Sie ist bis auf einen Vorfaktor eindeutig bestimmt durch die euklidische Metrik

$$h_i(X, Y) = \alpha\gamma + \beta\delta$$

wobei $X = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}$ und $Y = \gamma\frac{\partial}{\partial x} + \delta\frac{\partial}{\partial y}$ aus $T_i\mathbb{H}$ sind.

Für zwei beliebige Vektorfelder $X = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}$ und $Y = \gamma \frac{\partial}{\partial x} + \delta \frac{\partial}{\partial y}$ wird das *symmetrische Produkt* erklärt durch

$$\begin{aligned} dxdy(X, Y) &= \alpha\delta \\ dx^2(X, Y) &= \alpha\gamma \\ dy^2(X, Y) &= \beta\delta \end{aligned}$$

Mit dieser Schreibweise folgt

$$h_i = dx^2 + dy^2$$

Sei nun $z = x + iy \in \mathbb{H}$ beliebig. Da $SL_2(\mathbb{R})$ transitiv wirkt, gibt es eine Matrix $A \in SL_2(\mathbb{R})$ mit $A.z = i$. Diese ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} y^{-1/2} & -xy^{-1/2} \\ 0 & y^{1/2} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Die G -invariante Metrik $h = (h_z)_{z \in \mathbb{H}}$ lässt sich bestimmen aus

$$h_z(X, Y) = h_i(A_*X, A_*Y) \quad (4.7)$$

Eine kurze Rechnung liefert

$$\begin{aligned} A_* \frac{\partial}{\partial x} \Big|_z &= \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_i \\ A_* \frac{\partial}{\partial y} \Big|_z &= \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \Big|_i \end{aligned}$$

Somit folgt für $X = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}$, $Y = \gamma \frac{\partial}{\partial x} + \delta \frac{\partial}{\partial y} \in T_z \mathbb{H}$

$$h_z(X, Y) = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{y^2}$$

Mit Hilfe des symmetrischen Produktes erhält man

Definition: Poincaré-Metrik

Auf der oberen Halbebene \mathbb{H} wird die bis auf einen Vorfaktor eindeutige, G -invariante Metrik $h = (h_z)_{z \in \mathbb{H}}$ definiert durch die *Poincaré-Metrik*, welche gegeben ist durch

$$h_z = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

mit $z = x + iy$.

Für einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ lässt sich nun mit Hilfe der Metrik h die Weglänge $L(\gamma)$ bestimmen.

$$\begin{aligned} L(\gamma) &:= \int_a^b \sqrt{h(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \\ &= \int_a^b \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}{|y(t)|} dt \end{aligned}$$

mit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Der Abstand zwischen zwei Punkten z und w in \mathbb{H} wird definiert durch

$$d(z, w) := \inf \{L(\gamma); \gamma \text{ Weg von } z \text{ nach } w\}$$

Es soll zunächst der kürzeste Abstand von i nach iy bestimmt werden.

Dazu sei $\gamma = (x, y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ ein beliebiger Weg mit $\gamma(a) = i$ und $\gamma(b) = iy$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_a^b \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}{|y(t)|} dt \\ &\geq \int_a^b \frac{|\dot{y}(t)|}{|y(t)|} dt \\ &\geq \left| \int_1^y \frac{1}{u} du \right| \\ &= |\ln(y)| \\ &\geq \ln(y) \end{aligned}$$

Das Minimum $L(\gamma) = \ln(y)$ wird angenommen für den Weg $\tilde{\gamma}(t) = (1-t)i + tiy$ mit $t \in [0, 1]$. Folglich ist $\tilde{\gamma}$ die eindeutige Geodäte von i nach iy und der Abstand ist

$$d(i, iy) = \ln(y)$$

Um den Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten z und w zu bestimmen, wählt man eine Transformation $A \in SL_2(\mathbb{R})$ mit $A(z) = i$ und $A(w) = iy$, wobei y von z und w abhängt. Da die Metrik G -invariant ist folgt dann

$$d(z, w) = d(i, iy)$$

Gegeben seien zwei Punkte $z = x + iy$ und $w = u + iv$ in \mathbb{H} . Ohne Einschränkung ist $v > y > 0$. Zunächst wendet man eine Translation T an, sodass $T.z$ auf der positiven imaginären Achse liegt. Diese Translation ist gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

Anwenden auf z und w liefert

$$\begin{aligned} T.z &= iy \\ T.w &= w - x = (u - x) + iv \end{aligned}$$

Nun wird durch eine Streckung $T.z$ normiert. Mit

$$S = \begin{pmatrix} y^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & y^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

erhält man

$$\begin{aligned} S.(T.z) &= i \\ S.(T.w) &= \frac{w - x}{y} = \frac{u - x}{y} + i\frac{v}{y} \end{aligned}$$

Im letzten Schritt ist nun eine Drehung D aus der Isotropiegruppe $SO_2(\mathbb{R})$ von i gesucht, sodass $w' := S.(T.w)$ auf der imaginären Achse liegt. Es ist sinnvoll diese Berechnung auf der Einheitskreisscheibe $\Delta := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ durchzuführen, welche sich mittels Cayley-Transformation h_C biholomorph auf die obere Halbebene \mathbb{H} abbilden lässt. Dabei wird die positive imaginäre Achse auf das offene Intervall $(-1, 1)$ in Δ und i auf die Null abgebildet.

Die Isotropiegruppe von Null ist isomorph zu den mittelpunktstreuen Automorphismen der Einheitskreisscheibe, welche gegeben sind durch

$$\text{Aut}_0(\Delta) := \{e^{i\varphi}z : 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

Ein Punkt $\hat{z} \in \Delta$ lässt sich durch eine Transformation obiger Form auf den Punkt $|\hat{z}|$ des Intervall $(0, 1)$ verschieben.

Die Idee ist, den Punkt w' auf die Einheitskreisscheibe abzubilden und diesen in Δ mit einer geeigneten Drehung auf die positive x-Achse zu verschieben. Dieses Ergebnis wird dann zurück in die obere Halbebene abgebildet, was den gewünschten Punkt liefert. Es gilt zu berechnen $iy = h_{C^{-1}}(|h_C(w')|)$, wobei

$$|h_C(w')| = \left| \frac{w' - i}{w' + i} \right| \in (0, 1)$$

Daraus ergibt sich

$$h_{C^{-1}}\left(\left|\frac{w' - i}{w' + i}\right|\right) = i \underbrace{\frac{|w' + i| + |w' - i|}{|w' + i| - |w' - i|}}_{=:y}$$

Mit

$$|w' - i| = \left| \frac{u - x}{y} + i \frac{v - y}{y} \right| = \frac{|z - w|}{y^2}$$

$$|w' + i| = \frac{|z - \bar{w}|}{y^2}$$

folgt

$$y(z, w) = \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}$$

Insgesamt erhält man

Definition: Poincaré'sche Abstandsfunktion

Die Poincaré'sche Abstandsfunktion $d_P : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$d_P(z, w) = \ln\left(\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}\right) \quad (4.8)$$

4.3 Die invariante Struktur auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ und $\Delta \times \Delta$

Man betrachtet die Wirkung von $G = SL_2(\mathbb{R})$ auf sich selbst durch Linksmultiplikation

$$G \times G \rightarrow G; (g', g) \mapsto g'g$$

und die Wirkung der kompakten Untergruppe $K = SO_2(\mathbb{R})$ auf G durch Rechtsmultiplikation

$$K \times G \rightarrow G; (k, g) \mapsto gk^{-1}$$

Da die G -Wirkung auf sich selbst eigentlich ist, folgt aus Satz 2.1.10, dass die kanonische G -Wirkung auf $\mathbb{H} \cong G/K$ eigentlich ist.

Definition: Diagonalwirkung

Gegeben ist eine glatte G -Wirkung auf einer Mannigfaltigkeit M . Dann wird die *Diagonalwirkung* von G auf dem Produkt $M \times M$ definiert durch

$$g.(z, w) := (g.z, g.w)$$

Es folgt, dass die von $G = SL_2(\mathbb{R})$ induzierte *Diagonalwirkung* auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ ebenfalls eigentlich ist.

Die invariante Struktur auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$

Gegeben ist die Diagonalwirkung von $SL_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$. Dann wird durch den Poincaré-Abstand d_P eine invariante Struktur auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ definiert.

Durch Anwendung der Cayley-Transformation erhält man aus (4.8):

Poincaré-Abstand auf $\Delta \times \Delta$

Die Poincaré-Abstand $d_P : \Delta \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ berechnet sich zu

$$d_P(z, w) = \ln\left(\frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|}\right)$$

Es gilt

$$\tanh^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)$$

Daraus erhält man eine andere Darstellung des Poincaré-Abstandes auf $X := \Delta \times \Delta$, welche sich im nächsten Kapitel als hilfreich erweisen wird

$$d_P(z, w) = \tanh^{-1}\left(\frac{|z - w|}{|1 - z\bar{w}|}\right) \tag{4.9}$$

Die invariante Struktur auf $\Delta \times \Delta$

Gegeben ist die Diagonalwirkung von $SU(1, 1)$ auf $\Delta \times \Delta$. Dann wird durch den Poincaré-Abstand d_P eine invariante Struktur auf $\Delta \times \Delta$ definiert.

5 Konstruktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf dem Kegel der elliptischen Elemente

Ausgangspunkt vieler Fragestellungen der theoretischen Mechanik ist die Betrachtung symplektischer Strukturen. Diese spielen insbesondere beim Quantisierungsprozess eine wichtige Rolle. Zentraler Begriff ist hierbei die symplektische Mannigfaltigkeit, welche in der Sprache der Physik den Phasenraum widerspiegelt. Im Mittelpunkt dieses Kapitels steht die Momentum-Abbildung, welche eine Art „Quantisierung“ darstellt. Sie bildet den klassischen Phasenraum auf den Dualraum einer Lie-Algebra ab. Im Folgenden soll die Existenz einer Momentum-Abbildung μ auf $X = \Delta \times \Delta$ diskutiert werden. Abschließend wird dann mittels μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Menge der elliptischen Elemente konstruiert.

