Skript zur Vorlesung Kommutative Algebra

Friedrich-Schiller-Universität Jena

Sommersemester 2021

Hans Franzen

Stand: 12. Juli 2021

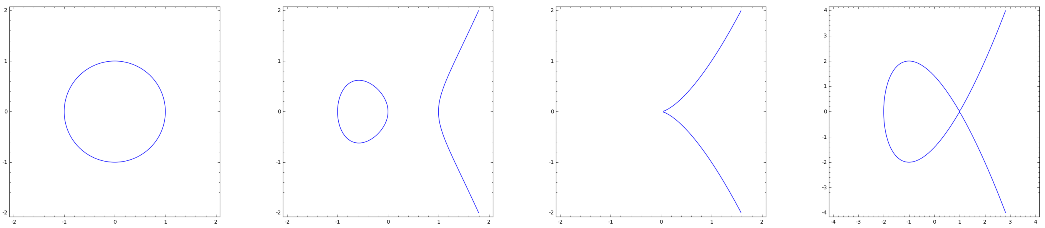
0. Motivation

Definition 0.1. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $f_1, \dots, f_m \in k[t_1, \dots, t_n]$ Polynome. Dann heißt

$$V(f_1, \dots, f_m) := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n \mid f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, m\}$$

die *Verschwindungsmenge* der $f_1, \dots, f_m$.

Beispiel 0.2. Sei $k = \mathbb{C}$. Betrachte $f \in \mathbb{C}[t_1, t_2]$. Dann ist $V(f) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0\}$. In Abbildung 1 sind einige Beispiele für den Schnitt $V(f) \cap \mathbb{R}^2$ angegeben.



(a) $x^2 + y^2 - 1$ (b) $y^2 - x^3 + x$ (c) $y^2 - x^3$ (d) $x^3 - 3x + 2 - y^2$

Abbildung 1. Beispiele für Verschwindungsmengen

0.3. Eine Verschwindungsmenge $X = V(f_1, \dots, f_m)$ wird eine affine algebraische Varietät, wenn man sie mit der Zariski-Topologie und dem Koordinatenring $A(X)$ versieht. Der Ring $A(X)$ ist ein reduzierter (s. Definition 1.6.1) kommutativer Ring mit Eins. Die Idee der algebraischen Geometrie ist geometrische Eigenschaften von X in algebraische Eigenschaften von $A(X)$ zu übersetzen. Zum Beispiel:

Punkte von X	$\widehat{=}$	Maximale Ideale von $A(X)$
Abgeschlossene irreduzible Teilmengen von X	$\widehat{=}$	Primideale von $A(X)$
Abgeschlossene Teilmengen von X	$\widehat{=}$	Radikalideale von $A(X)$
Dimension von X	$\widehat{=}$	Dimension von $A(X)$
Kohärente Garben auf X	$\widehat{=}$	endlich erzeugte Moduln über $A(X)$
Lokales Verhalten an Punkten	$\widehat{=}$	Studium gewisser Lokalisationen von $A(X)$

0.4. Hier sind einige Bücher, die sich mit kommutativer Algebra beschäfigen. Die genauen Literaturangaben finden Sie am Ende des Skripts.

- Altman–Kleiman, A term of commutative algebra, [1]. Frei verfügbar.
- Atiyah–Macdonald, Introduction to commutative algebra, [2]. Ein Klassiker.
- Bourbaki, Commutative algebra, [3]. Englische Übersetzung des französischen Originals. Enzyklopädisch.
- Eisenbud, Commutative algebra with a view toward algebraic geometry, [4]. Viele Anwendungen auf algebraische Geometrie.
- Matsumura, Commutative algebra, [6]. Sehr stringent geschrieben.

- Reid, Undergraduate commutative algebra, [7]. Ebenfalls viele Bezüge zur Geometrie.
- Zariski-Samuel, Commutative algebra, [8]. Auch ein Klassiker.

1. Ringe und Ideale

1.1. Ringe.

Definition 1.1.1. Ein *Ring* besteht aus einer Menge A zusammen mit zwei Abbildungen $+ : A \times A \to A$ und $\cdot : A \times A \to A$, so dass folgende Axiome gelten:

(R.1) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe; ihr neutrales Element werde mit $0 = 0_A$ bezeichnet.
(R.2) Die Verknüpfung $\cdot$ ist assoziativ.
(R.3) Es gelten die Distributivgesetze, also für alle $a, b, c \in A$ gilt

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,$$

wobei die Konvention „Punkt vor Strich" gelte.
(R.4) Bezüglich $\cdot$ gibt es ein (links- und rechts-)neutrales Element $1 = 1_A$. Man nennt 1 die Eins von A.
(R.5) Die Verknüpfung $\cdot$ ist kommutativ, d.h. für alle $a, b \in A$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.

1.1.2. Der Begriff Ring ist in der Literatur nicht einheitlich definiert. Oft werden von einem Ring nur die Axiome (R.1)–(R.4) verlangt, manchmal sogar nur (R.1)–(R.3). Da wir uns in dieser Vorlesung mit kommutativer Algebra beschäftigen, sind fast alle Ringe, die im folgenden auftauchen kommutativ. Ein Tripel $(A, +, \cdot)$, das die Axiome (R.1)–(R.4) erfüllt, werden wir in der Vorlesung einen „nicht-notwendig kommutativen Ring" nennen.

Definition 1.1.3. Sei A ein Ring.

(1) Man A einen *Integritätsbereich* (oder auch nullteilerfrei), falls $1 \neq 0$ ist und falls für alle $a, b \in A \setminus \{0\}$ auch $ab \neq 0$ ist.
(2) Ein Element $a \in A$ heißt *Einheit*, falls es ein $b \in A$ mit $ab = 1$ gibt. Mit $A^\times$ werde die Menge der Einheiten von A bezeichnet. Ein Ring heißt *Körper*, falls $A^\times = A \setminus \{0\}$ ist.

1.1.4. In einem Ring A gilt $1 = 0$, genau dann wenn $A = \{0\}$ ist (und in diesem Fall sind $+$ und $\cdot$ eindeutig festgelegt). Der Nullring ist also weder ein Integritätsbereich, noch ein Körper.

1.1.5. Jeder Körper ist ein Integritätsbereich.

Beispiel 1.1.6. Einige Beispiele für Ringe.

(1) $\mathbb{Z}$ ist ein Integritätsbereich, aber kein Körper.
(2) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind Körper; für eine Primzahl p ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper.
(3) Ist A ein Integritätsring, so ist der Polynomring $A[t]$ auch ein Integritätsring, allerdings kein Körper.
(4) Ist A ein Integritätsring, so ist der formale Potenzreihenring (siehe unten) $A[[t]]$ ein Integritätsring, aber kein Körper.
(5) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist ein Ring, der kein Integritätsbereich ist.
(6) Ist k ein Körper und V ein k-Vektorraum mit $\dim V \geq 2$, so ist $\mathrm{End}(V)$ zusammen mit der Verknüpfung von Endomorphismen ein nicht-kommutativer Ring.

(7) Die geraden ganzen Zahlen $2\mathbb{Z}$ erfüllen die Axiome (R.1)–(R.3) und (R.5), aber nicht (R.4).

1.1.7. Sei A ein Ring. Eine formale Potenzreihe über A in t ist ein formales Symbol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, wobei $a_n \in A$ seien für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Sei $A[[t]]$ die Menge aller formalen Potenzreihen über A in t. Auf $A[[t]]$ definieren wir Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ wie folgt: Seien $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ formale Potenzreihen. Definiere

$$f + g := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) t^n$$
$$f \cdot g := \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i+j=n} a_i b_j \Big) t^n.$$

Beachte, dass $\sum_{i+j=n} a_i b_j$ eine endliche Summe ist. Auf diese Art wird $A[[t]]$ zu einem Ring.

1.1.8. Eine Teilmenge $B \subseteq A$ eines Rings heißt Unterring, falls sie eine Untergruppe von $(A, +)$ ist, falls für alle $b, b' \in B$ gilt $bb' \in B$ und falls $1_A \in B$ ist. Dann ist B zusammen mit der Addition und der Multiplikation von A selbst wieder ein Ring. Ferner ist der Durchschnitt beliebig vieler Unterringe wieder ein Unterring. Daher existiert zu einer Teilmenge $E \subseteq A$ stets ein kleinster Unterring von A, der E enthält. Man bezeichnet ihn als den von E erzeugten Unterring und bezeichnet ihn mit $\mathbb{Z}[E]$.

1.2. **Ideale.**

Definition 1.2.1. Sei A ein Ring. Eine Teilmenge $I \subseteq A$ heißt *Ideal* von A, falls gelten:

(I.1) I ist eine Untergruppe von $(A, +)$; insbesondere ist also $0 \in I$.
(I.2) Für alle $a \in A$ und alle $x \in I$ ist $ax \in I$.

1.2.2. Sei I ein Ideal eines Rings A. Wir betrachten die Quotientengruppe A/I von $(A, +)$ nach der Untergruppe I. Darauf definieren wir die Mulitplikation $\cdot : A/I \times A/I \to A/I$ durch

$$(a + I) \cdot (b + I) := (ab) + I.$$

Die Eigenschaft (I.2) garantiert, dass diese Abbildungsvorschrift wohldefiniert ist. Man rechnet nach, dass A/I wieder ein Ring ist (mit $1_{A/I} = 1_A + I$).

Lemma 1.2.3. *Sei T eine Menge. Für jedes $t \in T$ sei I_t ein Ideal von A.*

(1) Die Menge $\sum_{t \in T} I_t := \{\sum_{t \in T} x_t \mid x_t \in I_t,$ alle $x_t = 0$ außer endlich vielen$\}$ ist ein Ideal von A.
(2) Der Durchschnitt $\bigcap_{t \in T} I_t$ ist ein Ideal von A.

Beweis. Übung. □

1.2.4. Sei A ein Ring und E eine Teilmenge von A. Dann ist

$$(E) := \bigcap_{\substack{I \subseteq A \text{ Ideal} \\ I \supseteq E}} I$$

das kleinste Ideal von A, das E enthält. Man nennt (E) das von E erzeugte Ideal. Ist $E = \{x\}$ einelementig, so ist $(x) = Ax := \{ax \mid a \in A\}$. Ein Ideal I, für das ein $x \in I$ mit $I = (x)$ existiert heißt ein Hauptideal.

1.2.5. Seien $I_1, \dots, I_n$ Ideale von A. Das von allen Produkten $x_1 \dots x_n$ mit $x_\nu \in I_\nu$ $(\nu = 1, \dots, n)$ erzeugte Ideal wird mit $I_1 \dots I_n$ bezeichnet. Es gilt

$$I_1 \dots I_n \subseteq I_1 \cap \dots \cap I_n.$$

1.3. **Ringhomomorphismen.**

Definition 1.3.1. Seien A und B zwei Ringe. Ein Ringhomomorphismus $f : A \to B$ ist eine Abbildung, die folgende Eigenschaften erfüllt:

(H.1) $f(a + a') = f(a) + f(a')$
(H.2) $f(a \cdot a') = f(a) \cdot f(a')$
(H.3) $f(1) = 1$

für alle $a, a' \in A$.

1.3.2. Ein Ringhomomorphismus bildet 0 auf 0 ab.

1.3.3. Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Ringhomomorphismen, so ist $g \circ f$ ein Ringhomomorphismus. Für jeden Ring A ist die Identität $\mathrm{id}_A : A \to A$ ein Ringhomomorphismus.

1.3.4. Für einen Ringhomomorphismus $f : A \to B$ heißt $\ker(f) := f^{-1}(0)$ der Kern von f und $\mathrm{im}(f) := f(A)$ das Bild von f. Während $\ker(f)$ ein Ideal ist, ist $\mathrm{im}(f)$ ein Unterring; genau dann ist $\mathrm{im}(f)$ ein Ideal, wenn f surjektiv ist.

1.3.5 (Universelle Eigenschaft des Quotienten)**.** Sei I ein Ideal eines Rings A. Dann ist die Abbildung $\pi : A \to A/I$ die durch $\pi(a) := a + I$ definiert ist ein surjektiver Ringhomomorphismus. Man nennt π die Quotientenabbildung. Es gilt $\ker(\pi) = I$. Es gilt die übliche universelle Eigenschaft: Ist $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus mit $I \subseteq \ker(f)$, so existiert genau ein Ringhomomorphismus $\overline{f} : A/I \to B$, so dass

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ A/I \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beispiel 1.3.6. Einige Beispiele von Ringhomomorphismen:

(1) Die Teilmengeninklusionen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sind Ringhomomorphismen.
(2) Sei A ein Ring. Dann sind die Teilmengeninklusionen $A \to A[t] \to A[[t]]$ Ringhomomorphismen.
(3) Es gibt keinen Ringhomomorphismus $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ (warum nicht?).

1.3.7 (Universelle Eigenschaft des Polynomrings)**.** Sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $b \in B$. Dann existiert genau ein Ringhomomorphismus $\mathrm{ev}_b : A[t] \to B$, so dass $\mathrm{ev}_b(t) = b$ und

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \\ A[t] \arrow[ur, dashed, "\mathrm{ev}_b"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Man nennt ev_b die Auswertung an b. Für ein Polynom $p \in A[t]$ schreiben wir $\mathrm{ev}_b(p) =: p(b)$.

Definition 1.3.8. Sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus.

(1) Sei $J \subseteq B$ ein Ideal. Wir nennen $J \cap A := f^{-1}(J)$ die *Restriktion* von J auf A.
(2) Sei $I \subseteq A$ ein Ideal. Das von $f(I)$ erzeugte Ideal heißt die *Ausdehnung* von I in B und wird mit IB bezeichnet.

Lemma 1.3.9. *Sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Seien $I \subseteq A$ und $J \subseteq B$ Ideale.*

(1) $J \cap A$ ist ein Ideal von A.
(2) $I \subseteq (IB) \cap A$
(3) $J \supseteq (J \cap A)B$
(4) Sei f surjektiv. Dann gilt $f(I) = IB$ und die Abbildungen

$$\begin{aligned} \{I \subseteq A \mid I \text{ Ideal},\ \ker(f) \subseteq I\} &\longleftrightarrow \{J \subseteq B \mid J \text{ Ideal}\} \\ I &\longmapsto IB = f(I) \\ J \cap A &\longleftarrow\!\shortmid J \end{aligned}$$

sind wohldefinierte, inklusionserhaltende, zueinander inverse Bijektionen.

Beweis. (1) Offensichtlich ist $J \cap A$ eine Untergruppe von $(A, +)$. Seien $x \in J \cap A$ und $a \in A$. Dann ist $f(ax) = f(a)f(x) \in J$ und damit $ax \in J \cap A$.
(2) Sei $x \in I$. Dann ist $f(x) \in f(I) \subseteq IB$ und daher $x \in (IB) \cap A$.
(3) Da J ein Ideal ist, reicht es $f(J \cap A) \subseteq J$ zu zeigen. Sei $y \in f(J \cap A)$, also existiert $x \in J \cap A$ mit $y = f(x)$. Dann ist aber $f(x) \in J$.
(4) Da f surjektiv ist, $f(I)$ ein Ideal, also ist $IB = f(I)$.
Zu den beiden Abbildungen. Zur Wohldefiniertheit beobachten wir, dass $J \cap A \supseteq \ker(f)$ gilt. Dass die beiden Abbildungen Inklusionen erhalten, ist leicht zu sehen. Wir zeigen, dass die Abbildungen zueinander invers sind.
Sei $I \subseteq A$ ein Ideal mit $\ker(f) \supseteq I$. Es genügt $I \supseteq (IB) \cap A$ zu zeigen. Sei $x \in (IB) \cap A$. Dann ist $f(x) \in IB = f(I)$. Also existiert ein $x' \in I$ mit $f(x) = f(x')$. Damit ist $x - x' \in \ker(f) \subseteq I$ und da $x' \in I$ ist, folgt $x \in I$.
Sei $J \subseteq B$ ein Ideal. Es genügt $J \subseteq (J \cap A)B$ zu zeigen. Sei $y \in J$. Dann existiert ein $x \in A$ mit $y = f(x)$. Dann ist $x \in J \cap A$ und damit $y \in f(J \cap A) \subseteq (J \cap A)B$. □

1.4. **Primideale und maximale Ideale.**

Definition 1.4.1. Sei A ein Ring und $I \subsetneq A$ ein Ideal (also insbesondere $A \neq 0$).

(1) I heißt *Primideal*, falls für alle $a, b \in A \backslash I$ gilt $ab \in A \backslash I$. Mit $\mathrm{Spec}(A)$ bezeichnen wir die Menge der Primideale von A.

(2) I heißt *maximales Ideal*, wenn es kein Ideal J von A mit $I \subsetneqq J \subsetneqq A$ gibt. Es sei $\mathrm{Max}(A)$ die Menge der maximalen Ideale von A.

Lemma 1.4.2. *Sei I ein Ideal eines Rings A.*

(1) Genau dann ist I ein Primideal, wenn A/I ein Integritätsbereich ist.
(2) Genau dann ist I ein maximales Ideal, wenn A/I ein Körper ist.

Beweis. (1) Folgt sofort aus der Definition.

(2) Nach Lemma 1.3.9 ist I genau dann ein maximales Ideal, wenn (0) das einzige echte Ideal von A/I ist. Das ist äquivalent dazu, dass $B := A/I$ ein Körper ist: sei $b \in B \setminus \{0\}$. Dann ist $(b) \neq (0)$, also $(b) = (1)$. Deshalb existiert ein $b' \in B$ mit $bb' = 1$. □

Korollar 1.4.3. *Sei A ein Ring. Jedes maximale Ideal von A ist ein Primideal von A.*

Beispiel 1.4.4. Für Primideale und maximale Ideale.

(1) Sei K ein Körper. Dann ist $\mathrm{Spec}(K) = \mathrm{Max}(K) = \{(0)\}$.
(2) Es gilt $\mathrm{Max}(\mathbb{Z}) = \{(p) \mid p \text{ Primzahl}\}$ und $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) = \mathrm{Max}(\mathbb{Z}) \cup \{(0)\}$.
(3) Sei k ein Körper. Dann ist $\mathrm{Max}(k[t]) = \{(f) \mid f \text{ irreduzibles Polynom}\}$ und $\mathrm{Spec}(k[t]) = \mathrm{Max}(k[t]) \cup \{(0)\}$.
(4) Allgemeiner ist für jeden Hauptidealbereich $\mathrm{Max}(A) = \{(a) \mid a \text{ irreduzibel}\}$ und $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Max}(A) \cup \{(0)\}$.
(5) Sei k ein Körper. Seien $t_1, \ldots, t_n$ Unbestimmte und seien $a_1, \ldots, a_n \in k$. Dann ist $(t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n)$ ein maximales Ideal von $k[t_1, \ldots, t_n]$. Die Kette
$$0 \subsetneqq (t_1 - a_1) \subsetneqq (t_1 - a_1, t_2 - a_2) \subsetneqq \ldots \subsetneqq (t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n)$$
ist eine Kette von Primidealen.

Satz 1.4.5. *Sei A ein Ring und $I \subsetneqq A$ ein Ideal. Dann existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von A mit $I \subseteq \mathfrak{m}$.*

Beweis. Der Beweis verwendet das Lemma von Zorn, also das Auswahlaxiom.
Sei
$$\Sigma = \{J \mid J \subsetneqq A \text{ Ideal}, \ I \subseteq J\}.$$
Dann ist $I \in \Sigma$, also $\Sigma \neq \emptyset$, und $(\Sigma, \subseteq)$ ist angeordnet (d.h. die Relation ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch). Ein maximales Element von $(\Sigma, \subseteq)$ ist genau ein maximales Ideal von A, das I enthält. Wir wollen also die Existenz eines solchen maximalen Elements zeigen. Dazu sei $\{J_\alpha \mid \alpha \in K\} \subseteq \Sigma$ eine Kette also $K \neq \emptyset$ und für alle $\alpha, \beta \in K$ gilt $J_\alpha \subseteq J_\beta$ oder $J_\beta \subseteq J_\alpha$. Dann ist
$$\bigcup_{\alpha \in K} J_\alpha$$
ein Ideal von A (klar?) und $\bigcup_{\alpha \in K} J_\alpha \in \Sigma$. Die Kette besitzt also eine obere Schranke in Σ. Dann sagt uns Zorns Lemma, dass $(\Sigma, \subseteq)$ ein maximales Element besitzt. □

Korollar 1.4.6. *In einem Ring A gilt $A^\times = A \setminus \bigcup_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)} \mathfrak{m}$.*

Beweis. Zu „$\subseteq$“: Sei $a \in A^\times$. Dann ist $(a) = A$, also kann a in keinem maximalen Ideal enthalten sein.

Zu „$\supseteq$“: Sei $a \notin \mathfrak{m}$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$. Nach Satz 1.4.5 kann (a) kein echtes Ideal sein. Also ist $(a) = (1)$ und deshalb ist $a \in A^\times$. □

Lemma 1.4.7. *Sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus.*

(1) Ist $\mathfrak{q}$ ein Primideal von B, so ist $\mathfrak{q} \cap A$ ein Primideal von A.

(2) Sei f surjektiv. Dann gelten:

(a) Ist $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal von B, so ist $\mathfrak{n} \cap A$ ein maximales Ideal von A.

(b) Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A mit $\ker(f) \subseteq \mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{p}B$ ein Primideal von B. Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A mit $\ker(f) \subseteq \mathfrak{m}$, so ist $\mathfrak{m}B$ ein maximales Ideal von B.

(c) Die Bijektionen aus Lemma 1.3.9 beschränken sich zu zueinander inversen Bijektionen

$$\begin{array}{ccc} \{I \subseteq A \mid I \text{ Ideal},\ \ker(f) \subseteq I\} & \longleftrightarrow & \{J \subseteq B \mid J \text{ Ideal}\} \\ \cup\!\text{I} & & \cup\!\text{I} \\ \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \ker(f) \subseteq \mathfrak{p}\} & \longleftrightarrow & \operatorname{Spec}(B) \\ \cup\!\text{I} & & \cup\!\text{I} \\ \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A) \mid \ker(f) \subseteq \mathfrak{m}\} & \longleftrightarrow & \operatorname{Max}(B) \end{array}$$

Beweis. (1) Seien $a, a' \in A$ mit $aa' \in \mathfrak{q} \cap A$. Dann ist $f(a)f(a') = f(aa') \in \mathfrak{q}$, also $f(a) \in \mathfrak{q}$ oder $f(a') \in \mathfrak{q}$. Daraus folgt $a \in \mathfrak{q} \cap A$ oder $a' \in \mathfrak{q} \cap A$.

(2) (a) Sei $\mathfrak{n} \cap A \subseteq I \subsetneqq A$ ein Ideal. Dann ist $\mathfrak{n} = (\mathfrak{n} \cap A)B \subseteq IB \subseteq B$. Ferner ist $IB \subsetneqq B$, denn sonst wäre $I = (IB) \cap A = B \cap A = A$. Also muss $\mathfrak{n} = IB$ gelten. Daraus folgt $\mathfrak{n} \cap A = (IB) \cap A = I$.

(b) Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ mit $\ker(f) \subseteq \mathfrak{p}$. Seien $b, b' \in B$ mit $bb' \in \mathfrak{p}B = f(\mathfrak{p})$. Dann gibt es ein $x \in \mathfrak{p}$ mit $f(x) = bb'$. Außerderm existieren $a, a' \in A$ mit $f(a) = b$ und $f(a') = b'$. Dann ist also $aa' - x \in \ker(f) \subseteq \mathfrak{p}$, also $aa' \in \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, folgt $a \in \mathfrak{p}$ oder $a' \in \mathfrak{p}$, folglich $b \in \mathfrak{p}B$ oder $b' \in \mathfrak{p}B$.
Sei $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A)$ mit $\ker(f) \subseteq \mathfrak{m}$. Sei $\mathfrak{m}B \subseteq J \subsetneqq B$ ein Ideal. Dann haben wir $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}B) \cap A \subseteq J \cap A \subseteq A$ und $J \cap A \subsetneqq A$, denn sonst gälte $J = (J \cap A)B = AB = B$. Also muss, nach Maximalität von $\mathfrak{m}$, gelten $\mathfrak{m} = J \cap A$. Damit gilt $\mathfrak{m}B = (J \cap A)B = J$.

(c) Folgt sofort aus (a) und (b). □

1.4.8. Zwei Nicht-Beispiele:

(1) Im Allgemeinen ist die Restriktion eines maximalen Ideals kein maximales Ideal. Betrachte dazu die Inklusion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ und das maximale Ideal $\mathfrak{n} = (0)$.

(2) Allgemein ist die Ausdehnung eines maximalen Ideals kein Primideal. Betrachte dafür die Inklusion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]$ und $\mathfrak{m} = (2)$. Dann ist $\mathfrak{m}\mathbb{Z}[i] = (2)$, aber $2 = (1+i)(1-i)$ in $\mathbb{Z}[i]$.

Proposition 1.4.9 (Primvermeidung)**.** *Sei A ein Ring. Seien $I, J_1, \ldots, J_n \subseteq A$ Ideale und seien $J_3, \ldots, J_n$ Primideale. Falls $I \subseteq \bigcup_{i=1}^n J_i$ gilt, so existiert ein i mit $I \subseteq J_i$.*

Beweis. Wir zeigen die Kontraposition per Induktion über n. Für $n = 1$ ist die Behauptung klar.
Sei $n \geq 2$. Gelte $I \nsubseteq J_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann $I \nsubseteq \bigcup_{i \neq j} J_i$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Wir finden also $x_j \in I \setminus (\bigcup_{i \neq j} J_i)$ für jedes j. Wenn es

ein j so gibt, dass $x_j \notin J_j$ ist, sind wir fertig. Wir nehmen also an es gelte $x_j \in J_j$ für alle $j = 1, \dots, n$. Betrachte

$$y := x_1 \dots x_{n-1} + x_n.$$

Wäre $y \in J_n$, so würde $x_1 \dots x_{n-1} \in J_n$ gelten. Im Fall $n = 2$ erhalten wir $x_1 \in J_2$, ein Widerspruch. Falls $n \geq 3$ ist, ist J_n prim, also müsste ein $i \in \{1, \dots, n-1\}$ existieren mit $x_i \in J_n$. Auch ein Widerspruch zur Konstruktion.
Wäre $y \in J_i$ für ein $i < n$, so gälte $x_n \in J_i$. Wiederum ein Widerspruch. □

1.5. **Lokale Ringe.**

Definition 1.5.1. Ein Ring A heißt *lokal*, wenn A genau ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ besitzt. Der Körper $\kappa(A) := A/\mathfrak{m}$ heißt der *Residuenkörper* von A.

Lemma 1.5.2. *Sei A ein Ring.*

(1) Sei $I \subsetneqq A$ ein Ideal. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
   (a) $\mathrm{Max}(A) = \{I\}$
   (b) $A \setminus I = A^\times$
   (c) $A \setminus I \subseteq A^\times$

(2) Sei $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$. Falls für jedes $x \in \mathfrak{m}$ gilt $1 + x \in A^\times$, so ist A lokal.

Beweis. (1) Zu „(a) ⇒ (b)“: Folgt aus Korollar 1.4.6.
Zu „(b) ⇒ (c)“: Klar.
Zu „(c) ⇒ (a)“: Sei $J \subsetneqq A$ ein Ideal. Dann ist $J \cap A^\times = \emptyset$. Nach Voraussetzung (b) gilt dann $J \subseteq I$. Also ist das einzige maximale Ideal.

(2) Sei $b \in A \setminus \mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{m}$ maximal ist, ist $(b) + \mathfrak{m} = (1)$, also existiert ein $a \in A$ und ein $x \in \mathfrak{m}$ mit $ab - x = 1$. Dann ist aber $ab = 1 + x$, was nach Voraussetzung in $A^\times$ liegt. Also liegt schon $b \in A^\times$. Aus (1) folgt dann, dass $\mathfrak{m}$ das einzige maximale Ideal von A ist. □

1.5.3. Jeder Körper ist ein lokaler Ring.

Beispiel 1.5.4. Sei k ein Körper. Der Ring $k[t]/(t^2)$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal (t).

1.5.5. Sei A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Dann ist auch der Potenzreihenring $A[[t]]$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} + (t)$. (Zeigen wir in der Übung.)

1.5.6. Fixiere einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Auf der Menge aller Paare (U, f) bestehend aus einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ mit $z_0 \in U$ und einer holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ definieren wir eine Äquivalenzrelation

$$(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$$

falls es eine offene Teilmenge $W \subseteq U_1 \cap U_2$ mit $z_0 \in W$ so gibt, dass $f_1|_W = f_2|_W$ gilt. Eine Äquivalenzklasse $\langle U, f \rangle$ nennen wir einen Keim holomorpher Funktionen an z_0. Wir definieren auf der Menge $\mathscr{O}_{\mathbb{C}, z_0}$ aller dieser Keime eine Addition und eine Multiplikation wie folgt:

$$\langle U, f \rangle + \langle V, g \rangle := \langle U \cap V, f|_{U \cap V} + g|_{U \cap V} \rangle$$
$$\langle U, f \rangle \cdot \langle V, g \rangle := \langle U \cap V, f|_{U \cap V} \cdot g|_{U \cap V} \rangle.$$

Man rechnet nach, dass $+$ und $\cdot$ wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl der Repräsentanten sind. So wird $\mathscr{O}_{\mathbb{C},z_0}$ zu einem Ring. Wir betrachten den Ringhomomorphismus $\varphi : \mathscr{O}_{\mathbb{C},z_0} \to \mathbb{C}$, der definiert ist durch

$$\varphi\langle U, f\rangle = f(z_0);$$

auch das ist wohldefiniert. Ersichtlich ist φ surjektiv. Also ist $\ker(\varphi) \in \mathrm{Max}(\mathscr{O}_{\mathbb{C},z_0})$. Sei $s \in \ker(\varphi)$. Wir zeigen, dass $1 + s \in \mathscr{O}_{\mathbb{C},z_0}^{\times}$ liegt. Dazu wähle einen Repräsentaten (U, f) von $1 + s$.

Sei U so klein gewählt, dass $0 \notin f(U)$. Definiere $g := 1/f$ auf U. Die Funktion g ist stetig. Da f holomorph ist, existiert für jedes $z \in U$

$$f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

Wir berechnen

$$\frac{g(w) - g(z)}{w - z} = \frac{1/f(w) - 1/f(z)}{w - z} = \frac{1}{f(z)f(w)} \frac{f(z) - f(w)}{w - z} \xrightarrow[w \to z]{} -\frac{1}{f(z)^2} f'(z).$$

Somit ist g komplex differenzierbar, also holomorph.

Wir wenden Lemma 1.5.2(2) an und erhalten, dass $\mathscr{O}_{\mathbb{C},z_0}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \ker(\varphi)$ ist; also $\mathfrak{m}$ besteht aus allen Funktionenkeimen, die an z_0 verschwinden.

1.6. **Nilradikal und Jacobson-Radikal.**

Definition 1.6.1. Sei A ein Ring.

(1) Ein Element $a \in A$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $n > 0$ mit $a^n = 0$ gibt.
(2) Die Menge $\mathrm{Nil}(A)$ der nilponenten Elemente von A nennt man das *Nilradikal* von A.
(3) Wenn $\mathrm{Nil}(A) = \{0\}$ ist, heißt A *reduziert*.

1.6.2. Integritätsbereiche sind reduziert.

Definition 1.6.3. Sei I ein Ideal eines Rings A. Definiere

$$\sqrt{I} := \{x \in A \mid x^n \in I \text{ für ein } n > 0\}.$$

Man nennt $\sqrt{I}$ das *Radikal* von I. Falls $I = \sqrt{I}$ heißt I ein *Radikalideal*.

1.6.4. Es gilt $\mathrm{Nil}(A) = \sqrt{0}$.

Lemma 1.6.5. *Sei $I \subseteq A$ ein Ideal.*

(1) $\sqrt{I}$ ist ein Ideal von A.
(2) $I \subseteq \sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}}$
(3) Genau dann ist $\sqrt{I} = (1)$, wenn $I = (1)$ ist.
(4) Genau dann gilt $I = \sqrt{I}$, wenn A/I reduziert ist.

Beweis. (1) Seien $x, y \in \sqrt{I}$. Dann existieren $m, n > 0$, so dass $x^m, y^n \in I$. Sei $N \geq m + n - 1$. Dann ist

$$(x + y)^N = \sum_{\nu=0}^{N} \binom{N}{\nu} x^\nu y^{N-\nu}.$$

Ist $\nu \geq m$, so liegt $x^\nu \in I$. Ist $\nu < m$, so ist $N - \nu \geq n$ und deshalb $y^{N-\nu} \in I$. Also liegt $(x+y)^N \in I$ und damit $x + y \in \sqrt{I}$. Ist außerdem $a \in A$, so ist $(ax)^m = a^m x^m \in I$, also auch $ax \in \sqrt{I}$.

(2) $I \subseteq \sqrt{I}$ ist klar. Also auch $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\sqrt{I}}$. Sei $x \in \sqrt{\sqrt{I}}$. Dann gibt es ein $n > 0$ mit $x^n \in \sqrt{I}$. Also existiert ein $m > 0$, so dass $(x^n)^m = x^{nm} \in I$. Demnach ist $x \in \sqrt{I}$.

(3) Die Richtung „$\Leftarrow$" ist klar. Zu „$\Rightarrow$": Da $1 \in \sqrt{I}$ ist, existiert ein $n > 0$, so dass $1^n = 1 \in I$. Also ist $I = (1)$.

(4) Zu „$\Rightarrow$": Sei $y = x + I$ nilpotent. Dann gibt es ein $n > 0$ mit $x^n \in I$. Damit $x \in \sqrt{I} = I$.
Zu „$\Leftarrow$": Sei $x \in \sqrt{I}$. Dann ist $x^n \in I$ für ein $n > 0$, also $x + I \in A/I$ nilpotent. Deswegen gilt $x \in I$. □

Beispiel 1.6.6. Sei $a \in \mathbb{Z}$. Wir bestimmen $\sqrt{(a)}$. Falls $a = 0$, so ist $\sqrt{(a)} = \mathrm{Nil}(\mathbb{Z}) = (0)$. Sei nun $a \neq 0$, und es gelte ohne Einschränkung $a > 0$. Schreibe $a = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$ für paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, \dots, p_r$ und $m_1, \dots, m_r > 0$. Wir zeigen

$$\sqrt{(a)} = (p_1 \dots p_r).$$

Zu „$\subseteq$": Sei $x \in \sqrt{(a)}$. Dann gibt es $n > 0$ und $b \in \mathbb{Z}$ mit $x^n = ba$. Also $p_i \mid x^n$. Da p_i prim, folgt $p_i \mid x$ und da alle p_i verschieden sind, gilt $x \in (p_1 \dots p_r)$.
Zu „$\supseteq$": Sei $x \in (p_1 \dots p_r)$. Wähle $n \geq \max\{m_1, \dots, m_r\}$. Dann ist $x^n \in (p_1^n \dots p_r^n) \subseteq (p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}) = (a)$.

Satz 1.6.7. *Sei I ein Ideal eines Rings A. Dann gilt*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \\ \mathfrak{p} \supseteq I}} \mathfrak{p}.$$

Beweis. Zu „$\subseteq$": Sei $x \in \sqrt{I}$. Es gibt ein $n > 0$ mit $x^n \in I$. Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ mit $\mathfrak{p} \supseteq I$. Dann ist $x^n \in \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, folgt $x \in \mathfrak{p}$.
Zu „$\supseteq$": Diese Inklusion verwendet wiederum Zorns Lemma. Angenommen, es gebe ein $x \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A),\ \mathfrak{p} \supseteq I} \mathfrak{p}$ mit $x \notin \sqrt{I}$. Also ist $x^n \notin I$ für jedes $n > 0$. Betrachte die Menge

$$\Sigma := \{J \subseteq A \mid J \text{ Ideal}, I \subseteq J \text{ und } x^n \notin J \text{ für alle } n > 0\}.$$

Nach Annahme ist $I \in \Sigma$. Ferner ist jedes $J \in \Sigma$ ein echtes Ideal (also $J \neq (1)$). Wir betrachten die angeordnete Menge $(\Sigma, \subseteq)$. Sei $\{J_\alpha \mid \alpha \in K\} \subseteq \Sigma$ eine Kette. Dann ist $J := \bigcup_{\alpha \in K} J_\alpha$ ein Ideal, es gilt $I \subseteq J$ und $x^n \notin J$ für jedes $n > 0$. Somit $J \in \Sigma$. Zorns Lemma impliziert die Existenz eines maximalen Elements $\mathfrak{p} \in \Sigma$.
Wir zeigen, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Dazu seien $a, b \in A \setminus \mathfrak{p}$. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{p}$ in Σ, sind $\mathfrak{p} + (a), \mathfrak{p} + (b) \notin \Sigma$. Also existieren $m, n > 0$ mit $x^m \in \mathfrak{p} + (a)$ und $x^n \in \mathfrak{p} + (b)$. Wir finden also $r, s \in \mathfrak{p}$ und $c, d \in A$ mit

$$x^m = r + ac \qquad\qquad x^n = s + bd.$$

Damit ist

$$x^{m+n} = (r + ac)(s + bd) = rs + sac + rbd + abcd \in \mathfrak{p} + (ab).$$

Da $\mathfrak{p} \in \Sigma$, folgt $x^{m+n} \notin \mathfrak{p}$, also ist $ab \notin \mathfrak{p}$. Das zeigt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$.

Nach unserer Annahme folgt somit $x \in \mathfrak{p}$. Andererseits ist aber $\mathfrak{p} \in \Sigma$, also $x \notin \mathfrak{p}$. Ein Widerspruch. □

Definition 1.6.8. Sei $A \neq 0$ ein Ring. Man nennt

$$\operatorname{Jac}(A) := \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A)} \mathfrak{m}$$

das *Jacobson-Radikal* von A.

1.6.9. Als Durchschnitt von Idealen ist $\operatorname{Jac}(A)$ ein Ideal von A.

Lemma 1.6.10. *Sei $x \in A$. Genau dann ist $x \in \operatorname{Jac}(A)$, wenn $1 - ax \in A^\times$ liegt für jedes $a \in A$.*

Beweis. Zu „$\Rightarrow$“: Sei $x \in \operatorname{Jac}(A)$ und $a \in A$. Angenommen $1 - ax \notin A^\times$. Dann gibt es nach Korollar 1.4.6 ein $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A)$, so dass $1 - ax \in \mathfrak{m}$. Da $x \in \mathfrak{m}$, würde $1 \in \mathfrak{m}$ folgen. Ein Widerspruch.
Zu „$\supseteq$“: Sei $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A)$ und angenommen $x \notin \mathfrak{m}$. Dann wäre $(x) + \mathfrak{m} = (1)$. Also existieren $a \in A$ und $y \in \mathfrak{m}$ mit $1 = ax + y$. Damit wäre $y = 1 - ax \in A^\times$. Auch ein Widerspruch. □

Beispiel 1.6.11. Sei k ein Körper.