5.1 Die Momentum-Abbildung

In diesem Abschnitt werden einige grundlegende Definitionen und Vorbemerkungen gemacht. Weitere Details sind u.a. in ([LEE]: chap. 20, p.518 f.), ([BE]: chap. 2, p. 33 f. und chap. 4, p. 88 f.) und ([AM]: chap.4, p. 276 f.) zu finden.

Für zwei Vektorräume V, W und eine lineare Abbildung $A : V \rightarrow W$ definiert man die *duale Abbildung* $A^* : W^* \rightarrow V^*$ durch

$$A^*F(v) = F(Av)$$

für $F \in W^*$ und $v \in V$.

Als *1-parametrische Untergruppe* einer Lie-Gruppe G bezeichnet man einen Lie-Gruppen-Homomorphismus $F : \mathbb{R} \rightarrow G$. Die 1-parametrischen Untergruppen von G sind die Integralkurven von links-invarianten Vektorfeldern die in der Identität starten. Es gibt eine Eins-zu-Eins Zuordnung

$$\{\text{1-parametrische Untergruppen von } G\} \leftrightarrow \text{Lie}(G) \leftrightarrow T_e G$$

d.h. jede 1-parametrische Untergruppe wird eindeutig bestimmt durch den Tangentialvektor $\xi \in T_e G$ mit $\dot{F}(0) = \xi$.

Die 1-parametrischen Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ lassen sich explizit berechnen mit Hilfe der Exponentialabbildung für Matrizen. Für jedes $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ ist die 1-parametrische Untergruppe erzeugt von A gegeben durch

$$F(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \in GL(n, \mathbb{R})$$

Ist $H \subset G$ eine Lie-Untergruppe, so sind die 1-parametrischen Untergruppen von H die 1-parametrischen Untergruppen von G mit $\dot{F}(0) \in T_e H$.

Beispielsweise sind für $SL_2(\mathbb{R}) \subset GL_2(\mathbb{R})$ die 1-parametrischen Untergruppen gegeben durch

$$F(t) = e^{tA} \text{ mit } A \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$$

Die folgende Definition verallgemeinert den Begriff der Exponentialfunktion.

Definition: Exponentialabbildung

Es sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} . Man definiert die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ durch

$$\exp(\xi) = F(1), \tag{5.1}$$

wobei F die 1-parametrische Untergruppe erzeugt von $\xi \in \mathfrak{g}$ ist.

Für jedes $\xi \in \mathfrak{g}$ lässt sich mit Hilfe der Exponentialabbildung die zugehörige 1-parametrische Untergruppe bestimmen zu $F(t) = \exp(t\xi)$.

Nachfolgend wird nun die Wirkung einer Lie-Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M betrachtet. Durch

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times M &\rightarrow M \\ (t, p) &\mapsto \exp(t\xi).p \end{aligned}$$

wird ein globaler Fluss auf M definiert. Dieser induziert ein Vektorfeld

$$\hat{\xi}(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t\xi).p$$

genannt der *infinitesimale Erzeuger* von ξ . Anwenden des Vektorfeldes auf eine beliebige Funktion f ergibt

$$\hat{\xi}(f)(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\exp(t\xi).p)$$

Es sei $\alpha^{(p)} : G \rightarrow M; g \mapsto g(p)$ die Bahnabbildung und $(\alpha^{(p)})_* : \mathfrak{g} \rightarrow T_p M$ der zugehörige Pushforward. Für $\xi \in \mathfrak{g}$ ist $\gamma(t) = \exp(t\xi)$ eine Kurve in G mit $\gamma(0) = e$. Dann ist $\dot{\gamma}(t) = \xi \exp(t\xi)$ mit $\dot{\gamma}(0) = \xi$. Es folgt

$$\begin{aligned} (\alpha^{(p)})_* \xi(f) &= \dot{\gamma}(0)(f \circ \alpha^{(p)}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \alpha^{(p)} \circ \gamma(t) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\exp(t\xi) \cdot p) = \hat{\xi}(f)(p) \end{aligned}$$

Es werden nun die zentrale Begriffe dieses Kapitels definiert.

Definition: Symplektische Mannigfaltigkeit

Eine symplektische Mannigfaltigkeit M ist eine glatte Mannigfaltigkeit zusammen mit einer glatten, geschlossenen, punktweise nicht ausgearteten 2-Form ω , d.h.

$$d\omega = 0 \tag{5.2}$$

und für alle $p \in M$ ist $\omega_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ eine alternierende Bilinearform mit der Eigenschaft

$$\text{Ist } \omega_p(X_p, Y_p) = 0 \text{ für alle } X_p \in T_p M, \text{ dann folgt } Y_p = 0 \tag{5.3}$$

Da ω_p nicht-ausgeartet ist, folgt, dass die Darstellungsmatrix vollen Rang r hat. Aus der Antisymmetrie erhält man, dass der Rang von gerader Dimension $r = 2n$ ist. Eine symplektische Mannigfaltigkeit ist somit stets von geradzahligem reeller Dimension.

Kähler-Mannigfaltigkeiten sind Beispiele für Symplektische Mannigfaltigkeiten.

Definition: Momentum-Abbildung

Es sei (M, ω) eine zusammenhängende symplektische Mannigfaltigkeit und G eine Lie-Gruppe mit einer glatten Gruppenwirkung auf M . Außerdem sei ω invariant unter der Gruppenwirkung. Eine Abbildung $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ heißt *Momentum-Abbildung*, wenn für jedes $\xi \in \mathfrak{g}$ die Abbildung $\mu_\xi : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mu_\xi(p) := \mu(p)(\xi)$ die *Hamilton Bedingung*

$$d\mu_\xi = \iota_{\hat{\xi}} \omega \tag{5.4}$$

erfüllt. Dabei ist $\hat{\xi}$ das Vektorfeld auf M , welches durch die Gruppenwirkung der 1-parametrischen Untergruppe erzeugt von ξ definiert wird.

Die Momentum-Abbildung heißt *Ad*-äquivariant*, falls für alle $g \in G$ gilt

$$\mu(g \cdot p)(\xi) = (\text{Ad}_{g^{-1}})^* \mu(p)(\xi) \tag{5.5}$$

Die Eigenschaft (5.5) impliziert das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & M \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{\text{Ad}_{g^{-1}}^*} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

Außerdem gilt $\mu(g.p)(\xi) = \mu(p)(\text{Ad}_{g^{-1}}\xi)$. Die duale Abbildung $\text{Ad}^*(g^{-1}) : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ heißt *Coadjungierte Wirkung* auf \mathfrak{g}^* .

Der folgende Satz gibt Auskunft über die Existenz einer Momentum-Abbildung.

Satz 5.1.1

Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit mit einer glatten Lie-Gruppen-Wirkung G . Die symplektische Form ω sei exakt, d.h. es existiert eine 1-Form ϑ mit $\omega = -d\vartheta$. Desweiteren sei ϑ invariant unter der Gruppenwirkung. Dann wird durch $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ mit

$$\mu(p)(\xi) = -\iota_\xi \vartheta(p) \tag{5.6}$$

eine Ad^* -äquivariante Momentum-Abbildung definiert.

Ein Beweis des Satzes befindet sich z.B. in ([AM]: chp.2, p.282).

5.2 Plurisubharmonizität des Poincaré-Abstandes

Die allgemeinen Aussagen des vorangegangenen Abschnittes sollen nun auf die Mannigfaltigkeit $\Delta \times \Delta$ mit der bereits in Kapitel 4 diskutierten Diagonalwirkung von $SU(1, 1) \cong SL_2(\mathbb{R})$ angewendet werden. Es wird sich herausstellen, dass sich eine invariante symplektische Kähler-Form durch den Poincaré-Abstand d_P definieren lässt. Dies ist allerdings nicht auf ganz X möglich, da die Poincaré'sche Abstandsfunktion längs der G -Bahn durch $(0, 0)$ nicht differenzierbar ist.

Zunächst sei bemerkt, dass in den nachfolgenden Abschnitten stets die Notation $X := \Delta \times \Delta$ verwendet wird. Mit $L := \{(z, -z); 0 < |z| < 1\}$ bezeichnen wir die Anti-Diagonale und mit $\Delta := \{(z, z); 0 < |z| < 1\}$ die Diagonale in $\Delta \times \Delta$.

Um Verwirrungen mit dem Differential einer k -Form vorzubeugen, wird desweiteren die Poincaré'sche Abstandsfunktion auf X mit $\theta_P := d_P$ bezeichnet.

Ziel ist es zu zeigen, dass durch

$$\omega := -2i\partial\bar{\partial}\theta_P \quad (5.7)$$

eine symplektische Form auf $X \setminus \Delta$ definiert wird. Das Paar $(X \setminus \Delta, \omega)$ ist dann eine Kähler-Mannigfaltigkeit. Dazu muss gezeigt werden, dass ω der Imaginärteil $\text{Im}(h)$ einer Hermiteschen Metrik h auf $X \setminus \Delta$ ist. Es ist zu prüfen, dass die Poincaré'sche Abstandsfunktion strikt plurisubharmonisch ist.

Es folgen eine Reihe von Definitionen.

Definition: subharmonische Funktion

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine reellwertige stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *subharmonisch*, wenn sie der *schwachen Mittelwerteigenschaft* genügt, d.h.

Für jedes $z_0 \in D$ existiert ein $r > 0$ mit $\Delta(z_0, r) \subset D$ und

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{it}) dt$$

für $0 < \varepsilon \leq r$.

Es gilt folgender Satz

Satz 5.2.1

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. f ist genau dann subharmonisch, wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} \geq 0$ für alle $z \in D$ gilt.

Ein Beweis des Satzes befindet sich u.a. in ([FG]: chp. II, p.56).

Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion heißt *strikt subharmonisch*, wenn im obigen Satz die strikte Ungleichung gilt.