(1) Es gilt $\operatorname{Nil}(k[t_1, \dots, t_n]) = (0)$ (Integritätsbereich) und $\operatorname{Jac}(k[t_1, \dots, t_n]) = (0)$ (wende das vorige Lemma an).
(2) Es ist $\operatorname{Nil}(k[[t_1, \dots, t_n]]) = (0)$, aber $\operatorname{Jac}(k[[t_1, \dots, t_n]]) = (t_1, \dots, t_n)$, denn $k[[t_1, \dots, t_n]]$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $(t_1, \dots, t_n)$.
(3) Für $k[t]/(t^2)$ ist $\operatorname{Nil}(k[t]/(t^2)) = \operatorname{Jac}(k[t]/(t^2)) = (t)$.

2. Moduln

Im gesamten Kapitel sei A ein Ring.

2.1. **Grundbegriffe.**

Definition 2.1.1. Ein A-*Modul* besteht aus einer Menge M zusammen mit zwei Abbildungen $+ : M \times M \to M$ und $\cdot : A \times M \to M$, so dass folgende Eigenschaften gelten:
(M.1) $(M, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
(M.2) $(a + b)x = ax + bx$
(M.3) $a(x + y) = ax + ay$
(M.4) $(ab)x = a(bx)$
(M.5) $1 \cdot x = x$
für alle $a, b \in A$ und alle $x, y \in M$.

Beispiel 2.1.2. Einige Beispiele für Moduln.
(1) Ist $A = k$ ein Körper, so ist ein A-Modul das selbe wie ein k-Vektorraum.
(2) Ist $A = \mathbb{Z}$, so ist ein A-Modul nichts anderes als eine abelsche Gruppe.
(3) A wird, mit der Ringmultiplikation als skalare Multiplikation, selbst zu einem A-Modul. Wir bezeichnen diesen Modul manchmal mit ${}_AA$.

Beispiel 2.1.3. Sei k ein Körper. Betrachte $A = k[t]$. Sei V ein k-Vektorraum und sei $\psi \in \operatorname{End}_k(V)$. Das Paar (V, ψ) definiert einen A-Modul M wie folgt: Als abelsche Gruppe sei $(M, +) = (V, +)$. Für ein Polynom $p = \sum a_n t^n$ und einen Vektor v sei

$$p \cdot v := p(\psi)v = \sum a_n \psi^n(v).$$

Das erfüllt die Modulaxiome.

2.1.4. Ist A ein nicht-notwendig kommutativer Ring, so muss man zwischen A-Linksmoduln und A-Rechtsmoduln unterscheiden. Die Definition eines A-Linksmoduls ist genau wie oben; für einen A-Rechtsmodul hat man hingegen eine Skalarmultiplikation $M \times A \to M$ mit entsprechenden Axiomen. Über einem kommutativen Ring stimmen diese beiden Definitionen überein, in dem Sinne, dass jeder Linksmodul einen Rechtsmodul in natürlicher Weise induziert und umgekehrt.

2.2. **Restriktion der Skalare.**

2.2.1. Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Sei N ein B-Modul. Dann wird N zu einem A-Modul via

$$A \times N \to N, \ (a, y) \mapsto \varphi(a)y.$$

Wir rechnen exemplarisch das Axiom (M.2) nach:

$$(a + a')y = \varphi(a + a')y = (\varphi(a) + \varphi(a'))y = \varphi(a)y + \varphi(a')y = ay + a'y.$$

Beachte für das Axiom (M.5), dass $\varphi(1) = 1$ gilt. Wir bezeichnen den entstandenen A-Modul mit ${}_AN$.

Definition 2.2.2. Man nennt ${}_AN$ die *Restriktion der Skalare* von N auf A.

2.2.3. Ein wichtiger Spezialfall ist $N = {}_BB$. Wir schreiben für ${}_A({}_BB)$ kurz ${}_AB$.

Beispiel 2.2.4. Sei $A = k$ ein Körper und sei $B = k[t]$. Sei N ein B-Modul. Dann ist $V := {}_kN$ ein k-Vektorraum. Wir erhalten eine Abbildung $\psi : V \to V$ durch

$$\psi(v) := t \cdot v.$$

Die Abbildung ψ ist k-linear (klar?), also ist $\psi \in \operatorname{End}_k(V)$. Für $p = \sum a_n t^n$ und $v \in N$ gilt

$$p \cdot v = \sum a_n(t^n \cdot v) = \sum a_n \psi^n(v) = p(\psi)v$$

Deshalb stimmt N überein mit dem $k[t]$-Modul, der durch (V, ψ) definiert ist.

2.3. **Annulatoren.**

Definition 2.3.1. Sei M ein A-Modul. Die Menge

$$\operatorname{Ann}(M) := \{a \in A \mid ax = 0 \text{ für alle } x \in M\}$$

heißt der *Annulator* von M. Falls $\operatorname{Ann}(M) = 0$ ist, nennt man M *treu*.

2.3.2. Der Annulator $\operatorname{Ann}(M)$ eines A-Moduls ist ein Ideal von A.

Lemma 2.3.3. *Sei M ein A-Modul und I ein Ideal von A. Genau dann existiert ein A/I-Modul N, so dass ${}_AN = M$ ist, wenn $I \subseteq \operatorname{Ann}(M)$.*

Beweis. Zu „$\Rightarrow$“: Gelte $M = {}_AN$. Als abelsche Gruppen gilt also $M = N$. Seien $x \in M$ und $a \in I$. Dann ist $ax = (a + I)x = (0 + I)x = 0$ und damit ist $I \subseteq \operatorname{Ann}(M)$.
Zu „$\Leftarrow$“: Es sei $I \subseteq \operatorname{Ann}(M)$. Dann definieren wir auf der abelschen Gruppe M die Skalarmultiplikation $A/I \times M \to M$ wie folgt: für $a \in A$ und $x \in M$ sei

$$(a + I) \cdot x = ax.$$

Das ist wohldefiniert, denn wenn $a - a' \in I$, dann ist $ax = a'x$ nach Voraussetzung. Für den so entstandenen A/I-Modul N gilt a forteriori ${}_AN = M$. $\square$

2.3.4. Für den A/I-Modul N aus dem vorigen Lemma sagt man auch M aufgefasst als A/I-Modul.

2.3.5. Für jeden A-Modul M ist M treu aufgefasst als $A/\operatorname{Ann}(M)$-Modul.

2.4. **Homomorphismen.**

Definition 2.4.1. Seien M und N zwei A-Moduln. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *Homomorphismus von A-Moduln*, oder auch *A-lineare Abbildung*, wenn für alle $x, x' \in M$ und alle $a \in A$ gelten:

(H.1) $f(x + x') = f(x) + f(x')$
(H.2) $f(ax) = af(x)$

Mit $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ bezeichnen wir die Menge der A-linearen Abbildungen $M \to N$.

2.4.2. Sind $f : M \to N$ und $g : N \to P$ zwei A-lineare Abbildungen, so ist auch $g \circ f : M \to P$ eine A-lineare Abbildung. Für jeden A-Modul M ist die Identität $\operatorname{id}_M : M \to M$ eine A-lineare Abbildung.

2.4.3. Seien M, N zwei A-Moduln. Dann wird $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ selbst zu einem A-Modul via

$$\begin{aligned} f + g : M \to N, x &\mapsto f(x) + g(x) \\ af : M \to N, x &\mapsto af(x) = f(ax) \end{aligned}$$

für $a \in A$ und $f, g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$.
Beachte, dass man die Kommutativität von A hier braucht, um zu garantieren, dass die skalare Multiplikation wohldefiniert ist. Um zu zeigen, dass af linear ist, seien $x \in M$ und $a' \in A$. Wir berechnen

$$(af)(a'x) = af(a'x) = aa'f(x) \stackrel{!}{=} a'af(x) = a'(af)(x).$$

2.4.4. Ist A ein nicht-notwendig kommutativer Ring, und M und N zwei A-Linksmoduln, so ist $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ im allgemeinen kein A-Linksmodul mehr, sondern nur noch eine abelsche Gruppe (oder etwas allgemeiner ein Modul über dem Zentrum von A).

2.4.5. Sei $\mathrm{End}_A(M) := \mathrm{Hom}_A(M, M)$. Mit $\circ$ als Multiplikation ist $\mathrm{End}_A(M)$ ein nicht notwendig kommutativer Ring mit $1_{\mathrm{End}_A(M)} = \mathrm{id}_M$. Die Abbildung $A \to \mathrm{End}_A(M),\ a \mapsto a\,\mathrm{id}_M$ ist ein Homomorphismus von (nicht notwendig kommutativen) Ringen.

2.4.6. Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und seien N, N' zwei B-Moduln. Ist $f : N \to N'$ eine B-lineare Abbildung, so ist $f : {}_AN \to {}_AN'$ eine A-lineare Abbildung. Wir erhalten auf diese Art eine injektive Abbildung $\mathrm{Hom}_B(N, N') \to \mathrm{Hom}_A({}_AN, {}_AN')$.

Definition 2.4.7. Sei $f : M \to N$ eine A-lineare Abbildung. Man nennt f einen *Isomorphismus von A-Moduln*, wenn f bijektiv ist.

2.4.8. Sei $f : M \to N$ ein Homomorphismen von A-Moduln. Ist f ein Isomorphismus, so ist die Umkehrabbildung f^{-1} ebenfalls A-linear. Also ist f genau dann ein Isomorphismus von A-Moduln, wenn es eine A-lineare Abbildung $g : N \to M$ so gibt, dass $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$ ist.

Beispiel 2.4.9. Sei M ein A-Modul. Dann ist die Abbildung $\Phi : \mathrm{Hom}_A(A, M) \to M$ definiert durch $\Phi(f) := f(1)$ ein Isomorphismus von A-Moduln: Sie ist ersichtlich A-linear. Die inverse Abbildung ist gegeben durch $\Psi : M \to \mathrm{Hom}_A(A, M)$ mit $\Psi(x) : A \to M,\ a \mapsto ax$.

2.5. **Untermoduln und Quotienten.**

Definition 2.5.1. Sei M ein A-Modul. Eine Teilmenge $M' \subseteq M$ heißt *A-Untermodul*, wenn folgende Eigenschaften gelten:
(U.1) $0 \in M'$
(U.2) Für alle $x, y \in M'$ ist $x + y \in M'$
(U.3) Für jedes $x \in M'$ und jedes $a \in A$ ist $ax \in M'$.

2.5.2. Sei M' ein A-Untermodul von M. Dann induzieren die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf M Verknüpfungen $+ : M' \times M' \to M'$ und $\cdot : A \times M' \to M'$, mit denen M' selbst zu einem A-Modul wird. Die Teilmengeninklusion $M' \to M$ ist A-linear.

Beispiel 2.5.3. Sei $A = k[t]$ und M der $k[t]$-Modul gegeben durch ein Paar (V, ψ). Sei $M' \subseteq V$ eine Teilmenge. Genau dann ist M' ein $k[t]$-Untermodul wenn

- M' ein k-Untervektorraum von V ist und
- $\psi(M') \subseteq M'$ gilt.

2.5.4. A-Untermoduln von ${}_AA$ sind nichts anderes als Ideale von A.

2.5.5. Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und N ein B-Modul. Ist $N' \subseteq N$ ein B-Untermodul, so ist N' auch ein A-Untermodul von ${}_AN$.

2.5.6. Sei M' ein A-Untermodul von M. Wir betrachten den Quotienten M/M' als abelsche Gruppe. Darauf definieren wir eine skalare Multiplikation $A \times M/M' \to M/M'$ durch

$$a \cdot (x + M') := ax + M'.$$

Das ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten und erfüllt die Modulaxiome. So wird M/M' zu einem A-Modul. Die natürliche Abbildung $\pi : M \to M/M'$ ist A-linear.

2.5.7. Sei $I \subseteq A$ ein Ideal und M ein A-Modul. Definiere

$$IM := \left\{ \sum a_i x_i \mid a_i \in I,\ x_i \in M \right\}.$$

Dann ist IM ein A-Untermodul von M. Genau dann gilt $IM = 0$, wenn $I \subseteq \operatorname{Ann}(M)$ ist.
Nun betrachte den Quotienten M/IM. Offensichtlich ist $I \subseteq \operatorname{Ann}(M/IM)$, also kann man M/IM gemäß Lemma 2.3.3 als einen A/I-Modul auffassen.

2.6. **Kern, Bild, Kokern und Kobild.**

Definition 2.6.1. Sei $f : M \to N$ eine A-lineare Abbildung.

(1) $\ker(f) := f^{-1}(0)$ heißt der *Kern* von f.
(2) $\operatorname{im}(f) := f(M)$ nennen wir das *Bild* von f.

2.6.2. Sei $f : M \to N$ eine A-lineare Abbildung. Dann ist $\ker(f)$ ein Untermodul von M und $\operatorname{im}(f)$ ist ein Untermodul von N.

Definition 2.6.3. Sei $f : M \to N$ eine A-lineare Abbildung.

(1) $\operatorname{coker}(f) := N/\operatorname{im}(f)$ heißt *Kokern* von f.
(2) $\operatorname{coim}(f) := M/\ker(f)$ heißt *Kobild* von f.

Lemma 2.6.4 (Universelle Eigenschaft des Quotienten)**.** *Sei $f : M \to N$ eine A-lineare Abbildung, so dass $M' \subseteq \ker(f)$ ist. Dann existiert genau eine A-lineare Abbildung $\overline{f} : M/M' \to N$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & N \\
M/M' \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Übung. $\square$

Lemma 2.6.5 (Kanonische Faktorisierung). *Sei $f : M \to N$ eine A-lineare Abbildung. Dann existiert genau eine A-lineare Abbildung $\tilde{f} : \mathrm{coim}(f) \to \mathrm{im}(f)$, so dass*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \\ \mathrm{coim}(f) \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] & \mathrm{im}(f) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

kommutiert. Ferner ist $\tilde{f}$ ein Isomorphismus.

Beweis. Übung. □

2.7. **Durchschnitt, Summe und Produkt.**

Lemma 2.7.1. *Sei M ein A-Modul, sei T eine (nicht notwendig endliche) Menge und seien $M_t \subseteq M$ für $t \in T$ Untermoduln.*

(1) Die Teilmenge $\sum_{t\in T} M_t := \{\sum x_t \mid x_t \in M_t,$ alle $x_t = 0$ außer endlich vielen$\}$ ist ein A-Untermodul von M.
(2) Der Durchschnitt $\bigcap_{t\in T} M_t$ ist ein A-Untermodul von M.

2.7.2. Sei $E \subseteq M$ eine Teilmenge. Dann ist

$$\langle E\rangle_A := \bigcap_{\substack{M'\subseteq M \ A\text{-Untermodul} \\ M'\supseteq E}} M'$$

der kleinste A-Untermodul, der E enthält. Man nennt $\langle E\rangle_A$ den von E erzeugten A-Untermodul.

2.7.3. Für $t \in T$ sei M_t ein A-Modul.

(1) Das Produkt $\prod_{t\in T} M_t$ ist eine abelsche Gruppe. Es wird ein A-Modul via der Skalarmultiplikation definiert durch $a \cdot (x_t)_{t\in T} = (ax_t)_{t\in T}$.
(2) Die Teilmenge $\bigoplus_{t\in T} M_t := \{(x_t)_{t\in T} \mid \text{nur endlich viele } x_t \neq 0\}$ ist ein A-Untermodul von $\prod_{t\in T} M_t$. Man nennt $\bigoplus_{t\in T} M_t$ die äußere direkte Summe der M_t.
(3) Falls $M_t = M$ für alle $t \in T$, so schreiben wir $M^T := \prod_{t\in T} M$ und $M^{(T)} := \bigoplus_{t\in T} M$.
(4) Statt $M^{\{1,\dots,n\}}$ schreiben wir M^n.

Lemma 2.7.4 (Universelle Eigenschaften). *Für $t \in T$ sei M_t ein A-Modul.*

(1) Die Abbildung $\pi_s : \prod_{t\in T} M_t \to M_s$ gegeben durch $\pi_s((x_t)_{t\in T}) = x_s$ ist A-linear für alle $s \in T$. Ist P ein weiterer A-Modul und sind $p_s : P \to M_s$ A-lineare Abbildungen, so existiert genau eine A-lineare Abbildung $\lambda : P \to \prod_{t\in T} M_t$, so dass $p_s = \pi_s \circ \lambda$ für alle $s \in T$.
(2) Die Abbildung $\iota_s : M_s \to \bigoplus_{t\in T} M_t$ gegeben durch $\iota_s(y) := (x_t)_{t\in T}$, wobei $x_t = \delta_{st} y$ sei, ist A-linear. Ist C ein weiterer A-Modul mit A-linearen Abbildungen $i_s : M_s \to C$, so existiert genau eine A-lineare Abbildung $\mu : \bigoplus_{t\in T} M_t \to C$, so dass $i_s = \mu \circ \iota_s$ für alle $s \in T$.

Beweis. Wir geben nur die Abbildungen λ und μ an. Man prüfe auf Wohldefiniertheit, Erfüllung der geforderten Eigenschaften und Eindeutigkeit.

(1) $\lambda(z) = (p_t(z))_{t\in T}$ für $z \in P$
(2) $\mu((x_t)_{t\in T}) = \sum_{t\in T} i_t(x_t)$ für $(x_t)_{t\in T} \in \bigoplus_{t\in T} M_t$. $\square$

2.7.5. Seien S und T Mengen und für $s \in S$ und $t \in T$ seien M_s und N_t jeweils A-Moduln. Dann ist die Abbildung

$$\Phi : \operatorname{Hom}_A\Big(\bigoplus_{s\in S} M_s, \prod_{t\in T} N_t\Big) \to \prod_{(s,t)\in S\times T} \operatorname{Hom}_A(M_s, N_t)$$

definiert durch $\Phi(f) = (\pi_t \circ f \circ \iota_s)$ ein Isomorphismus von A-Moduln. Das folgt direkt aus den universellen Eigenschaften von Produkt und direkter Summe.
Sind $S = \{1,\dots,m\}$ und $T = \{1,\dots,n\}$, so können wir eine A-lineare Abbildung $f : \bigoplus_{k=1}^m M_k \to \bigoplus_{j=1}^n N_j$ als eine $n\times m$-Matrix (f_{ij}) mit Einträgen $f_{ij} = \pi_i \circ f \circ \iota_j \in \operatorname{Hom}_A(M_j, N_i)$ auffassen.
Seien $M_1,\dots,M_m$, $N_1,\dots,N_n$ und $P_1,\dots,P_p$ endlich viele A-Moduln. Seien

$$f : \bigoplus_{k=1}^m M_k \to \bigoplus_{j=1}^n N_j \qquad\qquad g : \bigoplus_{j=1}^n N_j \to \bigoplus_{i=1}^p P_i$$

zwei A-lineare Abbildungen. Seien $f_{jk} := \pi_j \circ f \circ \iota_k$ und $g_{ij} := \pi_i \circ g \circ \iota_j$. Dann gilt

$$\pi_i \circ (g\circ f) \circ \iota_k = \sum_{j=1}^n g_{ij} \circ f_{jk},$$

also verhält sich die Komposition genauso wie die Matrixmultiplikation.
Insbesondere haben wir gezeigt, dass die Abbildung $\Phi : \operatorname{End}_A(M^n) \to M_{n\times n}(\operatorname{End}_A(M))$ ein Isomorphismus von nicht notwendig kommutativen Ringen ist.

2.7.6. Seien $M_t \subseteq M$ Untermoduln ($t \in T$). Betrachte die M_t selbst als A-Moduln. Dann ist

$$\bigoplus_{t\in T} M_t \to M,\ (x_t)_{t\in T} \mapsto \sum_{t\in T} x_t$$

eine A-lineare Abbildung (sie stimmt überein mit der Abbildung aus der universellen Eigenschaft der direkten Summe). Das Bild dieser Abbildung ist $\sum_{t\in T} M_t$. Sei

$$\varphi : \bigoplus_{t\in T} M_t \to \sum_{t\in T} M_t$$

die so entstehende surjektive A-lineare Abbildung.
Genau dann ist φ ein Isomorphismus wenn für alle $t \in T$ gilt $M_t \cap \sum_{t'\neq t} M_{t'} = 0$.