Es sei X ein Vektorraum und $M \subset X$ eine konvexe Teilmenge. Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *strikt konvex*, falls für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ und alle $t \in (0, 1)$ gilt

$$f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y)$$

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall und f in $\overset{\circ}{I}$ zweimal differenzierbar, so ist f strikt konvex, wenn $f''(x) > 0$ für alle $x \in \overset{\circ}{I}$ gilt.

Man erhält folgende äquivalente Definition

Definition: strikte Subharmonizität

Eine reellwertige Funktion $f(|z|)$ mit $0 < |z| < 1$ heißt *strikt subharmonisch* genau dann, wenn $g(x) := f(e^x)$ mit $-\infty < x < 0$ strikt konvex ist.

Definition: plurisubharmonische Funktion

Es sei $D \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $\Delta(0, \varepsilon)$ eine Kreisscheibe um Null in der komplexen Zahlenebene \mathbb{C} . Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *plurisubharmonisch* auf D , falls für jede holomorphe Abbildung $\psi : \Delta(0, \varepsilon) \rightarrow D$ mit $\psi(0) = (0, \dots, 0)$ die Abbildung $\rho := f \circ \psi$ subharmonisch auf $\Delta(0, \varepsilon)$ ist.

Definition: Levi-Form und Levi-Matrix

Sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Menge, $f \in C^2(M, \mathbb{R})$ zweimal stetig differenzierbar und $p \in M$. Die quadratische Form $\text{Lev}(f) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\text{Lev}(f)(p, v) := \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} f(p) v_i \bar{v}_j$$

wird *Levi-Form* von f im Punkt p genannt. Die *Levi-Matrix* wird definiert durch

$$\mathcal{L}(f) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} f & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_n} f \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial z_n \partial \bar{z}_1} f & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial z_n \partial \bar{z}_n} f \end{pmatrix}$$

Die Levi-Form der Poincaré'schen Abstandsfunktion $\text{Lev}(\theta_P)(p, v)$ ist invariant unter der G -Wirkung auf X .

Definition: strikte Plurisubharmonizität

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine reellwertige glatte Funktion f wird *strikt plurisubharmonisch* genannt, falls die Levi-Form positiv definit ist, d.h. $\text{Lev}(f)(p, v) > 0$ für alle $p \in M$ und $v \in T_p M$.

Die Einschränkung der Poincaré'schen Abstandsfunktion auf $L = \{(z, -z); 0 < |z| < 1\}$ ist gegeben durch

$$\theta(z) := \theta_P(z, -z) = \ln \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^2 \quad (5.8)$$

bzw. mit (4.9)

$$\theta(z) = \tanh^{-1} \left(\frac{|2z|}{1 + |z|^2} \right) \quad (5.9)$$

Da der Poincaré-Abstand längs L von $|z|$ abhängt, ist θ in $(0, 0)$ nicht differenzierbar. Es ist an dieser Stelle zu betonen, dass θ_P somit auch längs der Diagonalen Δ nicht differenzierbar ist.

Für einige Zwecke wird es sich als nützlich erweisen, die Berechnungen auf die Menge $\Sigma_X := \{(t, -t); 0 \leq t < 1\}$ einzuschränken.

Proposition 5.2.2

Die Menge Σ_X ist ein exakter Schnitt der G -Wirkung auf X in dem Sinne, dass jeder G -Orbit Σ_X in genau einem Punkt schneidet.

Beweis:

Die Projektion $\text{pr} : X \rightarrow \Delta; (z, w) \mapsto z$ auf das erste Argument ist G -äquivariant. Außerdem wirkt die Gruppe G transitiv auf Δ , denn für jedes $w \in \Delta$ ist $g(0) = w$ mit

$$g(z) = \frac{z - w}{\bar{w}z - 1}$$

Jede G -Bahn in Δ trifft folglich die Nullfaser $F_0 = \{z \in \Delta : g(z) = 0; g \in G\}$. Die Isotropiegruppe in Null ist gegeben durch die Menge der Drehungen um Null, vgl. (2.22). Nach Anwendung einer geeigneten Drehung folgt, dass jede G -Bahn in $X = \Delta \times \Delta$ einen Punkt $(0, x)$ mit $0 \leq x < 1$ trifft. Ohne Einschränkung sei $x \neq 0$, denn sonst bleibt nichts zu zeigen. Anwenden von

$$g := \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix} \in G$$

auf den Punkt $(0, x)$, mit $0 < t < 1$, liefert

$$g.(0, x) = \left(t, \frac{x+t}{1+tx} \right)$$

Durch Lösen der Gleichung

$$\frac{x+t}{1+tx} = -t$$

folgt die Existenz eines Punktes in Σ_X , welcher die G -Bahn schneidet. Die Eindeutigkeit folgt aus der Bedingung $0 < t < 1$. \square

Im weiteren Verlauf werden die Koordinaten (ζ, η) für $X = \Delta \times \Delta$ betrachtet, welche durch die Transformation

$$\begin{aligned} z &\rightarrow \zeta + \eta \\ w &\rightarrow \zeta - \eta \end{aligned}$$

gegeben sind. Dabei werden mit z und w die Standardkoordinaten auf $\Delta \times \Delta \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ bezeichnet. Die Anti-Diagonale L ist in diesen Koordinaten gegeben durch die Menge $\{\zeta = 0\}$.

Es soll nun die Levi-Matrix von $\mathcal{L}(\theta_P)$ längs des reellen Schnittes Σ_X in den Koordinaten (ζ, η) berechnet werden. Es wird sich herausstellen, dass es sich hierbei um eine Diagonalmatrix mit strikt positiven Einträgen handelt.

Der Poincaré-Abstand θ_P ist strikt subharmonisch längs L , denn es gilt

Proposition 5.2.3

Es sei $\theta_0(x) := \theta(e^x)$, wobei θ die Einschränkung der Poincaré'schen Abstandsfunktion auf L ist. Dann gilt

$$\theta_0'(x) = \frac{4e^x}{1 - e^{2x}} \quad \text{und} \quad \theta_0'' = \frac{4e^x(1 + e^{2x})}{(1 - e^{2x})^2}$$

Insbesondere ist $\theta_0(x)$ strikt konvex für $-\infty < x < 0$.

Der Beweis folgt durch zweimaliges Ableiten von $\theta_0 = \ln \left(\frac{1+e^x}{1-e^x} \right)^2$.

Für jeden reellen Punkt $(t, -t)$ von L sei $\gamma(\zeta) := (\zeta + t, \zeta - t)$ eine Kurve in X .

Proposition 5.2.4

Für hinreichend kleine $|\zeta|$ mit $\zeta \neq 0$ gilt $\theta_P(\gamma(\zeta)) > \theta_P(\gamma(0))$. Außerdem hat $\theta_P(\gamma(\zeta))$ die Ordnung $\mathcal{O}(|\zeta|^2)$.

Beweis:

In Kapitel 4 wurde u.a. die folgende Darstellung des Poincaré-Abstandes auf X hergeleitet (vgl. Gleichung (4.9))

$$\theta_P(z, w) = \tanh^{-1} \left(\frac{|z - w|}{|1 - z\bar{w}|} \right)$$

Es sei

$$f(z, w) := \frac{|z - w|}{|1 - z\bar{w}|}$$

Da $y \mapsto \tanh^{-1}(y)$ streng monoton wächst, reicht es für hinreichend kleine $|\zeta|$

$$f(\gamma(\zeta)) > f(\gamma(0))$$

zu zeigen. Dies ist äquivalent zu folgender Ungleichung

$$|1 - (\zeta + t)(\bar{\zeta} - t)|^2 \leq (1 + t^2)^2$$

Die Gleichheit gilt für $\zeta = 0$. Sei $\zeta = x + iy$, dann folgt

$$|1 + t^2 - (x^2 + y^2) + 2ity|^2 \leq (1 + t^2)^2 \tag{5.10}$$

Es reicht den Fall $x = 0$ zu betrachten, da hieraus die Behauptung für $x \neq 0$ sofort folgt. Für die linke Seite von (5.10) folgt

$$(1 + t^2 - y^2)^2 + 4t^2y^2 = (1 + t^2)^2 - 2(1 + t^2)y^2 + 4t^2y^2 + y^4$$

Somit erhält man die Ungleichung

$$-2(1-t^2)y^2 + y^4 < 0$$

Für hinreichend kleine y ist diese erfüllt. Es bleibt zu zeigen, dass die Konvergenzordnung in der Nähe von $\zeta = 0$ zweiter Ordnung ist, d.h. es existieren Konstanten $c > 0$ und $C > 0$ mit

$$c|\zeta|^2 \leq \theta_P(\gamma(\zeta)) - \theta_P(\gamma(0)) \leq C|\zeta|^2$$

Um dies einzusehen betrachte man die äquivalente Darstellung der Poincaré'schen Abstandsfunktion

$$\theta_P(z, w) = \ln \left(\frac{1 + f(z, w)}{1 - f(z, w)} \right)$$

Aus der Taylor-Entwicklung des Logarithmus folgt, dass es ausreicht die obige Ungleichung für $f(\gamma(\zeta))$ zu zeigen. Es gilt

$$f(\gamma(\zeta)) = \frac{2t}{|1 - (\zeta + t)(\bar{\zeta} - t)|}$$

Entwickelt man f um $\zeta = 0$ so lässt sich f wie folgt schreiben

$$f(\gamma(\zeta)) = f(\gamma(0)) + Q(\zeta) + \mathcal{O}(3)$$

wobei Q quadratisch in ζ und $\bar{\zeta}$ ist. Es sei bemerkt, dass

$$f^2 = f(\gamma(0))^2 + 2f(\gamma(0))Q(\zeta) + \mathcal{O}(3)$$

gilt. Da $f(\gamma(0)) \neq 0$ für $t \neq 0$, haben f und f^2 somit die gleiche Konvergenzordnung. Zur Vereinfachung der Notation wird die Behauptung für f^2 gezeigt. Die direkte Berechnung liefert

$$\begin{aligned} q := f^2(\gamma(\zeta)) - f^2(\gamma(0)) &= \frac{4t^2}{|1 - (\zeta + t)(\bar{\zeta} - t)|^2} - \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \\ &= 4t^2 \frac{(1+t^2)^2 - |1 - (\zeta + t)(\bar{\zeta} - t)|^2}{|1 - (\zeta + t)(\bar{\zeta} - t)|^2(1+t^2)^2} \end{aligned}$$

Für den Zähler folgt die Abschätzung

$$(1+t^2)^2 - |1 - (\zeta + t)(\bar{\zeta} - t)|^2 = 2(1+t^2)(x^2 + y^2) - 4t^2y^2 - y^4 \leq 2(1+t^2)|\zeta|^2$$

Einsetzen in obige Gleichung und Taylorreihen-Entwicklung liefert

$$q \leq \frac{8t^2}{(1+t^2)} \frac{|\zeta|^2}{|1 - (\zeta + t)(\bar{\zeta} - t)|^2} = \frac{8t^2}{(1+t^2)} |\zeta|^2 (1 - \dots)$$

□

Aus $\theta_P(\gamma(\zeta)) = \mathcal{O}(|\zeta|^2)$ folgt $\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \theta_P = \frac{\partial}{\partial \zeta} \theta_P = \mathcal{O}(|\zeta|)$ und $\frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \theta_P = \mathcal{O}(1)$. Für $\eta = t \in \mathbb{R}$ mit $0 < t < 1$ und $\zeta = 0$ hat Proposition 5.2.4 die folgenden zwei Konsequenzen

$$\frac{\partial \theta_P}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \theta_P}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} > 0$$

Dies impliziert

$$\frac{\partial^2 \theta_P}{\partial \zeta \partial \bar{\eta}} \equiv 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \theta_P}{\partial \eta \partial \bar{\zeta}} \equiv 0$$

längs Σ_X .

Aus der strikten Subharmonizität von θ_P längs L folgt

$$\frac{\partial^2 \theta_P}{\partial \eta \partial \bar{\eta}} > 0$$

für alle $(t, -t)$ mit $t \neq 0$.

Somit erhält man nachfolgende Proposition.

Proposition 5.2.5

Längs Σ_X ist die Levi-Matrix $\mathcal{L}(\theta_P)$, berechnet in den Koordinaten (ζ, η) , von der Form $\text{Diag}(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$, wobei $\lambda_i(t) > 0$ für $i = 1, 2$ und $0 < t < 1$.

Insbesondere ist die Levi-Form positiv definit, da beide Eigenwerte strikt positiv sind. Da der Poincaré-Abstand θ_P in $(0, 0)$ nicht differenzierbar ist, existiert die Levi-Form für $t = 0$ nicht. Da Σ_X ein exakter Schnitt der G -Wirkung ist, folgt aus obiger Proposition, dass θ_P strikt plurisubharmonisch auf $(\Delta \times \Delta) \setminus \Delta$ ist. Längs der Diagonalen erfüllt θ_P aber die abgeschwächte Eigenschaft plurisubharmonisch zu sein.

Satz 5.2.6

Die Poincaré-Abstandsfunktion $\theta_P : \Delta \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ ist plurisubharmonisch auf der Diagonalen Δ und strikt plurisubharmonisch auf der Anti-Diagonalen L .

Beweis:

Die strikte Plurisubharmonizität auf L folgt mit Proposition 5.2.5 und aus der Tatsache, dass die Levi-Form invariant unter der G -Wirkung ist.

Es soll nun der erste Teil der Behauptung gezeigt werden. Sei dazu $\Delta(0, \varepsilon)$ eine Kreisscheibe um 0 in der komplexen Ebene und $\psi : \Delta(0, \varepsilon) \rightarrow X$ eine beliebige holomorphe Abbildung mit $\psi(0) = (0, 0)$. Zu zeigen ist, dass $\rho := \theta_P \circ \psi$ in der Nähe von 0 subharmonisch ist. Es reicht zu beweisen, dass θ_P subharmonisch in $(0, 0)$ ist, denn dann gilt die Behauptung auch längs der G -Bahn durch $(0, 0)$. Falls $\psi(\Delta(0, \varepsilon))$ in der Diagonalen enthalten ist, ist ρ identisch Null und daher subharmonisch. Sei also der Schnitt von $\psi(\Delta(0, \varepsilon))$ mit $X \setminus \Delta$ nicht leer. Ohne Einschränkung kann ε so klein gewählt werden,

dass $\psi(\Delta(0, \varepsilon))$ die Diagonale nur in $(0, 0)$ schneidet. Dann ist die Funktion ρ strikt subharmonisch auf $\Delta(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$ und nimmt ihr absolutes Minimum in 0 an. Folglich ist die schwache Mittelwertegenschaft erfüllt und θ_P somit plurisubharmonisch in $(0, 0)$. \square

Die durch (5.7) definierte 2-Form ω lässt sich auch wie folgt schreiben (vgl. (2.25))

$$\omega = -2i\partial\bar{\partial}\theta_P = -dd^c\theta_P$$

Sie ist somit geschlossen.

Man definiert eine Hermitesche Metrik h auf X durch

$$h := 2 \left(\frac{\partial^2\theta_P}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}}d\zeta \wedge d\bar{\zeta} + \frac{\partial^2\theta_P}{\partial\zeta\partial\bar{\eta}}d\zeta \wedge d\bar{\eta} + \frac{\partial^2\theta_P}{\partial\eta\partial\bar{\zeta}}d\eta \wedge d\bar{\zeta} + \frac{\partial^2\theta_P}{\partial\eta\partial\bar{\eta}}d\eta \wedge d\bar{\eta} \right)$$

Aus Proposition 5.2.6 folgt, dass h außerhalb der Diagonalen Δ positiv definit ist. Dann gilt

$$\omega = \text{Im}(h)$$

und h lässt sich schreiben als $h := g + i\omega$, wobei mit g die zu h assoziierte positiv definite Riemannsche Metrik auf $X \setminus \Delta$ bezeichnet wird. Da $g(\zeta, \eta) = \omega(J\zeta, \eta)$ folgt aus $g(\zeta, \zeta) > 0$ sofort

$$\omega(J\zeta, \zeta) \neq 0 \quad \text{für } \zeta \neq 0 \tag{5.11}$$

Unter anderem ist ω daher nicht ausgeartet, denn angenommen $\omega(\zeta, \eta) = 0$ für alle $\eta \in T_pX$ und $\zeta \neq 0$, dann folgt

$$0 = \omega(J(\eta + \zeta), \zeta) = \omega(J\eta, \zeta) + \omega(J\zeta, \zeta) = \omega(J\zeta, \zeta)$$

im Widerspruch zu (5.11).

Somit wurde gezeigt, dass das Paar $(X \setminus \Delta, \omega)$ eine Kähler-Mannigfaltigkeit.

5.3 Das Bild von μ

Die symplektische Mannigfaltigkeit $(\Delta \times \Delta) \setminus \Delta$ aus dem vorangegangenen Abschnitt liefert die Existenz einer Ad^* -äquivarianten Momentum-Abbildung

$$\mu : (\Delta \times \Delta) \setminus \Delta \rightarrow \mathfrak{sl}_2^*$$

Dabei wird die $SL_2(\mathbb{R})$ -Wirkung auf Δ definiert durch den Gruppenisomorphismus $\phi : SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow SU(1, 1)$ mit $A \mapsto CAC^{-1}$ mit

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Bild von μ ist Teilmenge des Dualraums von \mathfrak{g} . Der Dualraum \mathfrak{g}^* lässt sich aber mit \mathfrak{g} identifizieren. Dazu sei zunächst $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ eine invariante Bilinearform auf einer Lie-Algebra \mathfrak{g} , d.h. für alle $g \in G$ und $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ soll gelten

$$b(\text{Ad}(g)(\xi), \text{Ad}(g)(\eta)) = b(\xi, \eta)$$

Falls b nicht ausgeartet ist, wird durch

$$\varphi_b : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*, \xi \mapsto b(\xi, \cdot)$$

ein G -äquivarianter Isomorphismus von \mathfrak{g} nach \mathfrak{g}^* definiert. Aus der Invarianz von b folgt, dass φ_b äquivariant bezüglich der Adjungierten Wirkung auf \mathfrak{g} und der Coadjungierten Wirkung auf \mathfrak{g}^* . Denn

$$\begin{aligned} \varphi_b(\text{Ad}(g)(\xi))(\eta) &= b(\text{Ad}(g)(\xi), \eta) = b(\xi, \text{Ad}(g^{-1})(\eta)) = \varphi_b(\xi)(\text{Ad}(g^{-1})(\eta)) \\ &= \text{Ad}^*(g^{-1})(\varphi_b(\xi))(\eta) \end{aligned}$$

Ist $\mu : X \rightarrow \mathfrak{g}^*$ eine Momentum-Abbildung, so wird die zugehörige Abbildung $\hat{\mu}$ betrachtet, welche definiert wird durch $\hat{\mu} := \varphi_b^{-1} \circ \mu$, deren Bild in \mathfrak{g} liegt.

Es sei nun $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ mit der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$. Dabei ist

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Man definiert eine Bilinearform b auf \mathfrak{g} durch $b(\xi, \eta) := \frac{1}{2}\text{Tr}(\xi\eta)$. Sie ist nicht ausgeartet. Da $\text{Ad}(g)(\xi) = g\xi g^{-1}$ und $\text{Tr}(\xi\eta) = \text{Tr}(\eta\xi)$, folgt sofort, dass b invariant ist. Ist $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ die Dualbasis von \mathfrak{g}^* , so gilt $e_i^* = \varphi_b(e_i)$ für $i = 1, 2$ und $e_3^* = -\varphi_b(e_3)$. Hat die Momentum-Abbildung μ die Darstellung $\mu(x) = \sum \mu_i(x)e_i^*$ mit $\mu_i(x) = \mu(x)(e_i)$, dann ist $\hat{\mu}(x) = \mu_1(x)e_1 + \mu_2(x)e_2 - \mu_3(x)e_3$.