2.8. **Endlich erzeugte, endlich präsentierte und freie Moduln.**

Definition 2.8.1. Sei M ein A-Modul. Sei $(x_t)_{t\in T}$ ein Tupel von Elementen in M (also $(x_t)_{t\in T} \in M^T$).

(1) Das Tupel $(x_t)_{t\in T}$ heißt *linear unabhängig* über A, falls für jedes Tupel $(a_t)_{t\in T} \in A^{(T)}$ (also nur endlich viele $a_t \neq 0$) gilt: ist $\sum_{t\in T} a_t x_t = 0$, so sind bereits alle $a_t = 0$. Andernfalls heißt das Tupel $(x_t)_{t\in T}$ *linear abhängig* über A.
(2) Man nennt $(x_t)_{t\in T}$ ein *Erzeugendensystem* von M, falls $\langle \{x_t \mid t \in T\}\rangle_A = M$ ist.
(3) Ist $(x_t)_{t\in T}$ ein über A linear unabhängiges Erzeugendensystem von M, so heißt $(x_t)_{t\in T}$ eine *Basis* von M.

2.8.2. Sei $(x_t)_{t\in T} \in M^T$. Die Abbildung $\varphi : A^{(T)} \to M$ definiert durch $\varphi((a_t)_{t\in T}) = \sum_{t\in T} a_t x_t$ ist wohldefiniert und A-linear.

(1) Genau dann ist φ injektiv, wenn $(x_t)_{t\in T}$ linear unabhängig ist.
(2) Genau dann ist φ surjektiv, wenn $(x_t)_{t\in T}$ ein Erzeugendensystem ist.
(3) Genau dann ist φ bijektiv, wenn $(x_t)_{t\in T}$ eine Basis ist.

Definition 2.8.3. Sei M ein A-Modul.

(1) M heißt *frei*, falls M eine Basis besitzt.
(2) M heißt *endlich frei*, falls M eine endliche Basis besitzt.
(3) M heißt *endlich erzeugt*, wenn M ein endliches Erzeugendensystem besitzt.
(4) M heißt *endlich präsentiert*, wenn es eine surjektive A-lineare Abbildung $f : A^n \to M$ gibt, so dass $\ker(f)$ endlich erzeugt ist.

Lemma 2.8.4. *Sei M ein A-Modul.*

(1) Genau dann ist M frei, wenn es eine Menge T und einen Isomorphismus $A^{(T)} \to M$ von A-Moduln gibt.
(2) Genau dann ist M endlich frei, wenn es ein $n \geq 0$ und einen Isomorphismus $A^n \to M$ von A-Moduln gibt.
(3) Genau dann ist M endlich erzeugt, wenn es ein $n \geq 0$ und eine surjektive A-lineare Abbildung $f : A^n \to M$ gibt.

Beweis. Folgt sofort aus 2.8.2. □

2.8.5. Dass ein A-Modul M endlich präsentiert ist bedeutet anschaulich, dass M ein endliches Erzeugendensystem besitzt, zwischen dessen Erzeugern es nur endlich viele Relationen gibt.

2.8.6. Endlich freie Moduln sind endlich präsentiert. Endlich präsentierte Moduln sind endlich erzeugt.

Lemma 2.8.7. *Ist ein Modul frei und endlich erzeugt, so ist er auch endlich frei.*

Beweis. Sei dazu $(x_t)_{t\in T}$ eine Basis von M und sei $(y_1, \ldots, y_n)$ ein Erzeugendensystem. Jedes y_j lässt sich auf eindeutige Weise als Linearkombination von endlich vielen x_t schreiben. Sei $T' \subseteq T$ die endliche Teilmenge der $t \in T$ die in diesen Linearkombinationen auftauchen. Dann ist $(x_t)_{t\in T'}$ auch ein Erzeugendensystem. Weiterhin ist $(x_t)_{t\in T'}$ linear unabhängig. Also ist es eine (endliche) Basis. □

2.8.8. Je zwei Basen eines (freien) Moduls haben die selbe Kardinalität. (Übung.)

2.8.9. Sei $A = k$ ein Körper. Jeder k-Vektorraum ist frei und jeder endlich erzeugte k-Vektorraum ist endlich frei.

Beispiel 2.8.10. Sei $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dann ist $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ein endlich präsentierter $\mathbb{Z}$-Modul, aber nicht (endlich) frei.

Beispiel 2.8.11. Sei $A = \mathbb{Z}[t_1, t_2, t_3, \ldots]$. Betrachte den Ringhomomorphismus $\varphi : A \to \mathbb{Z}$, der durch $\varphi(t_i) = 0$ definiert ist, also $\ker(\varphi) = (t_1, t_2, \ldots)$. Sei $M = {}_A\mathbb{Z}$. Das bedeutet für $m \in \mathbb{Z}$ und $p \in A$ ist

$$p \cdot m = p(0, 0, \ldots) \cdot m.$$

Wir zeigen, dass ${}_A\mathbb{Z}$ als A-Modul endlich erzeugt aber nicht endlich präsentiert ist.

Es ist offensichtlich, dass ${}_A\mathbb{Z}$ endlich erzeugt ist (schließlich ist ${}_A\mathbb{Z}$ ein Quotient von ${}_AA$). Angenommen ${}_A\mathbb{Z}$ wäre endlich präsentiert. Dann gäbe es $f : A^n \to {}_A\mathbb{Z}$ surjektive A-lineare Abbildung, so dass $\ker(f)$ endlich erzeugt ist. Bezeichne mit $e_j \in A^n$ den j-ten Einheitsvektor und sei $z_j := f(e_j) \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$\ker(f) = \{P = (p_1, \ldots, p_n) \in A^n \mid \sum_{j=1}^{n} p_j(0)z_j = 0\}.$$

(Hierbei ist $p_j(0)$ kurz für $p_j(0, 0, \ldots)$.) Da $\ker(f)$ endlich erzeugt ist, existieren Elemente $P^{(1)}, \ldots, P^{(m)} \in \ker(f)$, die $\ker(f)$ als A-Modul erzeugen. Sei $P^{(i)} = (p_1^{(i)}, \ldots, p_n^{(i)})$. Wähle $N \gg 0$, so dass die Variable t_N in keinem der $p_j^{(i)}$ vorkommt. Da $t_N \cdot e_j \in \ker(f)$ für alle $j = 1, \ldots, n$, existieren $q_j^{(i)} \in A$, so dass

$$t_N e_j = \sum_{i=1}^{m} q_j^{(i)} P^{(i)}.$$

Dann folgt für $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\sum_{i=1}^{m} q_j^{(i)} p_k^{(i)} = \delta_{j,k} t_N.$$

Nun betrachte den Ringhomomorphismus $\varphi_N : A \to \mathbb{Z}[t_N]$, der alle t_i (für $i \neq N$) auf 0 sendet und t_N auf sich selbst. Durch Anwenden von φ_N auf die obige Identität folgt

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_N(q_j^{(i)}) \underbrace{\varphi_N(p_k^{(i)})}_{=p_k^{(i)}(0)} = \delta_{j,k} \underbrace{\varphi_N(t_N)}_{=t_N}.$$

Nun bilden wir die Linearkombination dieser Elemente mit Koeffizienten z_k. Wir erhalten

$$\sum_{k=1}^{n} z_k \sum_{i=1}^{m} \varphi_N(q_j^{(i)}) p_k^{(i)}(0) = \sum_{k=1}^{n} z_k \delta_{j,k} t_N = z_j t_N$$
$$\sum_{k=1}^{n} z_k \sum_{i=1}^{m} \varphi_N(q_j^{(i)}) p_k^{(i)}(0) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_N(q_j^{(i)}) \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_k^{(i)}(0) z_k}_{=0} = 0,$$

denn $P^{(i)} \in \ker(f)$. Also muss $z_j = 0$ sein für alle $j = 1, \ldots, n$. Das würde aber $f = 0$ bedeuten. Das ist absurd.

2.9. **Nakayamas Lemma.**

2.9.1. Sei $S = (s_{ij}) \in M_{n\times n}(A)$ eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen im Ring A. Wir definieren

$$\det(S) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) s_{1,\sigma(1)} \ldots s_{n,\sigma(n)}$$

genau wie in der Linearen Algebra.
Ferner definieren wir zu S die adjunkte Matrix $S^{\mathrm{ad}} = (s'_{ij})$ durch $s'_{ij} = (-1)^{i+j} \det(S(j, i))$, wobei die Matrix $S(j, i)$ aus S durch Streichen der j-ten Zeile und der i-ten Spalte entsteht.

Lemma 2.9.2 (Cramersche Regel). *Sei $S \in M_{n\times n}(A)$. Dann gilt $S^{\mathrm{ad}}S = SS^{\mathrm{ad}} = \det(S)\cdot E_n$.*

Beweis. Der Beweis aus der Linearen Algebra funktioniert auch über beliebigen kommutativen Ringen. ☐

Lemma 2.9.3 (Determinantentrick). *Sei M ein endlich erzeugter A-Modul, sei $\psi \in \mathrm{End}_A(M)$ und sei $I \subseteq A$ ein Ideal. Falls $\mathrm{im}(\psi) \subseteq IM$ gilt, so gibt es ein $n > 0$ und Elemente $a_i \in I^i$, so dass*

$$\psi^n + a_1\psi^{n-1} + \ldots a_{n-1}\psi + a_n \,\mathrm{id}_M = 0.$$

Beweis. Seien $x_1, \ldots, x_n$ Erzeuger von M als A-Modul. Dann ist $IM = \{\sum_{i=1}^n a_i x_i \mid a_i \in I\}$. Da $\mathrm{im}(\psi) \subseteq IM$, existieren $a_{ij} \in I$, so dass

$$\psi(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j.$$

Nun betrachte den (kommutativen) Unterring $A[\psi] \subseteq \mathrm{End}_A(M)$, der von $\{a\,\mathrm{id}_M \mid a \in A\}$ und ψ erzeugt wird. Sei $S = (s_{ij}) \in M_{n\times n}(A[\psi])$ die Matrix mit den Einträgen

$$s_{ij} = \delta_{ij}\psi - a_{ij}\,\mathrm{id}_M\,.$$

Via des injektiven Homomorphismus $M_{n\times n}(A[\psi]) \subseteq M_{n\times n}(\mathrm{End}_A(M)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{End}_A(M^n)$ von nicht notwendig kommutativen Ringen (vgl. 2.7.5) wird S zu einem Endomorphismus von M^n. Betrachte den Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in M^n$. Es gilt

$$\sum_{j=1}^n s_{ij}x_j = \psi(x_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$$

also $S(x) = 0$. Damit ist auch

$$0 = (S^{\mathrm{ad}}S)(x) = (\det(S)\cdot E_n)(x) = (\det(S)(x_1), \ldots, \det(S)(x_n))^T.$$

Da M von $x_1, \ldots, x_n$ erzeugt wird, ist $\det(S) = 0$. Andererseits ist $\det(S) = \chi(\psi)$, wobei $\chi(t) \in A[t]$ das charakteristische Polynom der Matrix (a_{ij}) sei. Da $a_{ij} \in I$, liegt der Koeffizient von t^{n-i} von χ in I^i. ☐

Satz 2.9.4. *Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Ist $I \subseteq A$ ein Ideal mit $IM = M$, so existiert ein $a \in I$ mit $(1+a)M = 0$.*

Beweis. Sei $\psi = \mathrm{id}_M$. Wegen $\psi(M) = M \subseteq IM$ dürfen wir Lemma 2.9.3 anwenden. Wir erhalten $a_i \in I^i$, so dass

$$\mathrm{id}_M + a_1\,\mathrm{id}_M + \ldots + a_n\,\mathrm{id}_M = 0$$

Definiere $a := a_1 + \ldots + a_n \in I$. Dann ist $(1+a)\,\mathrm{id}_M = 0$, also $(1+a)M = 0$. ☐

Korollar 2.9.5 (Nakayamas Lemma). *Sei M ein endlich erzeugter A-Modul und sei $I \subseteq \mathrm{Jac}(A)$ ein Ideal. Falls $IM = M$ ist, folgt $M = 0$.*

Beweis. Nach Satz 2.9.4 existiert ein $a \in I$, so dass $(1+a)M = 0$ ist. Da $a \in \mathrm{Jac}(A)$ ist, folgt aus Lemma 1.6.10, dass $1 + a \in A^\times$ ist. Also muss $M = 0$ sein. ☐

Korollar 2.9.6. *Sei M ein A-Modul, $N, N' \subseteq M$ Untermoduln und sei $I \subseteq A$ ein Ideal mit $I \subseteq \mathrm{Jac}(A)$. Sei N' endlich erzeugt. Falls $M = N + IN'$ ist, so folgt $M = N$.*

Beweis. Da $M = N + IN' \subseteq N + N' \subseteq M$ ist, ist die Komposition $N' \to M \to M/N$ surjektiv. Also ist auch M/N ein endlich erzeugter A-Modul. Wir zeigen

$$I \cdot (M/N) = M/N.$$

Dazu sei $x \in M$. Es gibt $y \in N$, $a_i \in I$ und $y_i' \in N'$, so dass $x = y + \sum a_i y_i'$. Dann ist $x + N = (y + \sum_i a_i y_i') = \sum_i a_i(y_i' + N) \in I \cdot (M/N)$.
Wir können Nakayamas Lemma anwenden. Es sagt uns $M/N = 0$, also $M = N$. □

Korollar 2.9.7. *Sei M ein endlich erzeugter A-Modul, $x_1, \ldots, x_n \in M$ und $I \subseteq \mathrm{Jac}(A)$ ein Ideal. Sei $\pi : M \to M/IM$ die Quotientenabbildung. Falls M/IM als A/I-Modul von $\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)$ erzeugt wird, so erzeugen $x_1, \ldots, x_n$ bereits M als A-Modul.*

Beweis. Da $\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)$ ein Erzeugendensystem von M/IM als A/I-Modul bilden, erzeugen sie M/IM auch als A-Modul. Es folgt

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle_A + IM = M.$$

Nun wende Korollar 2.9.6 auf $N = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ und $N' = M$ an. □

Bemerkung 2.9.8. Man wendet Korollar 2.9.7 sehr oft in folgender Situation an: A ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, M ist ein endlich erzeugter A-Modul und die Nebenklassen von $x_1, \ldots, x_n \in M$ erzeugen $M/\mathfrak{m}M$ als $A/\mathfrak{m}$-Vektorraum. Dann können wir schließen, dass M bereits als A-Modul von $x_1, \ldots, x_n$ erzeugt wird.

2.9.9. Sei A der Ring der Keime von stetigen reellwertigen Funktionen an $0 \in \mathbb{R}$. Dann ist, analog zum Argument aus 1.5.6, A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ bestehend aus allen Funktionenkeimen, die an 0 verschwinden. Dann kann man zeigen, dass $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$. Also ist es wirklich notwendig, dass der Modul in Nakayamas Lemma endlich erzeugt ist.

2.10. **Tensorprodukt.**

Definition 2.10.1. Seien M, N, P drei A-Moduln. Eine Abbildung $h : M \times N \to P$ heißt A-*bilinear*, falls gilt:

(1) Für alle $x \in M$ ist $N \to P$, $y \mapsto h(x, y)$ eine A-lineare Abbildung.
(2) Für alle $y \in N$ ist $M \to P$, $x \mapsto h(x, y)$ eine A-lineare Abbildung.

Proposition 2.10.2. *Seien M und N zwei A-Moduln.*

(1) Es gibt einen A-Modul T und eine A-bilineare Abbildung $h : M \times N \to T$, so dass es für jeden A-Modul P und jede A-bilineare Abbildung $g : M \times N \to P$ genau eine A-lineare Abbildung $\lambda : T \to P$ so gibt, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g"'] & T \arrow[d, dashed, "\lambda"] \\ & P \end{tikzcd}$$

kommutiert.

(2) *Ist (T', h') ein weiteres Paar, das (1) erfüllt, so existiert genau ein Isomorphismus $\lambda : T \to T'$, so dass*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "h'"'] & T \arrow[d, dashed, "\lambda"] \\ & T' \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. (1) Sei $D := A^{(M \times N)}$, der freie A-Modul mit Basis $M \times N$. Bezeichne das Basiselement zugehörig zu einem Element $(x, y) \in M \times N$ mit $[x, y]$. Elemente von D sind also (endliche) formale Linearkombinationen $\sum a_i[x_i, y_i]$ mit $a_i \in A$, $x_i \in M$ und $y_i \in N$. Sei $U \subseteq D$ der Untermodul, der erzeugt wird von

$$[ax + a'x', y] - a[x, y] - a'[x', y]$$
$$[x, ay + a'y'] - a[x, y] - a'[x, y']$$

für alle $a, a' \in A$, $x, x' \in M$ und $y, y' \in N$. Nun definiere $T := D/U$ und $h : M \times N \to T$ durch

$$h(x, y) := [x, y] + U.$$

Nach Definition des Untermoduls U ist h eine A-bilineare Abbildung. Ist $g : M \times N \to P$ eine weitere A-bilineare Abbildung, so sei $\tilde{\lambda} : D \to P$ die eindeutig bestimmte A-lineare Abbildung, für die

$$\tilde{\lambda}([x, y]) = g(x, y)$$

gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}([ax + a'x', y] - a[x, y] - a'[x', y]) &= g(ax + a'x', y) - ag(x, y) - a'g'(x', y) \\ &= 0 \\ \tilde{\lambda}([x, ay + a'y'] - a[x, y] - a'[x, y']) &= 0, \end{aligned}$$

denn g ist A-bilinear. Also ist $\tilde{\lambda}(U) = 0$, weshalb $\tilde{\lambda}$ faktorisiert zu $\lambda : D/U \to P$. Für dieses λ gilt $\lambda \circ h = g$.
Es bleibt nachzuweisen, dass λ eindeutig ist. Sei dazu $\mu : T \to P$ A-linear mit $\mu \circ h = g$. Dann gilt

$$\lambda(h(x, y)) = \mu(h(x, y))$$

für alle $(x, y) \in M \times N$. Da T aber erzeugt wird von allen Elementen der Form $h(x, y)$, folgt $\lambda = \mu$.

(2) Sei (T', h') ein weiteres Paar wie in (1). Dann gibt es eindeutig bestimmte A-lineare Abbildungen $\lambda : T \to T'$ und $\lambda' : T' \to T$, so dass

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "h'"'] & T \arrow[d, dashed, "\lambda"] \\ & T' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "h'"'] & T' \arrow[d, dashed, "\lambda'"] \\ & T \end{tikzcd}$$

beide kommutieren. Damit machen sowohl $\lambda' \circ \lambda$ als auch id_T das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "h'"'] & T \arrow[d] \\ & T \end{tikzcd}$$

kommutativ. Es gibt aber nur eine A-lineare Abbildung, die dieses Diagramm kommutativ macht. Also muss $\lambda' \circ \lambda = \mathrm{id}_T$ gelten. Genauso folgert man, dass $\lambda \circ \lambda' = \mathrm{id}_{T'}$ ist. Somit ist λ ein Isomorphismus. □

Definition 2.10.3. Ein Paar (T, h) wie in der vorigen Proposition heißt *Tensorprodukt* von M und N über A. Da es eindeutig bestimmt bis auf einen eindeutigen Isomorphismus ist, schreiben wir $T = M \otimes_A N$ dafür.