Ziel ist es, die Abbildung $\hat{\mu} : (\Delta \times \Delta) \setminus \Delta \rightarrow \mathfrak{g}$ zu berechnen. $\hat{\mu}$ lässt sich dann auf ganz X stetig fortsetzen. Die Diagonale wird auf den Nullpunkt abgebildet und ihr Bild $\text{Im}(\hat{\mu})$ ist dann der offene Kegel \mathcal{E}_- vereinigt mit dem Ursprung $\{0\}$.

In diesem Abschnitt wird mit $G^{\mathbb{C}}$ die komplexe Lie-Gruppe $SL_2(\mathbb{C})$ und mit $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ die zugehörige Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ bezeichnet. Man definiert den *komplex projektiven Raum* durch

$$\mathbb{P}_1 := \{[z_0 : z_1]; (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus (0, 0)\}$$

Dabei wird mit $[z_0 : z_1]$ die komplexe Ursprungsgerade in \mathbb{C}^2 bezeichnet, welche durch den Punkt (z_0, z_1) verläuft. Diese wird beschrieben durch die folgende Äquivalenzrelation

$$w \sim z :\Leftrightarrow w = \lambda z \quad \text{für } w, z \in \mathbb{C}^2 \setminus (0, 0) \text{ und } \lambda \in \mathbb{C}$$

\mathbb{P}_1 ist eine komplexe 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{C}^2 . Die Koordinatenkarten

$$\varphi_0 : \mathbb{P}_1 \setminus \{1, 0\} \rightarrow \mathbb{C}; [z_0 : z_1] \mapsto \frac{z_0}{z_1}$$

bzw.

$$\varphi_1 : \mathbb{P}_1 \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}; [z_0 : z_1] \mapsto \frac{z_1}{z_0}$$

werden *homogene Koordinaten* von \mathbb{P}_1 genannt.

Die komplexe Kreisscheibe Δ lässt sich in den \mathbb{P}_1 einbetten durch $\{[\zeta, 1]; |\zeta| < 1\} \subset \mathbb{P}_1$. Im Laufe dieses Abschnittes wird an der ein oder anderen Stelle diese Identifikation für Δ verwendet.

Die spezielle lineare Gruppe $SL_2(\mathbb{C})$ wirkt auf \mathbb{P}_1 durch

$$A[z_0 : z_1] := [az_0 + bz_1 : cz_0 + dz_1]$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$$

Die Automorphismengruppe von \mathbb{P}_1 ist gegeben durch $\text{Aut}(\mathbb{P}_1) = SL_2(\mathbb{C}) / \pm Id$.

Im Nachfolgenden wird die Diagonalwirkung von $SL_2(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ betrachtet.

Die Bahnabbildung

$$\alpha^{(v)} : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1; A \mapsto A.v \quad (5.12)$$

mit $v = ([z], [w])$ ist holomorph. Somit folgt

$$J(\alpha^{(v)})_* \xi(f) = (\alpha^{(v)})_*(i\xi)(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\exp(ti\xi).v) \quad (5.13)$$

für $\xi \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Sei nun $(\Delta \times \Delta \setminus \Delta, \omega)$ die symplektische Kähler-Mannigfaltigkeit aus dem vorangegangenen Abschnitt mit $\omega = -2i\partial\bar{\partial}\theta_P = -dd^c\theta_P$. Aus Satz 5.1.1 folgt mit $\vartheta := d^c\theta_P$ die Existenz einer äquivarianten Momentum-Abbildung $\mu : \Delta \times \Delta \setminus \Delta \rightarrow \mathfrak{sl}_2^*$ mit

$$\mu(x)(\xi) = -\iota_{\xi}\vartheta(x) \quad (5.14)$$

mit $\xi := \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Die Momentum-Abbildung hat die Gestalt

$$\mu(x) = \mu_1(x)e_1^* + \mu_2(x)e_2^* + \mu_3(x)e_3^*$$

mit

$$\mu_i(x) = \mu(x)(e_i)$$

Aus (2.26) erhält man $d^c\theta_P(\hat{\xi}) = -d\theta_P(J\hat{\xi})$ und mit (2.24) folgt

$$\mu_\xi := J\hat{\xi}(\theta_P) \quad (5.15)$$

Es soll die Einschränkung von μ auf Σ_X berechnet werden. Mit der G -Äquivarianz von μ bezüglich der Diagonalwirkung auf X und der Coadjungierten Wirkung $\text{Ad}_{g^{-1}}^*$ auf \mathfrak{g}^* lässt sich dann die Momentum-Abbildung auf ganz X ermitteln. Zunächst betrachtet man die Einschränkung der μ_i auf L , d.h.

$$\mu_i(z) := J\hat{e}_i(\theta(z))$$

wobei $\theta(z) := \theta_P(z, -z)$ die Einschränkung des Poincaré-Abstandes auf L ist. Man weist nach, dass

$$Ce_iC^{-1} = \xi_i \quad (5.16)$$

für $i = 1, 2, 3$. Dabei ist $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ die in Abschnitt 2.3 definierte Basis von $\mathfrak{su}(1, 1)$, mit

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Aus (5.16) folgt für das Vektorfeld \hat{e}_i auf Δ

$$\begin{aligned} \hat{e}_i(z) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(te_i).z = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Ce^{te_i}C^{-1}.z = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{tCe_iC^{-1}}.z \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{t\xi_i}.z = \hat{\xi}_i(z) \end{aligned}$$

Es soll nun μ_3 längs L berechnet werden, d.h.

$$\mu_3(z) = J\hat{\xi}_3(\theta(z)) \quad (5.17)$$

Die Wirkung der 1-parametrischen Untergruppe erzeugt von $J\xi_3$ ist gegeben durch

$$e^{it\xi_3}.z = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.z = e^{2t}z$$

Dann folgt mit (5.8) und (5.13)

$$\begin{aligned} J\hat{\xi}_3(\theta)(z) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \theta(e^{it\xi_3}.z) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \ln \left(\frac{1 + e^{2t}|z|}{1 - e^{2t}|z|} \right)^2 \\ &= \frac{8|z|}{1 - |z|^2} \end{aligned}$$

Für die beiden anderen Richtungen e_1 und e_2 verschwindet μ längs Σ_X . Um dies zu beweisen, werden an dieser Stelle die nötigen Vorbereitungen getroffen.

Es sei X eine n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Dann ist der Tangentialraum $T_x X$ im Punkt $x \in X$ ein $2n$ -dimensionaler reeller Vektorraum mit einer komplexen Struktur $J := J_x$. Es sei $M \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit mit reeller Kodimension Eins. Dann ist für jeden Punkt $x \in M$ der Tangentialraum $T_x M$ ein $(2n - 1)$ -dimensionaler Unterraum von $T_x X$. Durch

$$T_x^{\mathbb{C}} M := J T_x M \cap T_x M \subset T_x M$$

wird ein $(n - 1)$ -dimensionaler komplexer Unterraum von $T_x X$ definiert.

Von besonderem Interesse ist im Folgenden die Untermannigfaltigkeit $M := G.x$ von $X := \Delta \times \Delta$ mit $x = (t, -t) \in \Sigma_X$. In diesem Fall ist der komplexe Tangentialraum $T_x^{\mathbb{C}} M$ 1-dimensional.

Lemma 5.3.1

Es sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $M \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit. Desweiteren sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit glatter Faser M und $x \in M$. Dann gilt für jedes Vektorfeld V auf X mit $V(x) \in T_x M$

$$V(f)(x) = 0$$

Beweis:

Der Tangentialraum von $M \hookrightarrow X$ hat folgende Gestalt

$$T_x M = \{v \in T_x X; \gamma \subset M \text{ mit } \gamma(0) = x, \dot{\gamma}(0) = v\}$$

Dann gilt

$$V(f)(x) = V(x)(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t))$$

Da $f|_M$ konstant ist, folgt sofort die Behauptung.

□

Dieses Lemma soll nun auf $X = \Delta \times \Delta$ angewendet werden. Die Untermannigfaltigkeit $M \subset X$ soll die G -Bahn $M := G.x$ im Punkt $x = (t, -t) \in \Sigma_X$ sein. Die Funktion f ist die Poincaré'sche Abstandsfunktion $f := \theta_P$.

Es sei $\xi \in \mathfrak{g}$. Dann gilt für $V := \hat{\xi}$ per Definition $V(x) \in T_x M$ und es folgt unmittelbar $\hat{\xi} \equiv 0$. Für $V := J\hat{\xi} \in T_x^{\mathbb{C}} M$ kann obiges Lemma in der Regel nicht angewendet werden. Falls aber $\hat{\xi}$ in $T_x^{\mathbb{C}} M$ enthalten ist, so ist auch $J\hat{\xi} \in T_x^{\mathbb{C}} M$ und somit insbesondere in $T_x M$. Somit folgt in diesem Fall $J\hat{\xi} \equiv 0$.

Die Vektorfelder $\hat{\xi}_1$ und $\hat{\xi}_2$ haben die Eigenschaft im komplexen Tangentialraum $T_x^{\mathbb{C}}M$ enthalten zu sein. Um dies einzusehen benötigt man das folgende Lemma:

Lemma 5.3.2

Die Vektoren $\hat{\xi}_1(x)$ und $\hat{\xi}_2(x)$ sind linear abhängig im komplexen Tangentialraum $T_x^{\mathbb{C}}X$ für jedes $x = (t, -t) \in \Sigma_X$.

Beweis:

Man betrachtet die Bahnabbildung aus (5.12) für $x = (t, -t) \in \Sigma_X \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$

$$\alpha^x : G^{\mathbb{C}} \rightarrow G^{\mathbb{C}}.x; g \mapsto g.x$$

Sie ist surjektiv. Dann ist aber auch ihr Pushforward

$$(\alpha^x)_* : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = T_e G^{\mathbb{C}} \rightarrow T_x G^{\mathbb{C}}.x$$

surjektiv. Aus der universellen Eigenschaft des Quotientenvektorraumes (vgl. [FI]: chp. 2, p. 122 f.) folgt

$$T_x G^{\mathbb{C}}.x \cong \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} / \text{Ker}((\alpha^x)_*)$$

Es soll nun $\text{Ker}((\alpha^x)_*)$ berechnet werden, d.h.

$$(\alpha^x)_* A(f) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f(\exp(As)v) = Av(f) = 0$$

Dabei ist $v := ([z], [w]) \in \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ mit $z = (t, 1)$ und $w = (-t, 1)$ und f eine beliebige reellwertige Funktion auf $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. Damit diese Gleichung erfüllt ist, muss $\exp(As)$ Element der Isotropiegruppe von v sein, d.h.

$$e^{As}.[z] = [z] \quad \text{und} \quad e^{As}.[w] = [w]$$

Es existieren somit komplexwertige Funktionen $\lambda_1(s)$ und $\lambda_2(s)$, sodass

$$e^{As}z = \lambda_1(s)z \quad \text{bzw.} \quad e^{As}w = \lambda_2(s)w$$

Aus obigen Gleichungen folgt, dass die Abbildungen λ_1 und λ_2 linear sind, d.h. $\lambda_i(s) = \lambda_i s$ mit $\lambda_i \in \mathbb{C}$ für $i = 1, 2$. Durch Ableiten der Gleichungen an der Stelle $s = 0$ erhält man

$$Az = \lambda_1 z \quad \text{bzw.} \quad Aw = \lambda_2 w$$

Lösen dieser Gleichungen liefert

$$A = \begin{pmatrix} 0 & ct^2 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

Die beiden Vektoren $\hat{\xi}_1(x) = (\alpha^{(x)})_*\xi_1$ und $\hat{\xi}_2(x) = (\alpha^{(x)})_*\xi_2$ sind genau dann linear abhängig in $T_x G^{\mathbb{C}}.x$, wenn ein $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert, sodass die folgende Gleichung erfüllt ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & ct^2 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

Man berechnet $\lambda = 2ic(1 - t^2)$. □

Lemma 5.3.3

Es sei $x = (t, -t) \in \Sigma_X$. Für jeden Orbit $M = G.x$ sind sowohl $\hat{\xi}_1(x)$ als auch $\hat{\xi}_2(x)$ enthalten im komplexen Tangentialraum $T_x^{\mathbb{C}}M$.

Beweis:

Für $x = (t, -t)$ ist die Isotropiegruppe die diskrete Gruppe $G_x = \pm Id$. Dann folgt aus Satz 2.3.2, dass die Abbildung $\tilde{\alpha}^{(x)} : G/\pm Id \rightarrow G.x$ ein Diffeomorphismus ist. Somit ist $\alpha^{(x)} : G \rightarrow G.x; g \mapsto g.x$ ein lokaler Diffeomorphismus und der zugehörige Pushforward $(\alpha^{(x)})_* : \mathfrak{g} = T_e G \rightarrow T_x G.x =: T_x M$ ein lokaler Isomorphismus. Aus der linearen Unabhängigkeit von $\xi_1(x)$ und $\xi_2(x)$ in \mathfrak{g} folgt somit auch die lineare Unabhängigkeit von $\hat{\xi}_1(x) = (\alpha^{(x)})_*\xi_1$ und $\hat{\xi}_2(x) = (\alpha^{(x)})_*\xi_2$ in $T_x M$. Da $\hat{\xi}_1(x)$ und $\hat{\xi}_2(x)$ linear abhängig in $T_x^{\mathbb{C}}X$ sind, folgt $\hat{\xi}_1(x), \hat{\xi}_2(x) \in T_x^{\mathbb{C}}M$. □

Aus den vorangegangenen Ergebnissen ergibt sich die folgende Proposition:

Proposition 5.3.4

Die Einschränkung der Abbildungen μ_1 und μ_2 auf Σ_X ist konstant Null.

Beweis:

Da für jedes $x \in \Sigma_X$ die Vektoren $\hat{\xi}_1(x), \hat{\xi}_2(x)$ im komplexen Tangentialraumes $T_x^{\mathbb{C}}M$ enthalten sind, so sind auch $J\hat{\xi}_1(x), J\hat{\xi}_2(x)$ Elemente des komplexen Tangentialraumes. Desweiteren ist die G -Bahn M die Faser der Poincaré'schen Abstandsfunktion. Aus Lemma 5.3.1 folgt, dass $J\hat{\xi}_i(\theta(x))$ verschwindet. Mit (5.17) ergibt sich

$$\mu_i|_{\Sigma_X}(x) = J\hat{\xi}_i(\theta(x)) = 0$$

für $i = 1, 2$. □

Es kann nun das wesentliche Resultat dieses Abschnittes formuliert werden. Für einen Punkt $\alpha = x_1 e_1^* + x_2 e_2^* + x_3 e_3^* \in \mathfrak{sl}_2^*$ werden nachfolgend die Koordinaten (x_1, x_2, x_3) verwendet.

Satz 5.3.5

Die stetige Fortsetzung der Momentum-Abbildung μ aus (5.14) im Punkt $(0, 0)$ ist ein Homöomorphismus von Σ_X auf die Halbachse $\Sigma_{\mathfrak{g}^*} := \{(0, 0, x_3); x_3 \geq 0\}$ mit

$$\begin{aligned} \mu|_{\Sigma_X} : \Sigma_X &\rightarrow \Sigma_{\mathfrak{g}^*} \\ (t, -t) &\mapsto \left(0, 0, \frac{8t}{1-t^2}\right) \end{aligned}$$

Die Einschränkung auf $t \neq 0$ ist sogar ein Diffeomorphismus mit inverser Funktion

$$x_3 \mapsto \frac{4 + \sqrt{16 + x_3^2}}{x_3}$$

Beweis:

Es sei $\xi = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ und $x = (t, -t) \in \Sigma_X$. Dann folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned} \mu|_{\Sigma_X}(x)(\xi) &= \xi_1 \mu_1(x) + \xi_2 \mu_2(x) + \xi_3 \mu_3(x) \\ &= \mu_1(x) e_1^*(\xi) + \mu_2(x) e_2^*(\xi) + \mu_3(x) e_3^*(\xi) \end{aligned}$$

□

Die Identifizierung von \mathfrak{sl}_2^* mit \mathfrak{sl}_2 liefert die Abbildung $\hat{\mu} : \Sigma_X \rightarrow \Sigma_{\mathfrak{g}}$ mit

$$(t, -t) \mapsto \left(0, 0, -\frac{8t}{1-t^2}\right)$$

Dabei wird mit $\Sigma_{\mathfrak{g}} = \{(0, 0, x_3); x_3 \leq 0\}$ die negative Halbachse in den Koordinaten $\{e_1, e_2, e_3\}$ bezeichnet.

Die Abbildung $\hat{\mu}$ ist G -äquivariant. Da Σ_X ein exakter Schnitt der Wirkung ist, d.h. $G.\Sigma_X = X$, folgt

$$\hat{\mu}(X) = \hat{\mu}(G.\Sigma_X) = G.\hat{\mu}(\Sigma_X) = G.\Sigma_{\mathfrak{g}} = \mathcal{E}_- \cup \{0\}$$

Mit anderen Worten ist das Bild der Momentum-Abbildung $\hat{\mu}$ gerade der negative offene Kegel vereinigt mit dem Nullpunkt $\text{Im}(\hat{\mu}) = \mathcal{E}_- \cup \{0\}$.

Es ist gelungen, die Menge der elliptischen Elemente als Bild einer symplektischen Mannigfaltigkeit darzustellen. Um die Konstruktion eines Ensembles zu komplementieren, soll abschließend beschrieben werden, wie sich ein Wahrscheinlichkeitsmaß als direktes Bildmaß auf \mathcal{E} beschreiben lässt. Ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf X gegeben, kann diese mittels μ auf $\text{Im}(\mu)$ übertragen werden.

Man definiert:

Definition: Pushforward-Maß

Sei ν eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf X und $\mu : X \rightarrow \mathcal{E}$ die Momentum-Abbildung. Dann wird für jede offene Teilmenge $V \subset \mathcal{E}$ durch

$$P(V) := \mu_*(\nu(V)) := \nu(\mu^{-1}(V))$$

das Bildmaß von ν auf \mathcal{E} definiert. Man nennt das Maß $P := \mu_*\nu$ auch das *Pushforward-Maß* von ν .

Ist ν invariant unter der Gruppenwirkung einer kompakten Untergruppe $K \subset G$ auf X , so ist per Definition auch $\mu_*\nu$ invariant unter der Gruppenwirkung von K auf $\mu(X)$.

5.4 Das Bildmaß der Gleichverteilung

Das Maß der Gleichverteilung mit Wahrscheinlichkeitsdichte $\mathbb{1}_X dz \wedge d\bar{z} \wedge dw \wedge d\bar{w}$ auf X ist das einfachste Beispiel einer invarianten Wahrscheinlichkeitsverteilung. In diesem Abschnitt soll nun für diesen Fall das Pushforward-Maß auf $\mathcal{E}_- \cup \{0\}$ ermittelt werden.

In der Quantenmechanik gilt hierbei besonderes Interesse der Spektralzerlegung der zugehörigen Verteilung $P = \mu_*\nu$ auf dem Bild $\text{Im}(\mu)$. Es ist wünschenswert, die Verteilung der Eigenwerte der Operatoren auf \mathcal{E}_- zu untersuchen. Hierzu ist es zweckmäßig, die *Verteilungsfunktion* F zu betrachten.

Für eine Zufallsvariable X bzw. ihre Verteilung P definiert man die *Verteilungsfunktion* $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := P(X \leq x)$$

D.h. die Verteilungsfunktion gibt die Wahrscheinlichkeit für eine Realisierung von X kleiner oder gleich einem vorgegebenen x an. Ist F differenzierbar, so definiert man die zugehörige *Wahrscheinlichkeitsdichte* f durch

$$f(x) := \frac{d}{dx} F(x)$$

Wie in Kapitel 3.2 gezeigt wurde, liegt jeder Operator $A \in \mathcal{E}_-$ auf dem G -Orbit genau einer Matrix λJ , wobei $\lambda > 0$ ist.