2.10.4. Seien $x \in M$ und $y \in N$. Betrachte die bilineare Abbildung $h : M \times N \to M \otimes_A N$. Wir schreiben of $x \otimes y$ für das Bild $h(x, y)$, wenn klar ist, dass $x \otimes y$ als Element von $M \otimes_A N$ aufgefasst werden soll. Elemente der Form $x \otimes y$ nennt man reine Tensoren.
Hier ist ein Beispiel dafür, wie Missverständnisse darüber entstehen könnten. Sei $A = \mathbb{Z}$ und betrachte darüber die Moduln $M = \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $M' = 2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$. Sei $x = 2 \in M' \subseteq M$ und $y = 1 \in N$.

- In $M \otimes_A N = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ gilt $x \otimes y = 2 \otimes 1 = 1 \otimes 2 = 1 \otimes 0 = 0$.
- In $M' \otimes_A N = 2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ gilt $x \otimes y = 2 \otimes 1 \neq 0$. Man kann tatsächlich explizit zeigen, dass $2 \otimes 1$ nicht im Untermodul U liegt. Wir werden aber noch eine elegantere Begründung sehen, die verwendet, dass $2\mathbb{Z}$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis $\{2\}$ ist.

2.10.5. Die bilineare Abbildung $h : M \times N \to M \otimes_A N$ ist nicht notwendig surjektiv. Mit anderen Worten, nicht jedes Element von $M \otimes_A N$ muss ein reiner Tensor sein.
Allerdings erzeugt das Bild von h den A-Modul $M \otimes_A N$. Das Tensorprodukt wird also von reinen Tensoren aufgespannt.

Bemerkung 2.10.6. Wir werden fast nie die explizite Konstruktion des Tensorprodukts benutzen sondern nur die definierende universelle Eigenschaft, sowie Eigenschaften, die daraus folgen.

2.10.7. Gegeben A-Moduln $M_1, \ldots, M_n$ kann man auch das Tensorprodukt $M_1 \otimes_A \ldots \otimes_A M_n$ definieren als A-Modul zusammen mit einer A-multilinearen Abbildung $M_1 \times \ldots \times M_n \to M_1 \otimes_A \ldots \otimes_A M_n$.

2.10.8. Seien $f : M \to N$ und $f' : M' \to N'$ zwei A-lineare Abbildungen. Dann ist die Komposition

$$M \times M' \xrightarrow{f \times f'} N \times N' \to N \otimes_A N'$$

eine A-bilineare Abbildung. Also induziert sie eine A-lineare Abbildung $f \otimes f' : M \otimes_A M' \to N \otimes_A N'$.

Proposition 2.10.9. *Seien M, N, P drei A-Moduln. Sei $(M_t)_{t \in T}$ eine Familie von A-Moduln. Es gibt eindeutig bestimmte Isomorphismen:*

(1) $M \otimes_A N \to N \otimes_A M$ mit $x \otimes y \mapsto y \otimes x$

(2) $(\bigoplus_{t\in T} M_t) \otimes_A N \to \bigoplus_{t\in T}(M_t \otimes_A N)$ *mit* $(x_t)_t \otimes y \mapsto (x_t \otimes y)_t$
(3) $M \otimes_A (N \otimes_A P) \to (M \otimes_A N) \otimes_A P \to M \otimes_A N \otimes_A P$ *mit* $x \otimes (y \otimes z) \mapsto (x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes y \otimes z$.
(4) $A \otimes_A M \to M$ *mit* $a \otimes x \to ax$

für alle $x \in M$, $y \in N$, $z \in P$, $x_t \in M_t$ *und* $a \in A$.

Beweis. Wir zeigen exemplarisch (2). Wir betrachten die A-bilineare Abbildung

$$g : \Big(\bigoplus_{t\in T} M_t\Big) \times N \to \bigoplus_{t\in T}(M_t \otimes_A N),\ ((x_t)_t, y) \mapsto (x_t \otimes y)_t.$$

Diese induziert eine eindeutige Abbildung $\lambda : (\bigoplus_{t\in T} M_t) \otimes_A N \to \bigoplus_{t\in T}(M_t \otimes_A N)$ mit $\lambda((x_t)_t \otimes y) = (x_t \otimes y)_t$.
Umgekehrt betrachten wir für jedes $t \in T$ die A-lineare Abbildung $\iota_t \otimes \mathrm{id}_N : M_t \otimes_A N \to (\bigoplus_{t\in T} M_t) \times N$. Die universelle Eigenschaft der direkten Summe liefert eine eindeutige A-lineare Abbildung $\mu : \bigoplus_{t\in T}(M_t \otimes_A N) \to (\bigoplus_{t\in T} M_t) \times N$, so dass

$$\begin{tikzcd} M_t \otimes N \arrow[r] \arrow[dr, "\iota_t \otimes \mathrm{id}_N"'] & \bigoplus_{t\in T}(M_t \otimes_A N) \arrow[d, "\mu"] \\ & \Big(\bigoplus_{t\in T} M_t\Big) \otimes_A N \end{tikzcd}$$

kommutiert. Deshalb gilt $\mu((x_t \otimes y)_t) = (x_t)_t \otimes y$. Damit ist

$$(\mu \circ \lambda)((x_t)_t \otimes y) = (x_t)_t \otimes y$$
$$(\lambda \circ \mu)((x_t \otimes y)_t) = (x_t \otimes y)_t.$$

Also stimmt $\mu\circ\lambda$ auf reinen Tensoren mit der Identität überein. Reine Tensoren erzeugen aber das Tensorprodukt als A-Modul. Also gilt $\mu \circ \lambda = \mathrm{id}$. Ferner stimmt $\lambda \circ \mu$ mit der Identität auf Elementen der Form $(x_t \otimes y)_t$ überein. Diese erzeugen aber $\bigoplus_{t\in T}(M_t \otimes_A N)$ als A-Modul. Also folgt auch $\lambda \circ \mu = \mathrm{id}$. □

Korollar 2.10.10. *Sei M ein freier A-Modul mit Basis $(x_t)_{t\in T}$ und N ein freier A Modul mit Basis $(y_s)_{s\in S}$. Dann ist $M \otimes_A N$ ein freier A-Modul mit Basis $(x_t \otimes y_s)_{(t,s)\in T\times S}$.*

Beweis. Es gilt $M \cong A^{(T)} = \bigoplus_{t\in T} A$. Also ist

$$M \otimes_A N \cong \Big(\bigoplus_{t\in T} A\Big) \otimes_A \Big(\bigoplus_{s\in S} A\Big) \cong \bigoplus_{t\in T}\Big(A \otimes_A \Big(\bigoplus_{s\in S} A\Big)\Big) \cong \bigoplus_{(t,s)\in T\times S} A.$$

Via dieses Isomorphismus entspricht der Einheitsvektor $e_{(t,s)}$ dem reinen Tensor $x_t \otimes y_s$. □

Proposition 2.10.11 (Tensor-Hom-Adjunktion)**.** *Seien M, N, P drei A-Moduln. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{lllllll} \Phi : \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P)), & & & & \\ \qquad f & \longmapsto & \Phi(f) : & M \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N, P), & & & \\ & & & x \longmapsto f(x \otimes \_) : & N & \longrightarrow & P, \\ & & & & y & \longmapsto & f(x \otimes y) \end{array}$$

wohldefiniert und ein Isomorphismus von A-Moduln.

Beweis. Die Wohldefiniertheit und die A-Linearität sieht man leicht. Definiere eine Abbildung

$$\Psi : \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P)) \to \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P)$$

wobei für $g \in \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P))$ die Abbildung $\Psi(g) : M \otimes_A N \to P$ die eindeutig bestimmte A-lineare Abbildung sei, für die

$$\begin{tikzcd}
(x,y) \arrow[r, mapsto] & (g(x))(y) \\[-20pt]
M \times N \arrow[r] \arrow[d] & P \\
M \otimes_A N \arrow[ur, "\Psi(g)"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Dann ist

$$\begin{aligned}
(\Psi(\Phi(f)))(x \otimes y) &= ((\Psi(f))(x))(y) = (f(x \otimes _))(y) = f(x \otimes y) \\
(\Phi(\Psi(g)))(x) &= (\Psi(g))(x \otimes _) = g(x)
\end{aligned}$$

und damit sind Φ und Ψ zueinander invers. $\square$

2.10.12. Der Adjunktionsisomorphismus Φ ist natürlich in folgendem Sinne: seien $f : M \to M'$, $g : N \to N'$ und $h : P \to P'$ Homomorphismen. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(M' \otimes_A N', P) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(M', \mathrm{Hom}_A(N', P)) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P')).
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 2.10.13. Proposition 2.10.11 bedeutet in kategorieller Sprache, dass die Funktoren $\_ \otimes_A N$ und $\mathrm{Hom}_A(N, \_)$ (in dieser Reihenfolge!) ein adjungiertes Paar von Funktoren bilden.

2.10.14. Seien $f : M \to M'$ und $g : M' \to M''$ A-lineare Abbildungen und sei N ein A-Modul. Dann ist $(g \circ f) \otimes \mathrm{id}_N = (g \otimes \mathrm{id}_N) \circ (f \otimes \mathrm{id}_N)$.

2.11. **Flache Moduln.**

Definition 2.11.1. Sei $I \subseteq \mathbb{Z}$ ein Intervall (d.h. für alle $i, j \in I$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $i < k < j$ gelte $k \in I$). Seien $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von A-Moduln und für jedes $i \in I$ mit $i + 1 \in I$ seien $f_i : M_i \to M_{i+1}$ Homomorphismen. Sei $i \in I$, so dass $i - 1, i + 1 \in I$ sind. Man sagt, die Sequenz $((M_j)_j, (f_j)_j)$ sei *exakt an* i, wenn

$$\mathrm{im}\, f_{i-1} = \ker f_i$$

gilt. Die Sequenz heißt *exakt*, wenn sie exakt an jedem $i \in I$ mit $i - 1, i + 1 \in I$ ist.

Beispiel 2.11.2.
(1) Die Sequenz $0 \to M \xrightarrow{f} N$ ist genau dann exakt, wenn f injektiv ist.
(2) Die Sequenz $M \xrightarrow{f} N \to 0$ ist genau dann exakt, wenn f surjektiv ist.

(3) Die Sequenz $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ ist genau dann exakt, wenn f injektiv, g surjektiv und $\operatorname{im} f = \ker g$ gelten. Eine solche Sequenz nennt man kurze exakte Sequenz.

Proposition 2.11.3 (Linksexaktheit von Hom)**.**

(1) Sei $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to 0$ *eine exakte Sequenz von* A*-Moduln und sei* N *ein* A*-Modul. Dann ist die Sequenz*

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(M_3, N) \xrightarrow{f_2^*} \operatorname{Hom}_A(M_2, N) \xrightarrow{f_1^*} \operatorname{Hom}_A(M_1, N)$$

exakt.

(2) Sei $0 \to N_1 \xrightarrow{g_1} N_2 \xrightarrow{g_2} N_3$ *eine exakte Sequenz von* A*-Moduln und sei* M *ein* A*-Modul. Dann ist die Sequenz*

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(M, N_1) \xrightarrow{g_{1,*}} \operatorname{Hom}_A(M, N_2) \xrightarrow{g_{2,*}} \operatorname{Hom}_A(M, N_3)$$

exakt.

Beweis. Übung. □

Proposition 2.11.4 (Reflektion von Exaktheit)**.** *Sei*

$$(*) \qquad N_1 \xrightarrow{g_1} N_2 \xrightarrow{g_2} N_3$$

eine Sequenz von A*-Moduln. Dann gilt:*

(1) Ist

$$\operatorname{Hom}_A(M, N_1) \xrightarrow{g_{1,*}} \operatorname{Hom}_A(M, N_2) \xrightarrow{g_{2,*}} \operatorname{Hom}_A(M, N_3)$$

exakt für alle A*-Moduln* M*, so ist (*) exakt.*

(2) Ist

$$\operatorname{Hom}_A(N_3, P) \xrightarrow{g_2^*} \operatorname{Hom}_A(N_2, P) \xrightarrow{g_1^*} \operatorname{Hom}_A(N_1, P)$$

exakt für alle A*-Moduln* P*, so ist (*) exakt.*

Beweis. Wir zeigen nur die zweite Aussage, die erste beweist man dual dazu. Zeige zunächst $g_2 \circ g_1 = 0$. Dazu wählen wir $P = N_3$ und betrachte $f = \mathrm{id} \in \operatorname{Hom}_A(N_3, N_3)$. Da $g_1^* \circ g_2^* = 0$, folgt

$$0 = g_1^* \circ g_2^*(\mathrm{id}) = g_2 \circ g_1.$$

Nun beweisen wir $\ker g_2 \subseteq \operatorname{im} g_1$. Wegen der Exaktheit der Hom-Sequenz existiert für jedes $h : N_2 \to P$ mit $h \circ g_1 = 0$ ein $f : N_3 \to P$, so dass $h = f \circ g_2$, also als kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& P & \\
N_1 \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[u, "h"] \arrow[r, "g_1"] & N_3 \arrow[ul, dashed, "\exists f"']
\end{tikzcd}$$

Nun wähle $P = \operatorname{coker} g_1$ und $h : N_2 \to \operatorname{coker} g_1$ die Quotientenabbildung. Dann gilt natürlich $h \circ g_1 = 0$, also gibt es ein $f : N_3 \to \operatorname{coker} g_1$ mit $h = f \circ g_2$. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \ker g_2 \arrow[r, "i"] & N_2 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g_2"] & \operatorname{coker} g_1 \\ & N_3 \arrow[ur, "f"] & \end{tikzcd}$$

Dann ist $h \circ i = f \circ g_2 \circ i = 0$, und deshalb $\ker g_2 \subseteq \operatorname{im} g_1$. □

Proposition 2.11.5 (Rechtsexaktheit des Tensorprodukts)**.** *Sei* $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to 0$ *eine exakte Sequenz von A-Moduln und sei N ein A-Modul. Dann ist die Sequenz*

$$M_1 \otimes_A N \xrightarrow{f_1 \otimes \mathrm{id}} M_2 \otimes_A N \xrightarrow{f_2 \otimes \mathrm{id}} M_3 \otimes_A N \to 0$$

exakt.

Beweis. Sei P ein A-Modul. Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M_3, \mathrm{Hom}(N,P)) \arrow[r, "f_2^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}(M_2, \mathrm{Hom}(N,P)) \arrow[r, "f_1^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}(M_1, \mathrm{Hom}(N,P)) \arrow[d, "\cong"] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M_3 \otimes N, P) \arrow[r, "(f_2 \otimes \mathrm{id})^*"] & \mathrm{Hom}(M_2 \otimes N, P) \arrow[r, "(f_1 \otimes \mathrm{id})^*"] & \mathrm{Hom}(M_1 \otimes N, P) \end{tikzcd}$$

Die obere Sequenz ist nach Proposition 2.11.3(1) exakt. Also auch die untere. Da P beliebig war, ist nach Proposition 2.11.4(2) auch die Sequenz $M_1 \otimes N \to M_2 \otimes N \to M_3 \otimes N \to 0$ exakt. □

2.11.6. Auch wenn $f : M \to N$ injektiv ist, muss $f \otimes \mathrm{id}_P : M \otimes_A P \to N \otimes_A P$ nicht notwendig injektiv sein. Sei dafür A ein Ring und $a \in A$ kein Nullteiler und keine Einheit. Dann ist die A-lineare Abbildung $f : A \to A,\ x \mapsto ax$ injektiv. Für jeden A-Modul P kommutiert

$$\begin{tikzcd} A \otimes_A P \arrow[r, "f \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\cong"] & A \otimes_A P \arrow[d, "\cong"] \\ P \arrow[r] & P \\ x \arrow[r, mapsto] & ax \end{tikzcd}$$

Wählen wir also $P = A/(a)$, so ist $f \otimes \mathrm{id} = 0$. Da $a \notin A^\times$ ist aber $A \otimes_A P = A/(a) \neq 0$.

Definition 2.11.7. Ein A-Modul P heißt *flach*, wenn für jede injektive A-lineare Abbildung $f : M \to N$ auch $f \otimes \mathrm{id} : M \otimes_A P \to N \otimes_A P$ injektiv ist.

Beispiel 2.11.8. Beispiele und Nicht-Beispiele.

(1) Freie Moduln sind flach. (Übung.)
(2) Sei $a \in A \setminus A^\times$ kein Nullteiler. Dann ist $A/(a)$ nicht flach als A-Modul.
(3) Sei $a \in A$ idempotent und $a \notin \{0, 1\}$. Dann ist $A/(a)$ flach als A-Modul. (Übung.)

Proposition 2.11.9. *Für einen A-Modul P sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) P ist flach.
(2) Für jede kurze exakte Sequenz $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *von A-Moduln ist die Sequenz* $0 \to M' \otimes_A P \to M \otimes_A P \to M'' \otimes_A P \to 0$ *exakt.*

(3) Für jede exakte Sequenz $\ldots \to M_{i-1} \to M_i \to M_{i+1} \to \ldots$ von A-Moduln (indiziert über ein Intervall $I \subseteq \mathbb{Z}$) ist die Sequenz $\ldots \to M_{i-1} \otimes_A P \to M_i \otimes_A P \to M_{i+1} \otimes_A P \to \ldots$ exakt.

Beweis. Die Implikationen „(3) $\Rightarrow$ (2)“ und „(2) $\Rightarrow$ (1)“ sind jeweils offensichtlich. Auch „(1) $\Rightarrow$ (2)“ ist klar wegen der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts. Wir zeigen „(1) $\Rightarrow$ (3)“. Betrachte die Sequenz in i. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & 0 \\
 & & & \operatorname{im} f_i \arrow[ur] \arrow[d, "\iota"] & \\
 & M_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] \arrow[d, "\pi"'] & M_i \arrow[r, "f_i"'] \arrow[ur, "\tilde{f}_i"] & M_{i+1} & \\
 & \operatorname{coim} f_{i-1} \arrow[ur, "\overline{f}_{i-1}"'] \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[ur] & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Da die horizontale Sequenz exakt ist, ist auch die Diagonale eine exakte Sequenz. Ferner sind die beiden vertikalen Sequenzen exakt. Betrachte nun das kommutative Diagramm nach Tensorieren mit P:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & 0 \\
 & & & (\operatorname{im} f_i) \otimes_A P \arrow[ur] \arrow[d, "\iota\otimes\mathrm{id}"] & \\
 & M_{i-1} \otimes_A P \arrow[r, "f_{i-1}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\pi\otimes\mathrm{id}"'] & M_i \otimes_A P \arrow[r, "f_i\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ur, "\tilde{f}_i\otimes\mathrm{id}"] & M_{i+1} \otimes_A P & \\
 & (\operatorname{coim} f_{i-1}) \otimes_A P \arrow[ur, "\overline{f}_{i-1}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[ur] & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Die diagonale Sequenz und die beiden vertikalen Sequenzen sind jeweils exakt, da P flach ist, bzw. wegen der Rechtsexaktheit. Nun betrachte die beiden Dreiecke im Diagramm. Da $\pi \otimes \mathrm{id}$ surjektiv ist und $\iota \otimes \mathrm{id}$ injektiv ist, folgen

$$\operatorname{im}(f_{i-1} \otimes \mathrm{id}) = \operatorname{im}(\overline{f}_{i-1} \otimes \mathrm{id})$$
$$\ker(f_i \otimes \mathrm{id}) = \ker(\tilde{f}_i \otimes \mathrm{id}).$$

Das beweist die Exaktheit der horizontalen Sequenz im tensorierten Diagramm. $\square$

3. Algebren

Im gesamten Kapitel sei A ein Ring.

3.1. **Grundbegriffe.**

Definition 3.1.1. Sei A ein Ring. Eine A-*Algebra* ist ein Paar bestehend aus einem Ring B und einem Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$.

Bemerkung 3.1.2. Statt (B, φ) schreiben wir für eine A-Algebra kurz B; falls wir $A \to B$ schreiben, meinen wir damit den Ringhomomorphismus, der zur A-Algebra B dazugehört.

3.1.3. Ist B eine A-Algebra und C eine B-Algebra, so wird C eine A-Algebra via $A \to B \to C$.

3.1.4. Jeder Ring A ist auf eindeutige Weise eine $\mathbb{Z}$-Algebra.

3.1.5. Ist B eine A-Algebra, so ist ${}_AB$ ein A-Modul und die Ringmultiplikation $\cdot : B \times B \to B$ eine A-bilineare Abbildung. Ist umgekehrt B ein A-Modul und $\cdot : B \times B \to B$ eine A-bilineare Abbildung, mit der B zu einem Ring wird, so ist $A \to B, a \mapsto a \cdot 1$ ein Ringhomomorphismus, sprich B eine A-Algebra.

Definition 3.1.6. Seien $B = (B, \varphi_B)$ und $C = (C, \varphi_C)$ zwei A-Algebren. Ein A-*Algebrenhomomorphismus* $f : B \to C$ ist ein Ringhomomorphismus, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] & & C \\ & A \arrow[ul, "\varphi_B"] \arrow[ur, "\varphi_C"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition 3.1.7. Sei B eine A-Algebra. Eine A-*Unteralgebra* ist ein Unterring $B' \subseteq B$, der das Bild von $A \to B$ enthält.

Beispiel 3.1.8. Der Polynomring $A[t]$ ist eine A-Algebra via $A \to A[t],\ a \mapsto a \cdot 1$. Sei B eine A-Algebra und sei $b \in B$. Dann ist die Auswertungsabbildung $\mathrm{ev}_b : A[t] \to B$ ein A-Algebrenhomomorphismus.

3.1.9. Sei S eine Menge. Wähle Unbestimmte t_s für $s \in S$ und betrachte den Polynomring $A[(t_s)_{s \in S}]$. Dieser besitzt die folgende universelle Eigenschaft: für jede A-Algebra B und jede Familie $(b_s)_{s \in S} \in B^S$ von Elementen von B existiert genau ein A-Algebrenhomomorphismus

$$\mathrm{ev}_{(b_s)_s} : A[(t_s)_{s \in S}] \to B$$

der t_s auf b_s abbildet für alle $s \in S$. Das Bild von $\mathrm{ev}_{(b_s)_s}$ ist eine A-Unteralgebra und wird mit $A[(b_s)_{s \in S}]$ bezeichnet.

Definition 3.1.10. Sei B eine A-Algebra. Man nennt eine Familie $(b_s)_{s \in S} \in B^S$ ein *Erzeugendensystem von B als A-Algebra*, wenn $A[(b_s)_{s \in S}] = B$ ist. Wir sagen B ist *endlich erzeugt als A-Algebra*, wenn B ein endliches Erzeugendensystem besitzt.

Definition 3.1.11. Sei B eine A-Algebra. Falls ${}_AB$ endlich erzeugt als A-Modul ist, so nennt man B eine *endliche* A-Algebra.

3.1.12. Sei B eine A-Algebra. Ist B eine endliche A-Algebra, so ist B eine endlich erzeugte A-Algebra. Die Umkehrung ist aber im Allgemeinen nicht richtig.

Lemma 3.1.13. *Sei B eine A-Algebra und N ein B-Modul. Ist N endlich erzeugt als B-Modul und B eine endliche A-Algebra, so ist ${}_AN$ ein endlich erzeugter A-Modul.*

Beweis. Sei $y_1, \dots, y_n$ ein Erzeugendensystem von N über B und $x_1, \dots, x_m$ ein Erzeugendensystem von ${}_AB$ als A-Modul. Dann ist $(x_i y_j)_{i,j}$ ein Erzeugendensystem von ${}_AN$ als A-Modul. □

3.1.14. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine algebraische Varietät. Das heißt es gibt $f_1, \dots, f_m \in k[t_1, \dots, t_n]$ mit $X = V(f_1, \dots, f_m)$ (manche Autoren fordern auch, dass X irreduzibel ist; das möchte ich hier nicht tun). Der Ring $A(X)$ der regulären Funktionen auf X ist isomorph zu

$$A(X) = k[t_1, \dots, t_n]/\sqrt{(f_1, \dots, f_m)}.$$

Somit ist $A(X)$ eine endlich erzeugte reduzierte k-Algebra. Ist umgekehrt A eine reduzierte endlich erzeugte k-Algebra, so finden wir einen surjektiven Homomorphismus $k[t_1, \dots, t_n] \to A$. Sei I der Kern. Dann ist $X = V(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät mit Koordinatenring $A(X) \cong A$.
Sei nun $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ eine weitere affine Varietät. Ist $f : X \to Y$ eine reguläre Abbildung, so ist durch $f^* : A(Y) \to A(X),\ h \mapsto h \circ f$ ein k-Algebrenhomomorphismus definiert. Umgekehrt existiert zu jedem k-Algebrenhomomorphismus $\varphi : A(Y) \to A(X)$ eine eindeutig bestimmte reguläre Abbildung f, so dass $\varphi = f^*$ ist. Wir haben also eine Bijektion

$$\{f : X \to Y \mid f \text{ regulär}\} \to \{\varphi : A(Y) \to A(X) \mid \varphi\ k\text{-Algebrenhomomorphismus}\}.$$

3.2. **Skalarerweiterung.**

3.2.1. Sei M ein A-Modul und sei B eine A-Algebra. Fixiere $b' \in B$ und betrachte die A-bilineare Abbildung $B \times M \to B \otimes_A M$, die (b, x) auf $(b'b) \otimes x$ abbildet. Dann erhalten wir eine lineare Abbildung $m_{b'} : B \otimes_A M \to B \otimes_A M$ mit $m_{b'}(x) = (b'b) \otimes x$. Definiere

$$m : B \times B \otimes_A M \to B \otimes_A M,\ (b', y) \mapsto m_{b'}(y).$$

Mit dieser Abbildung wird $B \otimes_A M$ zu einem B-Modul.
Wir weisen examplarisch das Axiom (M.4) nach. Seien $b', b'' \in B$ und $y \in B \otimes_A M$. Wir zeigen

$$m(b'', m(b', y)) = m(b''b', y).$$

oder äquivalent

$$m_{b''}(m_{b'}(y)) = m_{b''b'}(y).$$

Da $m_{b''} \circ m_{b'}$ und $m_{b''b'}$ beide A-linear sind, dürfen wir annehmen, dass y ein reiner Tensor ist, also $y = b \otimes x$ mit $b \in B$ und $x \in M$. Dann ist

$$m_{b''}(m_{b'}(b \otimes x)) = (b''(b'b)) \otimes x = ((b''b')b) \otimes x = m_{b''b'}(b \otimes x).$$

Definition 3.2.2. Der B-Modul $B \otimes_A M$ heißt die *Skalarerweiterung* von M nach B.

3.2.3. Sei $f : M \to M'$ eine A-lineare Abbildung. Dann ist $\mathrm{id}_B \otimes f : B \otimes_A M \to B \otimes_A M'$ eine B-lineare Abbildung.
Da $\mathrm{id}_B \otimes f$ eine A-lineare Abbildung ist, reicht es reine Tensoren zu betrachten. Sei also $b' \in B$ und $y = b \otimes x \in B \otimes_A M$. Dann ist

$$(\mathrm{id}_B \otimes f)(b' \cdot (b \otimes x)) = (\mathrm{id}_B \otimes f)((b'b) \otimes x) = (b'b) \otimes f(x)$$
$$b' \cdot (\mathrm{id}_B \otimes f)(b \otimes x) = b' \cdot (b \otimes f(x)) = (b'b) \otimes f(x).$$

Ist $g : M' \to M''$ eine weitere A-lineare Abbildung, so folgt $(\mathrm{id}_B \otimes g) \circ (\mathrm{id}_B \otimes f) = \mathrm{id}_B \otimes (g \circ f)$.

Proposition 3.2.4 (Adjunktion von Erweiterung und Restriktion der Skalare)**.** *Seien B eine A-Algebra, M ein A-Modul und N ein B-Modul.*

(1) Sei $f : M \to {}_AN$ eine A-lineare Abbildung. Dann existiert genau eine B-lineare Abbildung $f_B : B \otimes_A M \to N$, so dass $f_B(b \otimes x) = bf(x)$ ist für alle $b \in B$ und $x \in M$.

(2) Die Abbildungen

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N) & \xrightarrow{\Phi} & \mathrm{Hom}_A(M, {}_AN) & & \\ g & \longmapsto & \Phi(g) : & M \longrightarrow {}_AN & \\ & & & x \longmapsto g(1 \otimes x) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N) & \xleftarrow{\Psi} & \mathrm{Hom}_A(M, {}_AN) \\ f_B = \Psi(f) & \longleftarrow\!\shortmid & f \end{array}$$

sind wohldefinierte, zueinander inverse Isomorphismen von A-Moduln.

Beweis.

(1) Die Abbildung f_B entsteht als die eindeutig bestimmte A-lineare Abbildung, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} (b,x) \arrow[r, mapsto] & bf(x) \\ B \times M \arrow[r] \arrow[d] & N \\ B \otimes_A M \arrow[ur, "f_B"'] & \end{tikzcd}$$

kommutieren lässt. Damit gilt $f_B(b \otimes x) = bf(x)$. Wie in 3.2.3 kann man nachprüfen, dass f_B tatsächlich B-linear ist.

(2) Die Wohldefniniertheit von Φ folgt aus der A-Linearität von $g(1 \otimes \_)$. Die A-Linearität von Φ und Ψ ist leicht nachzurechnen. Wir zeigen, dass die Abbildungen zueinander invers sind. Sei $f \in \mathrm{Hom}_A(M, {}_AN)$ und sei $x \in M$. Dann ist

$$(\Phi(\Psi(f)))(x) = (\Phi(f_B))(x) = f_B(1 \otimes x) = f(x).$$

Sei $g \in \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N)$. Da g und $\Psi(\Phi(g))$ beide insbesondere A-linear sind, reicht es die Gleichheit auf reinen Tensoren zu prüfen. Seien $b \in B$ und $x \in M$.

$$(\Psi(\Phi(g)))(b \otimes x) = \Psi(g(1 \otimes \_))(b \otimes x) = bg(1 \otimes x) = g(b \otimes x),$$

wobei die letzte Gleichheit aus der B-Linearität von g folgt. $\square$

Lemma 3.2.5. *Seien B eine A-Algebra, M ein A-Modul und N ein B-Modul.*

(1) *$N \otimes_A M$ wird zu einem B-Modul via der eindeutig bestimmten Abbildung $B \times N \otimes_A M \to N \otimes_A M$ mit*

$$(b, y \otimes_A x) \mapsto (by) \otimes_A x.$$

(2) *Es gibt einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $N \otimes_A M \to N \otimes_B (B \otimes_A M)$, der $y \otimes_A x \mapsto y \otimes_B (1 \otimes_A x)$ abbildet.*

Beweis.

(1) Genauso wie in 3.2.1.

(2) Sei $\varphi : N \otimes_A M \to N \otimes_B (B \otimes_A M)$ die eindeutig bestimmte A-lineare Abbildung aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(y,x) \arrow[r, mapsto] & (y,1,x) \\
N \times M \arrow[r] \arrow[dd] \arrow[ddr] & N \times B \times M \arrow[d] \\
& N \times (B \otimes_A M) \arrow[d] \\
N \otimes_A M \arrow[r, dashed, "\varphi"] & N \otimes_B (B \otimes_A M)
\end{tikzcd}$$

Beachte, dass die Diagonale im obigen Diagramm eine A-bilineare Abbildung ist. Es gilt $\varphi(y \otimes_A x) = y \otimes_B (1 \otimes_A x)$.
Sei umgekehrt $y \in N$. Sei $\psi_y : B \otimes_A M \to N \otimes_A M$ die eindeutig bestimmte A-lineare Abbildung mit $\psi_y(b \otimes_A x) = (by) \otimes_A x$. Die Abbildung

$$N \times B \otimes_A M \to N \otimes_A M, \ (y, z) \mapsto \psi_y(z)$$

ist B-bilinear (nachrechnen!). Damit existiert genau eine B-lineare Abbildung $\psi : N \otimes_B (B \otimes_A M) \to N \otimes_A M$, so dass

$$\psi(y \otimes_B (b \otimes_A x)) = (by) \otimes_A x.$$

Wir zeigen, dass φ und ψ zueinander invers sind. Wieder reicht es das auf reinen Tensoren zu testen.

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \varphi)(y \otimes_A x) &= \psi(y \otimes_B (1 \otimes_A x)) \\
&= y \otimes_A x \\
(\psi \circ \psi)(y \otimes_B (b \otimes_A x)) &= \varphi((by) \otimes_A x) \\
&= (by) \otimes_B (1 \otimes_A x) \\
&= y \otimes_B (b \cdot (1 \otimes_A x)) \\
&= y \otimes_B (b \otimes_A x).
\end{aligned}$$

(Beachte, dass φ als Inverses von ψ automatisch B-linear ist.) $\square$

Korollar 3.2.6. *Seien B eine A-Algebra, C eine B-Algebra und M ein A-Modul. Dann existiert genau ein Isomorphismus von C-Moduln*

$$C \otimes_A M \to C \otimes_B (B \otimes_A M)$$

mit $c \otimes x \mapsto c \otimes (1 \otimes x)$ für alle $c \in C$ und $x \in M$.

Beweis. Wende 3.2.5 an. Rechne nach, dass der Isomorphismus C-linear ist. □

Proposition 3.2.7. *Seien B eine A-Algebra, M ein A-Modul und (P) eine der folgenden Eigenschaften:*

- *frei*
- *endlich erzeugt*
- *endlich präsentiert*
- *flach*

Falls M als A-Modul die Eigenschaft (P) erfüllt, so erfüllt $B \otimes_A M$ die Eigenschaft (P) als B-Modul.

Beweis. Übung. □

Lemma 3.2.8. *Sei $I \subseteq A$ ein Ideal. Sei M ein A-Modul. Dann gibt es genau einen Isomorphismus von A/I-Moduln*

$$A/I \otimes_A M \to M/IM$$

der $(a+I) \otimes x$ auf $ax + IM$ abbildet.

Beweis. Übung. □

3.3. **Tensorprodukt von Algebren.**

Lemma 3.3.1. *Seien B und C A-Algebren.*

(1) Es gibt eine eindeutig bestimmte A-bilineare Abbildung $m : B \otimes_A C \times B \otimes_A C \to B \otimes_A C$, so dass $(b \otimes c, b' \otimes c') \mapsto bb' \otimes cc'$.
(2) $(B \otimes_A C, +, m)$ ist ein Ring (mit $1 = 1 \otimes 1$).
(3) Die Abbildungen $B \to B \otimes_A C,\ b \mapsto b \otimes 1$ und $C \to B \otimes_A C,\ c \mapsto 1 \otimes c$ sind Ringhomomorphismen.
(4) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & B \otimes_A C \end{tikzcd}$$

kommutiert. Mit anderen Worten, die beiden A-Algebrenstrukturen auf $B \otimes_A C$ stimmen überein.
(5) Ist D ein weiterer Ring und

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von Ringhomomorphismen, so existiert genau ein Ringhomomorphismus $\lambda : B \otimes_A C \to D$, so dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\
C \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "g"'] & B \otimes_A C \arrow[dr, dashed, "\lambda"] & \\
& & D
\end{tikzcd}$$

Beweis.

(1) Fixiere $(b, c) \in B \times C$. Dann ist $B \times C \to B \otimes_A C,\ (b', c') \mapsto bb' \otimes cc'$ eine A-bilineare Abbildung. Sie liefert eine A-lineare Abbildung $\varphi_{(b,c)} : B \otimes_A C \to B \otimes_A C$ mit $\varphi_{(b,c)}(b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$. Nun existiert genau eine A-lineare Abbildung φ, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(b,c) \arrow[r, mapsto] & \varphi_{(b,c)} \\
B \times C \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(B \otimes_A C, B \otimes_A C) \\
B \otimes_A C \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht, denn die Zuordnung $(b, c) \mapsto \varphi_{(b,c)}$ ist eine A-bilineare Abbildung. Betrachte die Tensor-Hom-Adjunktion

$$\mathrm{Hom}_A(B \otimes_A C, \mathrm{Hom}_A(B \otimes_A C, B \otimes_A C)) \xrightarrow[\cong]{\Psi} \mathrm{Hom}_A((B \otimes_A C) \otimes_A (B \otimes_A C), B \otimes_A C)$$

und definiere m als die Komposition

$$(B \otimes_A C) \times (B \otimes_A C) \to (B \otimes_A C) \otimes_A (B \otimes_A C) \xrightarrow{\Psi(\varphi)} B \otimes_A C.$$

Nach Definition von Ψ ist

$$m(b \otimes c, b' \otimes c') = (\varphi(b \otimes c))(b' \otimes c') = \varphi_{(b,c)}(b' \otimes c') = bb' \otimes cc'.$$

(2) Da m A-bilinear ist, reicht es die Ringaxiome auf reinen Tensoren zu testen. Die folgen dann leicht mit den Rechenregeln für das Tensorprodukt.

(3) Klar mit (1) und (2).

(4) Für $a \in A$ gilt $a \otimes_A 1 = a \cdot (1 \otimes_A 1) = 1 \otimes_A a$. Das beweist die Kommutativität.

(5) Zur Existenz von λ. Da die Abbildung $B \times C \to D$ definiert durch $(b, c) \mapsto f(b)g(c)$ A-bilinear ist, erhalten wir eine A-lineare Abbildung $\lambda : B \otimes_A C \to D$ mit $\lambda(b \otimes_A c) = f(b)g(c)$. Wir überprüfen, ob λ ein Ringhomomorphismus ist; dafür genügt es wieder reine Tensoren zu betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned}
\lambda((b \otimes c) \cdot (b' \otimes c')) &= \lambda(bb' \otimes cc') \\
&= f(bb')g(cc') \\
&= f(b)g(c)f(b')g(c') \\
&= \lambda(b \otimes c)\lambda(b' \otimes c').
\end{aligned}$$

Ferner ist $\lambda(1 \otimes 1) = f(1)g(1) = 1$.
Zur Eindeutigkeit. Sei $\lambda' : B \otimes_A C \to D$ ein weiterer Ringhomomorphismus, der das Diagramm kommutativ macht. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lambda'(b \otimes c) &= \lambda'((b \otimes 1) \cdot (1 \otimes c)) \\ &= \lambda'(b \otimes 1)\lambda'(1 \otimes c) \\ &= f(b)g(c) \\ &= \lambda(b \otimes c).\end{aligned}$$

Die beiden A-linearen Abbildungen λ' und λ stimmen also auf reinen Tensoren überein. Daraus folgt $\lambda = \lambda'$. □

Beispiel 3.3.2. Sei B eine A-Algebra und sei $C = A[t]$. Es gilt $B \otimes_A A[t] \cong B[t]$. Das sieht man daran, dass $B[t]$ die universelle Eigenschaft aus Lemma 3.3.1(5) erfüllt.

Beispiel 3.3.3. Hier noch zwei konkrete Beispiele:
(1) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ mit der Produkt-Ringstruktur.
(2) Sei $k = \mathbb{F}_2(t)$ der Funktionenkörper und $K = k(\sqrt{t})$. Das ist eine rein inseparable Erweiterung vom Grad 2. Es gilt $K \otimes_k K \cong K[x]/(x^2)$.