Die Verteilungsfunktion der Spektralkoordinate x lässt sich dann beschreiben durch

$$F(x) := P(\{\lambda < x\}) = P(G.\Sigma_{\mathfrak{g}}(x))$$

wobei $\Sigma_{\mathfrak{g}}(x) := \{(0, 0, x_3) \in \Sigma_{\mathfrak{g}}; |x_3| < x\}$ und $x > 0$ ist.

Anders ausgedrückt ist

$$F(x) := \nu(G.\Sigma_X(x)) =: \nu(U_{t(x)})$$

wobei $\Sigma_X(x) := \{(s, -s) \in \Sigma_X; 0 \leq s \leq t(x) < 1\}$ und $t := t(x)$ definiert wird durch die Gleichung

$$x = \frac{8t}{1-t^2} > 0 \quad (5.18)$$

Bei einer Gleichverteilung auf X lässt sich die Verteilungsfunktion $F(x)$ berechnen durch

$$F(x) := c \int_{U(t)} \mathbb{1} dz \wedge d\bar{z} \wedge dw \wedge d\bar{w} \quad (5.19)$$

wobei mit (z, w) die Standardkoordinaten auf X als Teilmenge des \mathbb{C}^2 bezeichnet werden. Die Normierungskonstante c berechnet sich aus der Eigenschaft der Verteilungsfunktion, das totale Maß Eins zu haben:

$$\tilde{c} \int_X \mathbb{1} dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 = 1$$

Dabei ist $dx_1 \wedge dy_1 = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$. Aus obiger Gleichung erhält man

$$\tilde{c} = \frac{1}{\text{vol}(X)} = \frac{1}{\text{vol}(\Delta \times \Delta)} = \pi^{-2}$$

und somit $c = -(2\pi)^{-2}$.

Um das Integral (5.19) zu berechnen, betrachtet man U_t als Faser der Projektionsabbildung

$$\text{pr} : X \rightarrow \Delta; (z, w) \mapsto z$$

über Δ . Es ist dann das folgende Integral zu lösen

$$F(x) = c \int_{\Delta} A(a, x) da \wedge d\bar{a} \quad (5.20)$$

wobei

$$A(a, x) = \int_{R(a, x)} \mathbb{1}_{\Delta} dz \wedge d\bar{z} \quad (5.21)$$

mit $R(a, x) := \text{pr}^{-1}(a) \cap U_{t(x)}$. Das Integral (5.21) ist der Flächeninhalt des Gebietes $R(a, x)$. Man betrachtet zunächst das Gebiet $R(0, x)$, welches eine Kreisscheibe ist.

Um dies einzusehen, müssen für jedes $(s, -s) \in \Sigma_X$ die Transformationen $g_s \in G$ mit $g_s(s) = 0$ bestimmt werden. Diese sind gegeben durch

$$g_s(z) = e^{i\varphi} \frac{s - z}{1 - sz}$$

für alle $\varphi \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$g_s(s, -s) = \left(0, e^{i\varphi} \frac{2s}{1 + s^2}\right)$$

Somit ist $R(0, x)$ die Kreisscheibe $\Delta(0, u)$ mit Radius $u = \frac{2t}{1+t^2}$ um $0 \in \Delta$, wobei $t = t(x)$ durch (5.18) definiert wird. Unter Verwendung der Äquivarianz von pr folgt

$$R(a, x) = g_a \cdot R(0, x) \subset \Delta$$

mit

$$g_a(z) = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}$$

Aus dem Transformationssatz für Differentialformen folgt für das Integral (5.21)

$$A(a, x) = \int_{R(0, x)} g_a^*(dz \wedge d\bar{z})$$

Aus

$$g_a^*(dz \wedge d\bar{z}) = g_a^*dz \wedge g_a^*d\bar{z}$$

erhält man mit

$$g_a^*dz = \frac{\partial g_a(z)}{\partial z} dz = \frac{1 - |a|^2}{(1 + \bar{a}z)^2} dz$$

und

$$g_a^*d\bar{z} = d(\overline{g_a(z)}) = \frac{\partial \overline{g_a(z)}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = \frac{\overline{1 - |a|^2}}{(1 + \bar{a}z)^2} d\bar{z}$$

den Pullback von $dz \wedge d\bar{z}$ mittels g_a

$$\begin{aligned} g_a^*(dz \wedge d\bar{z}) &= \left| \frac{\partial g_a(z)}{\partial z} \right|^2 dz \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{(1 - |a|^2)^2}{|1 + \bar{a}z|^4} dz \wedge d\bar{z} \end{aligned}$$

Es bleibt also das folgende Integral zu lösen

$$A(a, x) = \int_{\Delta(0, u)} \frac{(1 - |a|^2)^2}{|1 + \bar{a}z|^4} dz \wedge d\bar{z}$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie $A(re^{i\varphi}, x) = A(r, x)$ mit $r \in \mathbb{R}$ lässt sich das Integral vereinfachen.

Proposition 5.4.1

Es sei $t := t(x)$ definiert durch die Gleichung $x = \frac{8t}{1-t^2}$. Die Verteilungsfunktion F lässt sich berechnen durch das Integral

$$F(x) = \frac{i}{\pi} \int_0^1 r(1-r^2)^2 \left(\int_{\Delta(0,u)} |1+rz|^{-4} dz \wedge d\bar{z} \right) dr$$

Beweis:

Für $a \in \Delta$ verwende man die folgenden Koordinaten

$$\begin{aligned} a &\rightarrow re^{i\varphi} \\ \bar{a} &\rightarrow re^{-i\varphi} \end{aligned}$$

mit $r \in [0, 1)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} da &= e^{i\varphi} dr + ire^{i\varphi} d\varphi \\ d\bar{a} &= e^{-i\varphi} dr - ire^{-i\varphi} d\varphi \end{aligned}$$

und man erhält

$$da \wedge d\bar{a} = -2irdr \wedge d\varphi$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} A(a, x) da \wedge d\bar{a} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 -2irA(re^{i\varphi}, x) dr \wedge d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 -2irA(r, x) dr d\varphi \\ &= -4\pi i \int_0^1 A(r, x) r dr \end{aligned}$$

□

Abschließend soll nun das Integral (5.20) berechnet werden. Unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie reduziert sich der Ausdruck auf

$$F(x) = \frac{i}{\pi} \int_0^1 A(r, x) r dr$$

Zur Vereinfachung der Notation wird zunächst $F(u)$ für $0 \leq u < 1$ berechnet, wobei mit $u = \frac{2t(x)}{1+t(x)^2}$ der Radius der Kreisscheibe $\Delta_u := \Delta(0, u)$ bezeichnet wird.

Um $F(u)$ explizit zu berechnen, ist es notwendig, das Gebiet $R(r, u) = g_r \cdot \Delta_u$ mit $\Delta_u = \{z \in \mathbb{C}; |z| < u\}$ genauer zu untersuchen. Das Gebiet

$$g_r \cdot \Delta_u = \left\{ \frac{z+r}{1+rz}; |z| < u \right\}$$

heißt *Poincaré-Kreisscheibe* mit Zentrum $g_r(0) = r$. Da der Euklidische Flächeninhalt dieses Gebietes gesucht ist, ist nachfolgender Satz für die weiteren Schritte von zentraler Bedeutung.

Satz 5.4.2

Poincaré-Kreisscheiben sind Euklidische Kreisscheiben und umgekehrt.

Beweis:

1. Man betrachtet die Automorphismengruppe auf \mathbb{P}_1 . Durch Einschränkung auf eine Karte, z.B. φ_0 , erhält man die Abbildung $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ mit $z = \frac{z_0}{z_1}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc = 1$.
2. Jedes Element dieser Gruppe lässt sich darstellen als Kombination affiner Transformationen $z \mapsto \alpha z + \beta$ und Inversionen $z \mapsto \frac{1}{z}$.
3. Es ist $\Delta_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}$ die Euklidische Kreisscheibe mit Radius $r < \infty$ um z_0 . Für $r = \infty$ definiert man die Euklidische Gerade durch $\Delta_\infty(z_0) := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z_0)\}$.
4. Die Abbildungen aus 2. bilden Euklidische Kreisscheiben bzw. Geraden auf Euklidische Kreisscheiben bzw. Geraden ab. Somit haben auch die Automorphismen von \mathbb{P}_1 diese Eigenschaft.
5. Die Automorphismengruppe der komplexen Kreisscheibe $\operatorname{Aut}(\Delta)$ ist eine Untergruppe von $\operatorname{Aut}(\mathbb{P}_1)$.
6. Man stellt fest, dass Poincaré-Kreisscheiben und Euklidische Kreisscheiben mit Zentrum in Null übereinstimmen. Dies folgt aus der Tatsache, dass die Isotropiegruppe in Null gerade die Menge der Drehungen um Null ist.
7. Es sei nun D eine beliebige Poincaré-Kreisscheibe. Dann gibt es einen Automorphismus $g \in \operatorname{Aut}(\Delta)$, sodass $g(D)$ eine Poincaré-Kreisscheibe mit Zentrum in Null ist. Aus 6. folgt, dass $g(D)$ eine euklidische Kreisscheibe ist. Und somit folgt aus 4., dass $D = g^{-1}g(D)$ ebenfalls eine Euklidische Kreisscheibe ist.
8. Ist andernfalls D eine Euklidische Kreisscheibe, dann gibt es einen Automorphismus g , sodass $g(D)$ eine Euklidische Kreisscheibe mit Zentrum in Null ist. Aus 6. folgt, dass $g(D)$ eine Poincaré-Kreisscheibe mit Zentrum in Null ist. Somit ist $D = g^{-1}g(D)$ eine Poincaré-Kreisscheibe. \square