3.3.4. Sei B eine A-Algebra und sei $I \subseteq A$ ein Ideal. Der Isomorphismus

$$A/I \otimes_A B \to B/IB$$

von A/I-Moduln aus Lemma 3.2.8, der $(a + I) \otimes b \mapsto ab + IB$ abbildet, ist auch ein Isomorphismus von Ringen.

3.3.5. Sind B und C endlich erzeugte A-Algebren, so ist $B \otimes_A C$ endlich erzeugt als A-Algebra und somit auch als B- und als C-Algebra.

3.3.6. Wir diskutieren noch die geometrische Bedeutung des Tensorprodukts von Algebren. Das Tensorprodukt ist ein Push-out in der Kategorie der Ringe. Das gleiche gilt in der Kategorie der endlich erzeugten k-Algebren. Das sollte also einem Pull-back in der Kategorie der affinen Varietäten entsprechen. Allerdings sind Tensorprodukte von Integritätsbereichen im Allgemeinen nicht mehr reduziert. Das zeigt eine Unzulänglichkeit der Kategorie der (affinen) Varieäten und ist ein Grund, warum man Schemata braucht. Hier ein konkretes Beispiel zur Illustration. Sei $k = \mathbb{C}$. Sei $X = \mathbb{A}^2$ und sei $A = A(X) = \mathbb{C}[t_1, t_2]$. Sei $Y = V(t_2)$ mit Koordinatenring $B = A(Y) = \mathbb{C}[t_1, t_2]/(t_2)$ und sei $Z = V(t_2 - t_1^2)$ mit Koordinatenring $C = A(Z) = \mathbb{C}[t_1, t_2]/(t_2 - t_1^2)$. Sowohl B als auch C sind Integritätsbereiche; beide sind isomorph zum Polynomring. Aber

$$B \otimes_A C \cong \mathbb{C}[t_1, t_2]/(t_2, t_2 - t_1^2) \cong \mathbb{C}[t_1]/(t_1^2),$$

was nicht reduziert ist.
Geometrisch berechnen wir hier den Durchschnitt von Y, der t_1-Achse, mit Z, der Parabel $t_2 = t_1^2$, in der affinen Ebene X. Dieser Durchschnitt besteht mengentheoretisch nur aus dem Nullpunkt. Die Anschauung sagt uns allerdings, dass dieser Schnittpunkt die Multiplizität 2 haben sollte, was sich im Tensorprodukt niederschlägt.

4. Lokalisierung

Im gesamten Kapitel sei A ein Ring.

4.1. **Lokalisierung von Ringen.**

Definition 4.1.1. Eine Teilmenge $S \subseteq A$ heißt *multiplikative Teilmenge*, wenn

(1) $1 \in S$,
(2) $ab \in S$ für alle $a, b \in S$.

Proposition 4.1.2. *Sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge.*

(1) Es existiert ein Ring L zusammen mit einem Ringhomomorphismus $\lambda : A \to L$ mit folgender universeller Eigenschaft.
- $\lambda(S) \subseteq L^\times$.
- *Für jeden Ring B und jeden Ringhomomorphismus $f : A \to B$ mit $f(S) \subseteq B^\times$ gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mu : L \to B$, so dass*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "f"'] & L \arrow[d, dashed, "\mu"] \\ & B \end{tikzcd}$$

kommutiert.

(2) Ist (L', λ') ein weiteres Paar mit der obigen universellen Eigenschaft, so gibt es genau einen Isomorphismus $\mu : L \to L'$ mit $\mu \circ \lambda = \lambda'$.

Beweis. Wir zeigen nur die Existenz. Die Eindeutigkeit von (L, λ) bis auf einen eindeutigen Isomorphismus folgt mit dem Standard-Argument für universelle Konstruktionen. Betrachte $S \times A$. Definiere darauf folgende Relation: $(s, a) \sim (t, b)$, falls es ein $u \in S$ so gibt, dass

$$u(ta - sb) = 0.$$

Das ist eine Äquivalenzrelation. Wir weisen dafür die Transitivität nach. Gelte $(r, a) \sim (s, b)$ und $(s, b) \sim (t, c)$. Dann existieren u, v mit

$$usa = urb \qquad vtb = vsc.$$

Wir mulitplizieren die Gleichungen mit vt bzw. ur und erhalten

$$uvsta = uvrtb = uvsrc.$$

Daher gilt $(r, a) \sim (t, c)$. Wir definieren $L := (S \times A)/\sim$. Die Äquivalenzklasse von (s, a) bezeichnen wir mit a/s. Wir definieren darauf die Operationen $+$ und $\cdot$ durch

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{ta + sb}{st} \qquad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} := \frac{ab}{st}$$

Diese Operationen sind wohldefiniert und L wird mit ihnen ein Ring; es gilt $1 = 1/1$. Die Abbildung $\lambda : A \to L$ definiert durch $\lambda(a) := a/1$ ist ein Ringhomomorphismus. Für $s \in S$ ist $\lambda(s) = s/1 \in L^\times$, da $1/s \cdot s/1 = 1$ ist. Ist $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus mit $f(S) \subseteq B^\times$, so definieren wir $\mu : L \to B$ durch $\mu(a/s) := f(a)f(s)^{-1}$. So ist μ wohldefiniert und ein Ringhomomorphismus. Es gilt $\mu \circ \lambda = f$. $\square$

Definition 4.1.3. Sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge. Ein Paar (L, λ) wie in der obigen Proposition heißt *Lokalisierung* von A an S. Da es eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus ist, schreiben wir $L =: S^{-1}A$.

4.1.4. Sei $a \in A$ und $s \in S$. Genau dann ist $a/s = 0$ in $S^{-1}A$, wenn es ein $u \in S$ gibt, so dass $ua = 0$ in A.

4.1.5. In $S^{-1}A$ gilt folgende Kürzungsregel: Seien $s, t \in S$ und $a \in A$. Dann ist $a/s = (ta)/(ts)$.

4.1.6. Aus der Konstruktion in Proposition 4.1.2 folgt leicht:

(1) Genau dann ist $S^{-1}A = 0$, wenn $0 \in S$.
(2) Genau dann ist $A \to S^{-1}A$ injektiv, wenn S keine Nullteiler enthält. (Hierbei gelte in einem Ring mit $1 \neq 0$ auch 0 als ein Nullteiler.)
(3) Genau dann ist $A \to S^{-1}A$ bijektiv, wenn $S \subseteq A^\times$.

4.1.7. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Dann ist $S := (A \setminus \mathfrak{p})$ eine multiplikative Teilmenge. Die Lokalisierung $S^{-1}A$ bezeichnen wir mit $A_\mathfrak{p}$. Ist A ein Integritätsbereich, so ist (0) ein Primideal. Die Lokalisierung $A_{(0)} =: Q(A)$ ist ein Körper, denn jedes Element $a/s \neq 0$ ist invertierbar. Man nennt $Q(A)$ den Quotientenkörper von A.

4.1.8. Sei $f \in A$. Dann ist $S := \{f^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ eine multiplikative Teilmenge. Wir bezeichnen die Lokalisierung $S^{-1}A$ mit $A[f^{-1}]$; eine andere gängige Notation ist A_f.

4.2. **Idealkorrespondenz.**

Lemma 4.2.1. *Sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge.*

(1) Sei $I \subseteq A$ ein Ideal. Dann gelten

$$I \cdot S^{-1}A = \{\frac{a}{s} \mid a \in I, s \in S\}$$
$$(I \cdot S^{-1}A) \cap I = \{a \in A \mid \exists u \in S : \ ua \in I\}$$

Insbesondere ist genau dann $I \cdot S^{-1}A = (1)$, wenn $I \cap S \neq \emptyset$.

(2) Sei $J \subseteq S^{-1}A$ ein Ideal. Dann ist $(J \cap A) \cdot S^{-1}A = J$.

(3) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Dann ist $\mathfrak{p} \cdot S^{-1}A$ ein Primideal von $S^{-1}A$ und $(\mathfrak{p} \cdot S^{-1}A) \cap A = \mathfrak{p}$.

(4) Sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal von $S^{-1}A$. Dann ist $(\mathfrak{q} \cap A) \cap S = \emptyset$.

(5) Die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} & \longleftrightarrow & \operatorname{Spec}(S^{-1}A) \\ \mathfrak{p} & \longmapsto & \mathfrak{p} \cdot S^{-1}A \\ \mathfrak{q} \cap A & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{q} \end{array}$$

wohldefinierte, inklusionserhaltende, zueinander inverse Bijektionen.

Beweis.

(1) Zeige $I \cdot S^{-1}A = \{a/s \mid a \in I, s \in S\} =: J$.
Zu „$\subseteq$": Offensichtlich ist $\lambda(I) \subseteq J$. Außerdem sieht man leicht, dass J ein Ideal ist. Also gilt $I \cdot S^{-1}A = (\lambda(I)) \subseteq J$.
Zu „$\supseteq$": Für $a \in I$ und $s \in S$ ist $a/s = (1/s) \cdot (a/1) \in (\lambda(I)) = I \cdot S^{-1}A$.

Nun zeigen wir $(I \cdot S^{-1}A) \cap A = \{a \in A \mid \exists u \in S : \; ua \in I\} =: I'$. Dazu sei $a \in A$. Genau dann ist $a \in (I \cdot S^{-1}A) \cap A$, wenn $a/1 \in I \cdot S^{-1}A$. Das ist aber äquivalent zur Existenz von $b \in I$ und $s \in S$, so dass

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{s}$$

und diese Gleichung bedeutet per Definition die Existenz von $t \in S$, so dass $t(sa - b) = 0$. Also

$$(I \cdot S^{-1}A) \cap A = \{a \in A \mid \exists b \in I, s, t \in S : \; t(sa - b) = 0\}.$$

Für $a \in I \cdot S^{-1}A$ und solche b, s, t ist also $tsa = tb \in I$; mit $u = ts$ sieht man also $a \in I'$. Ist umgekehrt $a \in I'$ und $u \in S$ mit $ua \in I$, so wählen wir $b = ua$, $s = u$ und $t = 1$. Mit diesen Wahlen gilt $t(sa - b) = 0$.

(2) Wir wissen bereits, dass $(J \cap A) \cdot S^{-1}A \subseteq J$ gilt. Wir zeigen die umgekehrte Inklusion. Sei $c \in J$ und schreibe $c = a/s$ mit $a \in A$ und $s \in S$. Dann ist

$$\frac{a}{1} = \frac{s}{1}\frac{a}{s} \in J$$

also ist $a \in J \cap A$. Aussage (1) liefert dann $c = a/s \in (J \cap A) \cdot S^{-1}A$.

(3) Wir beweisen, dass $\mathfrak{p} \cdot S^{-1}A$ ein Primideal ist. Dazu seien $c, d \in S^{-1}A \setminus (\mathfrak{p} \cdot S^{-1}A)$. Schreibe $c = a/s$ und $d = b/t$ für $a, b \in A$ und $s, t \in S$. Aus (1) folgt $a, b \in A \setminus \mathfrak{p}$. Damit ist $ab \notin \mathfrak{p}$. Angenommen $(ab)/(st) \in \mathfrak{p} \cdot S^{-1}A$. Dann gäbe es $e \in \mathfrak{p}$ und $u \in S$ mit

$$\frac{ab}{st} = \frac{e}{u}.$$

Dann gäbe es ein $v \in S$, so dass $vuab = vste \in \mathfrak{p}$. Da $ab \notin \mathfrak{p}$, würde daraus $vu \in \mathfrak{p}$ folgen. Aber das ist ein Widerspruch zu $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.
Nun zeigen wir $(\mathfrak{p} \cdot S^{-1}A) \cap A \subseteq \mathfrak{p}$. (Beachte, dass die umgekehrte Inklusion schon bekannt ist.) Für ein Element $a \in (\mathfrak{p} \cdot S^{-1}A) \cap A$ existiert nach (1) ein $u \in S$, so dass $ua \in \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ ist, muss dann $a \in \mathfrak{p}$ gelten.

(4) Für ein $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(S^{-1}A)$ ist $(\mathfrak{q} \cap A) \cap S = \emptyset$, denn sonst wäre ein Element der Form $s/1$ mit $s \in S$ enthalten in $\mathfrak{q}$. Solche Elemente sind aber Einheiten.

(5) Folgt aus den vorigen Aussagen. □

4.2.2. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Für ein Primideal $\mathfrak{p}'$ von A gilt genau dann $\mathfrak{p}' \cap (A \setminus \mathfrak{p}) = \emptyset$, wenn $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$. Deshalb erhalten wir inklusionserhaltende Bijektionen

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}\} &\longleftrightarrow \operatorname{Spec}(A_\mathfrak{p}) \\ \mathfrak{p}' &\longmapsto \mathfrak{p}' \cdot A_\mathfrak{p} \\ \mathfrak{q} \cap A &\longleftarrow\!\shortmid \mathfrak{q} \end{aligned}$$

Das beweist, dass $A_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p}$ ist.

4.2.3. Sei $f \in A$. Für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von A gilt genau dann $\mathfrak{p} \cap \{1, f, f^2, \ldots\} = \emptyset$, wenn $f \notin \mathfrak{p}$. Damit erhalten wir inklusionserhaltende Bijektionen

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\} &\longleftrightarrow \operatorname{Spec}(A[f^{-1}]) \\ \mathfrak{p} &\longmapsto \mathfrak{p} \cdot A[f^{-1}] \\ \mathfrak{q} \cap A &\longleftarrow\!\shortmid \mathfrak{q} \end{aligned}$$

4.2.4. Diese beiden Lokalisierungen haben eine geometrische Bedeutung. Zuerst zur Lokalisierung $A[f^{-1}]$.
Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Sei $A = A(X)$ der Koordinatenring und sei $f \in A$. Für eine beliebige (Zariski-)offene Teilmenge U definiert man die Menge der regulären Funktionen $\mathscr{O}_X(U)$ als Funktionen der Form $(g|_U)/(h|_U)$, wobei $g, h \in A$ mit $0 \notin h(U)$ sind. Diese Ringe $(\mathscr{O}_X(U))_U$ formen, zusammen mit den Einschränkungen regulärer Funktionen eine Garbe von k-Algebren.
Die Menge

$$D(f) := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

ist eine offene Teilmenge von X. Eine solche Menge heißt offene Hauptmenge von X. Die offenen Hauptmengen formen eine Basis der Zariski-Topologie; für jede offene Menge $U \subseteq X$ existieren $f_1, \ldots, f_m \in A$, so dass $U = \bigcup_{i=1}^m D(f_i)$.
Wir bestimmen nun $\mathscr{O}_X(D(f))$. Für ein $h \in A$ ist die Bedingung $0 \notin h(D(f))$ äquivalent dazu, dass es ein $n > 0$ gibt, so dass $f^n \in (h)$. (Hierfür benötigt man Hilberts Nullstellensatz, den wir noch nicht formuliert haben.) Damit sieht man

$$\mathscr{O}_X(D(f)) \cong A[f^{-1}].$$

4.3. **Lokalisierung von Moduln.**

4.3.1. Sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge und M ein A-Modul. Definiere auf $S \times M$ die Relation $(s, x) \sim (t, y)$, falls es ein $u \in S$ so gibt, dass $u(tx - sy) = 0$. Das ist eine Äquivalenzrelation. Definiere $S^{-1}M := (S \times M)/\sim$ und bezeichne die Äquivalenzklasse von (s, x) mit x/s.
Die Menge $S^{-1}M$ wird zu einem $S^{-1}A$-Modul via

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} := \frac{tx + sy}{st} \qquad\qquad \frac{a}{s} \cdot \frac{y}{t} := \frac{ay}{st}.$$

Ist $f : M \to M'$ eine A-lineare Abbildung, so ist $S^{-1}f : S^{-1}M \to S^{-1}M'$ definiert durch

$$(S^{-1}f)(\frac{x}{s}) := \frac{f(x)}{s}$$

wohldefiniert und $S^{-1}A$-linear. Ist $g : M' \to M''$ eine weitere A-lineare Abbildung, so ist $S^{-1}(g \circ f) = (S^{-1}g) \circ (S^{-1}f)$.

4.3.2. Für $x \in M$ und $s \in S$ gilt wieder genau dann $x/s = 0$, wenn ein $u \in S$ mit $ux = 0$ existiert. Ferner gilt wider die Kürzungsregel $(tx)/(ts) = x/s$ für $t \in S$.

Proposition 4.3.3. *Sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge und M ein A-Modul. Dann existiert genau ein Isomorphismus von $S^{-1}A$-Moduln $S^{-1}A \otimes_A M \to S^{-1}M$, so dass $(a/s) \otimes x \mapsto (ax)/s$ gilt. Ist $f : M \to N$ eine A-lineare Abbildung, so kommutiert*

$$\begin{tikzcd} S^{-1}A \otimes_A M \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes f"] \arrow[d, "\cong"] & S^{-1}A \otimes_A N \arrow[d, "\cong"] \\ S^{-1}M \arrow[r, "S^{-1}f"] & S^{-1}N. \end{tikzcd}$$

Beweis. Wir betrachten die A-lineare Abbildung φ im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(\frac{a}{s}, x) \arrow[r, mapsto] & \frac{ax}{s} \\
S^{-1}A \times M \arrow[r] \arrow[d] & S^{-1}M \\
S^{-1}A \otimes_A M \arrow[ur, dashed, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

Diese Abbildung ist $S^{-1}A$-linear und die einzige Abbildung mit $\varphi((a/s) \otimes x) = (ax)/s$. Offensichtlich ist φ surjektiv. Um die Injektivität zu zeigen, beweisen wir zuerst, dass sich jedes $z \in S^{-1}A \otimes_A M$ schreiben lässt als

$$z = \frac{1}{s} \otimes x$$

mit $s \in S$ und $x \in M$. Wir wissen, dass z von der Form $\sum_i (a_i/s_i) \otimes x_i$ ist für $a_i \in A$, $s_i \in S$ und $x_i \in M$. Definiere $s := \prod_i s_i$ und $t_i := \prod_{j \neq i} s_j$. Dann ist

$$z = \sum_i \frac{a_i t_i}{s} \otimes x_i = \sum_i \frac{1}{s} \otimes a_i t_i x_i = \frac{1}{s} \otimes \Big(\sum_i a_i t_i x_i \Big).$$

Sei nun $z = (1/s) \otimes x \in S^{-1}A \otimes_A M$ mit $\varphi(z) = 0$. Dann ist $0 = x/s$, also existiert ein $u \in S$ mit $ux = 0$. Dann folgt

$$0 = \frac{1}{us} \otimes ux = \frac{u}{us} \otimes x = \frac{1}{s} \otimes x = z.$$

Die Natürlichkeit des Isomorphismus rechnet man mit der expliziten Beschreibung leicht nach. $\square$

Proposition 4.3.4. *Sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge. Dann ist $S^{-1}A$ flach als A-Modul.*

Beweis. Wir verwenden die vorige Proposition. Sei $f : M \to N$ eine injektive A-lineare Abbildung. Wir zeigen, dass $S^{-1}f$ injektiv ist. Sei $x/s \in S^{-1}M$ mit $0 = (S^{-1}f)(x/s) = f(x)/s$. Dann existiert ein $u \in S$, so dass $uf(x) = 0$, also ist $ux \in \ker(f) = 0$. Damit ist $x/s = 0$. $\square$

Korollar 4.3.5. *Seien $M', M'' \subseteq M$ zwei A-Untermoduln. Wir identifizieren $S^{-1}M'$ und $S^{-1}M''$ mit $S^{-1}A$-Untermoduln von $S^{-1}M$. Dann gelten*

(1) $S^{-1}(M' + M'') = S^{-1}M' + S^{-1}M''$
(2) $S^{-1}(M' \cap M'') = S^{-1}M' \cap S^{-1}M''$
(3) $S^{-1}(M/M') \cong S^{-1}M/S^{-1}M'$

Beweis. Übung. $\square$

Lemma 4.3.6. *Seien M und N zwei A-Moduln. Dann existiert genau ein Isomorphismus*

$$S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \to S^{-1}(M \otimes_A N)$$

von $S^{-1}A$-Moduln, der $x/s \otimes y/t$ auf $(x \otimes y)/(st)$ abbildet.