Aus Vorherigem resultiert, dass es ausreichend ist, den Euklidischen Radius von $R(r, u)$ zu berechnen. Das Gebiet $R(r, u)$ ist invariant unter komplexer Konjugation. Die komplexe Konjugation beschreibt die Spiegelung von $R(r, u)$ an der reellen Achse. D.h. der Schnitt von $R(r, u)$ mit der positiven reellen Achse wird auf sich selbst abgebildet. Daher ist dieser Schnitt genau der Durchmesser von $R(r, u)$. Somit folgt für den Radius ρ von $R(r, u)$

$$\rho = \frac{1}{2}(g_r(u) - g_r(-u)) = \frac{u(1-r^2)}{1-r^2u^2}$$

und aus (5.21) folgt

$$\begin{aligned} A(r, u) &= \int_{R(r, u)} \mathbb{1} dz \wedge d\bar{z} \\ &= \int_{R(r, u)} -2i dx \wedge dy \\ &= -2i\pi\rho^2 \end{aligned}$$

Infolgedessen bleibt das Integral

$$\begin{aligned} F(u) &= 2 \int_0^1 \rho(r)^2 r dr \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{u(1-r^2)}{1-r^2u^2} \right)^2 r dr \end{aligned}$$

zu lösen. Die Berechnung des Integrals liefert

$$\begin{aligned} F(u) &= 2 \frac{1-u^2}{u^2} \ln(1-u^2) + \frac{u^4 - 3u^2 + 2}{(1-u^2)} \\ &= \frac{2-2u^2}{u^2} \ln(1-u^2) + 2 - u^2 \end{aligned}$$

Obige Verteilungsfunktion soll nun in der Spektralkoordinate x ausgedrückt werden. Um die Formeln möglichst einfach zu halten, sei $\tilde{x} := \frac{x}{4}$. Man beachte die folgenden Gleichungen

$$u(t) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{und} \quad \tilde{x}(t) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Mit $t > 0$ erhält man aus der zweiten Gleichung

$$t = \frac{-1 + \sqrt{\tilde{x}^2 + 1}}{\tilde{x}}$$

Durch Einsetzen in $u(t)$ berechnet man

$$u^2 = \frac{\tilde{x}^2}{1 + \tilde{x}^2}$$

und erhält somit die Verteilungsfunktion in Abhängigkeit von \tilde{x}

$$F(\tilde{x}) = -\frac{2}{\tilde{x}^2} \ln(1 + \tilde{x}^2) + \frac{1}{1 + \tilde{x}^2} \quad (5.22)$$

Daraus resultiert die Dichtefunktion

$$f(\tilde{x}) = \frac{4}{\tilde{x}^3} \ln(1 + \tilde{x}^2) - \frac{6\tilde{x}^2 + 4}{\tilde{x}(1 + \tilde{x}^2)^2} \quad (5.23)$$

Abschließend soll das asymptotische Verhalten von f für $\tilde{x} \rightarrow 0$ und $\tilde{x} \rightarrow \infty$ untersucht werden. Mit $s := \tilde{x}^2$ lässt sich (5.22) für $s \sim 0$ in die folgende Reihe entwickeln

$$\begin{aligned} F(s) &= -\frac{2}{s} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{s^{k+1}}{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k s^k \\ &= -1 + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k-1}{k+1} s^k \end{aligned}$$

Somit ist

$$F(\tilde{x}) = -1 + \mathcal{O}(\tilde{x}^4) \quad (5.24)$$

Man berechnet die Dichtefunktion zu

$$f(\tilde{x}) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{2k(k-1)}{k+1} \tilde{x}^{2k-1}$$

Für \tilde{x} nahe Null verhält sich $f(\tilde{x})$ folglich wie

$$f(\tilde{x}) \sim \tilde{x}^3 \quad (5.25)$$

Für $\tilde{x} \sim \infty$ folgt aus (5.23)

$$f(\tilde{x}) \sim \frac{\ln(\tilde{x})}{\tilde{x}^3}$$

Graphisch lässt sich die Verteilung wie folgt darstellen

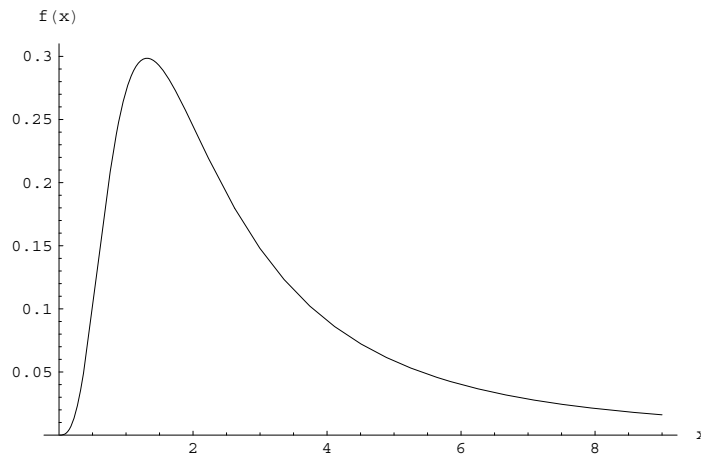


Abbildung 5.1: Dichtefunktion

Die Eigenwertverteilung zeigt, dass „kleine“ Werte nahe Null in diesem Anwendungsbeispiel untypisch sind.

Der *Erwartungswert* einer stetigen Zufallsvariablen X mit Dichte f wird definiert durch

$$E(X) := \int x f(x) dx$$

und ihr k -tes *Moment* durch

$$m_k := E(X^k) = \int x^k f(x) dx$$

Die *Varianz* einer Zufallsvariablen X ist die mittlere quadratische Abweichung der Zufallsvariablen von ihrem Erwartungswert:

$$\text{Var}(X) := E(X - E(X))^2$$

Anders ausgedrückt, misst sie die Streuung um den Erwartungswert. Es gilt

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Aus dem asymptotischen Verhalten von f folgt, dass der Erwartungswert oder das erste Moment der Verteilung wie erwartet einen endlichen Wert annimmt. Dieser lässt sich ermitteln zu

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{4 \ln(1+x^2)}{x^2} - \frac{6x^2+4}{(1+x^2)^2} \right) dx = \frac{3}{2}\pi$$

Hingegen ist das zweite Moment der Verteilung nicht endlich. Der Integrand ist von der Größenordnung $\frac{\ln(x)}{x}$ in der Nähe von $x \sim \infty$ und das Integral wird somit unendlich.

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx > \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

Dies hat zur Folge, dass auch die Varianz der konstruierten Wahrscheinlichkeitsverteilung auf \mathcal{E}_- keinen endlichen Wert annimmt. A priori ist folglich keine qualitative Aussage über die Verteilung der Eigenwerte möglich.

Unter physikalischen Gesichtspunkten ist es interessanter, das Bildmaß einer Gauß-Verteilung in θ_P zu betrachten. Längs Σ_X handelt es sich dabei um eine Verteilung vom Typ der Gauß'sche Normalverteilung in der Variablen t . Genauer gesagt betrachtet man eine Verteilung der Art $e^{-\theta_P^2}$ auf X . In diesem Fall ist zu erwarten, dass Eigenwerte nahe Null wahrscheinlicher werden.

Wie schon anfangs erwähnt, ist die maximal zu erwartende Symmetrie eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf X die Invarianz der Verteilung bezüglich der maximalen kompakten Untergruppe K . Für $SL_2(\mathbb{R}) \cong SU(1,1)$ ist diese Untergruppe die kompakte Gruppe $SO_2(\mathbb{R})$ bzw. die isomorphe Gruppe der komplexen Diagonalmatrizen in $SU(1,1)$. Um ein bestmögliches Maß an Symmetrie zu erzielen, sind Dichtefunktionen der Form $f \circ \theta_P$ viel versprechend. Dabei ist f eine positive Funktion und θ_P die Poincaré'sche Abstandsfunktion. Aus der Invarianz von θ_P folgt sofort die Invarianz der Wahrscheinlichkeitsdichte. In diesem Abschnitt ist die Verteilung für die konstante Funktion $f \equiv 1$ berechnet worden. Es war möglich, die Verteilung exakt zu berechnen. Ein Beispiel für eine nicht-konstante Funktion wurde oben beschrieben. In diesem Fall ist $f(x) = e^{-x^2}$. Es ist nicht auszuschließen, dass die Berechnung der zugehörigen Verteilungsfunktion auf \mathcal{E} nur unter Zuhilfenahme eines numerischen Berechnungsprogramms möglich ist.

5.5 Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es ein Verfahren vorzustellen, mit dem Verteilungsfunktionen auf dem Kegel der elliptischen Elemente konstruiert werden können. Darüber hinaus lohnt es sich, dieses Verfahren auf geeignete zweckdienliche Verteilungen, wie z.B. vom Typ der Gauß-Verteilung, anzuwenden. Es ist erstrebenswert, diese Vorgehensweise im Rahmen zukünftiger Forschungsarbeiten für den höher dimensional Fall auszuarbeiten.

Literaturverzeichnis

- [AM] Ralph Abraham, Jerrold E. Marsden: *Foundations of Mechanics*
Benjamin/Cummings, Reading, MA, second edition, 1980
- [BE] Rolf Berndt: *Einführung in die symplektische Geometrie*
Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1998
- [DH] Herold Dehling, Beate Haupt: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*
Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg (u.a.), 2. Auflage, 2004
- [FG] Klaus Fritzsche, Hans Grauert: *From Holomorphic Functions to Complex Manifolds*
Springer-Verlag, New York (u.a.), 2002
- [FI] Gerd Fischer: *Lineare Algebra*
Vieweg, Wiesbaden (u.a.), 14. Auflage, 2003
- [FR] Klaus Fritzsche: *Grundkurs Funktionentheorie*
Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2009
- [LEE] John M. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds*
Springer-Verlag, New York (u.a.), 2006
- [RE] Reinhold Remmert: *Funktionentheorie 1*
Springer-Verlag, Berlin (u.a.), 1984

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, Kathrin Schaffert, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Titel

Konstruktion von $SL_2(\mathbb{R})$ -Ensembles mittels Poincaré-Metrik

selbstständig verfasst und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln erstellt habe.

Bochum, den 16.11.2010

Kathrin Schaffert