Beweis. Es existieren Isomorphismen von $S^{-1}A$-Moduln

$$\begin{aligned} S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N &\cong S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}A \otimes_A N) \\ &\cong S^{-1}M \otimes_A N \\ &\cong (S^{-1}A \otimes_A M) \otimes_A N \\ &\cong S^{-1}A \otimes_A (M \otimes_A N) \\ &\cong S^{-1}(M \otimes_A N) \end{aligned}$$

(verwende dabei Proposition 4.3.3 und Lemma 3.2.5). Unter der Komposition dieser Isomorphismen werden reine Tensoren wie gewünscht abgebildet. □

4.4. **Lokal-Global-Prinzipien.**

Proposition 4.4.1. *Für einen A-Modul M sind äquivalent:*

(1) $M = 0$,
(2) $M_{\mathfrak{p}} = 0$ *für alle* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$,
(3) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ *für alle* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.

Beweis. Die Implikationen „(1) $\Rightarrow$ (2)“ und „(2) $\Rightarrow$ (3)“ sind klar. Es bleibt „(3) $\Rightarrow$ (1)“ zu zeigen. Angenommen $M \neq 0$. Dann wähle ein $x \in M \setminus \{0\}$. Es folgt $\mathrm{Ann}(x) \neq (1)$, also gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von A, das $\mathrm{Ann}(x)$ enthält. Nach Annahme ist $M_{\mathfrak{m}} = 0$, also existiert ein $s \in A \setminus \mathfrak{m}$ mit $sx = 0$. Dann ist aber $s \in \mathrm{Ann}(x) \subseteq \mathfrak{m}$. Ein Widerspruch. □

Korollar 4.4.2. *Sei $f : M \to N$ eine A-lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(1) f *ist injektiv/surjektiv,*
(2) $f_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ *ist injektiv/surjektiv für alle* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$,
(3) $f_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ *ist injektiv/surjektiv für alle* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.

Beweis. Die Implikation „(1) $\Rightarrow$ (2)“ folgt aus der Flachheit von $A_{\mathfrak{p}}$ als A-Modul. „(2) $\Rightarrow$ (3)“ ist klar. Zeige „(3) $\Rightarrow$ (1)“. Betrachte die exakte Sequenz

$$0 \to \ker(f) \to M \xrightarrow{f} N \to \mathrm{coker}(f) \to 0.$$

Da $A_{\mathfrak{m}}$ ein flacher A-Modul ist, ist auch

$$0 \to (\ker(f))_{\mathfrak{m}} \to M_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{m}}} N_{\mathfrak{m}} \to (\mathrm{coker}(f))_{\mathfrak{m}} \to 0$$

exakt, d.h. $\ker(f_{\mathfrak{m}}) = (\ker(f))_{\mathfrak{m}}$ und $\mathrm{coker}(f_{\mathfrak{m}}) = (\mathrm{coker}(f))_{\mathfrak{m}}$. Ist nun $f_{\mathfrak{m}}$ injektiv (bzw. surjektiv), so gilt also $(\ker(f))_{\mathfrak{m}} = 0$ (bzw. $(\mathrm{coker}(f))_{\mathfrak{m}} = 0$). Aus Proposition 4.4.1 folgt $\ker(f) = 0$ (bzw. $\mathrm{coker}(f) = 0$). □

Korollar 4.4.3. *Sei M ein A-Modul. Dann sind äquivalent:*

(1) M *ist ein flacher A-Modul,*
(2) $M_{\mathfrak{p}}$ *ist ein flacher A-Modul für alle* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$,
(2') $M_{\mathfrak{p}}$ *ist ein flacher $A_{\mathfrak{p}}$-Modul für alle* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$,
(3) $M_{\mathfrak{m}}$ *ist ein flacher A-Modul für alle* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$,
(3') $M_{\mathfrak{m}}$ *ist ein flacher $A_{\mathfrak{m}}$-Modul für alle* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.

Beweis. Übung. □

4.5. **Lokalisierung von Algebren.**

4.5.1. Sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus (also B eine A-Algebra). Sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge. Als A-Modul ist

$$S^{-1}B \cong S^{-1}A \otimes_A B.$$

Via dieses Isomorphismus erhält $S^{-1}B$ eine B-Algebrenstruktur. Bezeichne den Ringhomomorphismus mit $g : B \to S^{-1}B$.
Andererseits ist $f(S) \subseteq B$ eine multiplikative Teilmenge. Es gilt $g(f(S)) \subseteq (S^{-1}B)^{\times}$, denn für $s \in S$ ist $g(f(s)) = f(s)/1$ und

$$\frac{f(s)}{1} \cdot \frac{1}{s} = 1 = \frac{1_B}{1_A}$$

weil $s \cdot 1_B = f(s) \cdot 1_B = f(s)$ nach Definition. Demnach gibt es genau einen Ringhomomorphismus φ mit

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[dr, "g"'] & f(S)^{-1}B \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\
& S^{-1}B.
\end{tikzcd}$$

Es gilt $\varphi(b/f(s)) = b/s$.
Ferner bildet der Ringhomomorphismus $A \xrightarrow{f} B \to f(S)^{-1}B$ Elemente aus S auf Einheiten ab. Also erhalten wir einen eindeutigen Ringhomomorphismus $S^{-1}A \to f(S)^{-1}B$ mit $a/s \mapsto f(a)/f(s)$. Damit kommutiert

$$\begin{tikzcd}
f(S)^{-1}B \arrow[rr, "\varphi"] & & S^{-1}B \\
& S^{-1}A \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(nachrechnen!).

Lemma 4.5.2. *Der Homomorphismus $\varphi : f(S)^{-1}B \to S^{-1}B$ ist ein Isomorphismus von $S^{-1}A$-Algebren.*

Beweis. Nutze die explizite Beschreibung aus 4.5.1. Die Surjektivität ist damit offensichtlich. Zur Injektivität. Sei $x = b/f(s) \in f(S)^{-1}B$ mit $0 = \varphi(x) = b/s$. Also existiert ein $u \in S$ mit $0 = ub = f(u)b$. Also ist $b/f(s) = 0$ in $f(S)^{-1}B$. □

Proposition 4.5.3 (Vertauschung von Lokalisierung und Quotientenbildung)**.** *Sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge und $I \subseteq A$ ein Ideal mit $I \cap S = \emptyset$. Sei $\pi : A \to A/I$ die Quotientenabbildung. Dann existiert genau ein Isomorphismus $S^{-1}A/I \cdot S^{-1}A \to$*

$\pi(S)^{-1}(A/I)$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
S^{-1}A \arrow[d] \arrow[drr, dashed] & & A/I \arrow[d] \arrow[dll, dashed] \\
S^{-1}A/I \cdot S^{-1}A \arrow[rr, dashed, "\cong"] & & \pi(S)^{-1}(A/I)
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Es gilt mithilfe von 4.5.1 und 3.3.4

$$\pi(S)^{-1}(A/I) \cong S^{-1}(A/I) \cong S^{-1}A \otimes_A (A/I) \cong S^{-1}A/I \cdot S^{-1}A.$$

Diese Isomorphismen sind Isomorphismen von A-Algebren. Also kommutiert der äußere Teil des Diagramms. Die Eindeutigkeit dieses Isomorphismus folgt aus der Surjektivität der Quotientenabbildung. Die Kommutativität mit den beiden inneren Pfeilen folgt aus den universellen Eigenschaften von Lokalisierung bzw. Quotientenbildung. □

Korollar 4.5.4. *Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Dann gilt $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}\cdot A_\mathfrak{p} \cong Q(A/\mathfrak{p})$ als A-Algebren (und auch als $A_\mathfrak{p}$-, bzw. $A/\mathfrak{p}$-Algebren).*

4.5.5. Wir bezeichnen den Körper $Q(A/\mathfrak{p}) \cong A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p}$ auch mit $\kappa(\mathfrak{p})$.

Lemma 4.5.6. *Sei B eine A-Algebra und $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge. Dann sind*

$$\begin{array}{rcl}
\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid (\mathfrak{q} \cap A) \cap S = \emptyset\} & \rightleftarrows & \operatorname{Spec}(S^{-1}B) \\
\mathfrak{q} & \longmapsto & \mathfrak{q} \cdot S^{-1}B \\
\mathfrak{q}' \cap B & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{q}'
\end{array}$$

wohldefinierte, inklusionserhaltende, zueinander inverse Bijektionen.

Beweis. Wir haben Bijektionen

$$\begin{aligned}
\operatorname{Spec}(S^{-1}B) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec}(f(S)^{-1}B) \\
&\xrightarrow{\sim} \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid \mathfrak{q} \cap f(S) = \emptyset\}
\end{aligned}$$

und die Bedingung $\mathfrak{q} \cap f(S) = \emptyset$ ist äquivalent zu $(\mathfrak{q} \cap A) \cap S = \emptyset$. □

Korollar 4.5.7. *Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A und sei B eine A-Algebra. Dann sind*

$$\begin{array}{rcl}
\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}\} & \rightleftarrows & \operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})) \\
\mathfrak{q} & \longmapsto & \mathfrak{q} \cdot (B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})) \\
\mathfrak{q}'' \cap B & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{q}''
\end{array}$$

wohldefinierte, inklusionserhaltende, zueinander inverse Bijektionen.

Beweis. Wir haben Isomorphismen

$$\begin{aligned} B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) &\cong B \otimes_A (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p}) \\ &\cong (B \otimes_A A_\mathfrak{p}) \otimes_{A_\mathfrak{p}} (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p}) \\ &\cong B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cdot B_\mathfrak{p} \end{aligned}$$

und deshalb erhalten wir Bijektionen

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cdot B_\mathfrak{p}) \\ &\xrightarrow{\sim} \{\mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec}(B_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{q}' \supseteq \mathfrak{p} \cdot B_\mathfrak{p}\} \\ &= \{\mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec}(B_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{q}' \cap A \supseteq \mathfrak{p}\} \\ &\xrightarrow{\sim} \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid \mathfrak{q} \cap A \supseteq \mathfrak{p} \text{ und } \mathfrak{q} \cap A \subseteq \mathfrak{p}\}. \end{aligned}$$

□

4.5.8. Das vorige Korollar besagt, dass die Faser der Abbildung $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ im Punkt $\mathfrak{p}$ mit $\operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}))$ identifiziert werden kann.
Für Morphismen von Varietäten hat das folgende Bedeutung. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ mit Koordinatenring $B := A(X)$ und $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ mit $A := A(Y)$. Sei $f : X \to Y$ eine reguläre Abbildung. Diese entspricht einem k-Algebrenhomomorphismus $\varphi = f^* : A \to B$. Sei $y \in Y$ und sei $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_y \subseteq A$ das entsprechende maximale Ideal. Dann ist $\kappa(\mathfrak{m}) = A/\mathfrak{m}$ und $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{m}) = B/\mathfrak{m}B$. Maximale Ideale von $B/\mathfrak{m}B$ entsprechen genau maximalen Idealen $\mathfrak{n}$ von B mit $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$. Sei $x \in X$ und sei $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_x \in \operatorname{Max}(B)$. Genau dann ist $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$, wenn $f(x) = y$ ist. Also entsprechen die maximalen Ideale von $B/\mathfrak{m}B$ genau der mengentheoretischen Faser $f^{-1}(y)$.
Allerdings enthält die k-Algebra $B/\mathfrak{m}B$ noch mehr Informationen. Sei $X = Y = \mathbb{A}^1$. Sei $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ gegeben durch $f(x) = x^2$. Der entsprechende Ringhomomorphismus ist gegeben durch $\varphi : A = \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}[s] = B$ mit $\varphi(t) = s^2$. Betrachte die Punkte $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$, sowie ihre maximalen Ideale $\mathfrak{m}_i = (t - y_i)$. Es gilt

$$B/\mathfrak{m}_i B = \mathbb{C}[s] \otimes_{\mathbb{C}[t]} \mathbb{C}[t]/(t - y_i) \cong \mathbb{C}[s]/(s^2 - y_i) = \begin{cases} \mathbb{C}[s]/(s^2) & i = 0 \\ \mathbb{C}[s]/(s^2 - 1) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} & i = 1 \end{cases}$$

Im Fall $i = 1$ entsprechen die maximalen Ideale $(s - 1)$ und $(s + 1)$ von $B/\mathfrak{m}_i B$ genau den beiden Urbildern 1 und -1.
Im Fall $i = 0$ gibt es nur ein maximales Ideal (s), es entspricht dem einzigen Urbild 0. Allerdings kodiert die Algebra $\mathbb{C}[s]/(s^2)$, dass es sich hierbei auch um einen kritischen Punkt von f handelt.

4.6. **Induktive Limiten.**

Definition 4.6.1. Eine *gerichtete Menge* ist eine Menge I zusammen mit einer binären Relation $\leq$ auf I, die reflexiv und transitiv ist und so dass für alle $i, j \in I$ ein $k \in I$ existiert mit $i \leq k$ und $j \leq k$.

Definition 4.6.2. Sei $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge. Ein *induktives System* indiziert über I von A-Moduln besteht aus einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von A-Moduln, sowie einer Familie

$(\varphi_{ij})_{i\leq j}$ von A-linearen Abbildungen

$$\varphi_{ij} : M_i \to M_j$$

für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$.

Definition 4.6.3. Sei $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge und sei $((M_i)_i, (\varphi_{ij})_{i\leq j})$ ein induktives System von A-Moduln. Ein *induktiver Limes* dieses induktiven Systems ist ein Modul M zusammen mit A-linearen Abbildungen $\varphi_i : M_i \to M$, so dass folgende universelle Eigenschaft gilt:

- Für alle $i \leq j$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\varphi_{ij}"'] & M \\ M_j \arrow[ur, "\varphi_j"'] & \end{tikzcd}$$

- Ist N ein A-Modul und sind $\psi_i : M_i \to N$ A-lineare Abbildungen, so dass $\psi_i = \psi_j\varphi_{ij}$ gilt für alle $i \leq j$, so existiert genau eine A-lineare Abbildung $\mu : M \to N$, so dass

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\psi_i"] & M \arrow[d, dashed, "\mu"] \\ & N \end{tikzcd}$$

  für jedes $i \in I$ kommutiert.

Wir bezeichnen den induktiven Limes, im Falle seiner Existenz, mit $\varinjlim_{i\in I} M_i$.

Bemerkung 4.6.4. Man kann den Begriffe induktives System und induktiver Limes über jeder Kategorie definieren (allerdings müssen diese Limiten nicht immer existieren). Insbesondere machen der Begriff induktiver Limes in der Kategorie der Ringe, bzw. A-Algebren Sinn.

4.6.5. Falls I ein größtes Element ∞ besitzt, so ist $\varinjlim_{i\in I} M_i \cong M_\infty$.

Proposition 4.6.6. *Jedes induktive System $((M_i)_i, (\varphi_{ij})_{i\leq j})$ von A-Moduln besitzt einen induktiven Limes. Der induktive Limes ist eindeutig bestimmt bis auf eindeutige Isomorphie.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt mit dem üblichen Beweis für die Eindeutigkeit universeller Konstruktionen.
Zur Existenz. Definiere auf der (mengentheoretischen) disjunkten Vereinigung $\bigsqcup_{i\in I} M_i$ folgende Äquivalenzrelation: für $x \in M_i$ und $y \in M_j$ sei $x \sim y$, falls es ein $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$ so gibt, dass $\varphi_{ik}(x) = \varphi_{jk}(y)$. (Für die Transitivität brauchen wir, dass die Menge gerichtet ist.) Sei

$$M := \Big(\bigsqcup_{i\in I} M_i\Big)/\sim .$$

Darauf definieren wir eine Addition $+ : M \times M \to M$, indem wir für $s, t \in M$ Repräsentanten $x \in M_i$ und $y \in M_j$ wählen. Sei nun $k \in I$, so dass $i \leq k$ und $j \leq k$. Dann definieren wir $s + t$ als die Äquivalenzklasse von $\varphi_{ik}(x) + \varphi_{jk}(y)$. Diese Definition ist

unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. Die skalare Multiplikation wird ebenfalls repräsentantenweise definiert.
Die Abbildung $\varphi_i : M_i \to \coprod_{j\in I} M_j \to M$ is eine A-lineare Abbildung. Da für jedes $x \in M_i$ insbesondere $x \sim \varphi_{ij}(x)$ gilt, folgt $\varphi_i = \varphi_j \circ \varphi_{ij}$, wann immer $i \leq j$.
Nun sei N ein A-Modul und $(\psi_i)_i$ eine Familie von A-linearen Abbildungen $\psi_i : M_i \to N$, so dass $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$. Sei $s \in M$. Wir wählen einen Repräsentanten $x \in M_i$ von s (das heißt $\varphi_i(x) = s$) und definieren $\mu(s) := \psi_i(x)$. Ist $x \sim y$, also $\varphi_{ik}(x) = \varphi_{jk}(y)$ für ein $k \in I$ mit $i, j \leq k$, so gilt

$$\psi_i(x) = \psi_k(\varphi_{ik}(x)) = \psi_k(\varphi_{jk}(y)) = \psi_j(y).$$

Also erhalten wir auf diese Art eine wohldefinierte Abbildung $\mu : M \to N$, so dass $\mu \circ \varphi_i = \psi_i$. Man prüft leicht nach, dass μ A-linear ist.
Sei schließlich $\mu' : M \to N$ eine weitere A-lineare Abbildung, so dass $\mu' \circ \varphi_i = \psi_i$. Da jedes $s \in M$ einen Repräsentanten $x \in M_i$ hat, also $s = \varphi_i(x)$ gilt, folgt daraus $\mu'(s) = \psi_i(x) = \mu(s)$. $\square$

4.6.7. Sei $((B_i)_{i\in I}, (\varphi_{ij})_{i\leq j})$ ein induktives System von A-Algebren, d.h. alle B_i sind A-Algebren und alle φ_{ij} sind A-Algebrenhomomorphismen. Dann erhalten wir insbesondere ein induktives System von A-Moduln. Betrachte den induktiven Limes

$$B := \varinjlim_{i\in I} B_i$$

dieses induktiven Systems von A-Moduln. Darauf können wir, wieder repräsentantenweise, eine Multiplikation definieren. Diese Multiplikation ist A-bilinear und macht B zu einem Ring. Also ist B eine A-Algebra. Ferner werden damit die Abbildungen $\varphi_i : B_i \to B$ zu A-Algebrenhomomorphismen. Ist C eine weitere A-Algebra und sind $\psi_i : B_i \to C$ Homomorphismen von A-Algebren, so dass $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$ (alle $i \leq j$), so ist die induzierte A-lineare Abbildung $\mu : B \to C$ auch ein Ringhomomorphismus. Damit ist B ein induktiver Limes in der Kategorie der A-Algebren.

4.6.8. Die Konstruktion des direkten Limes $\varinjlim_{i\in I} B_i$ (es ist hier unerheblich, ob es ein direkter Limes von A-Algebren oder von A-Moduln ist) liefert, dass es für jedes $s \in \varinjlim_{i\in I} B_i$ ein $j \in I$ und ein $b \in B_j$ mit

$$s = \varphi_j(b)$$

gibt.
Ferner liefert die Konstruktion, dass für $b \in B_j$ genau dann $\varphi_j(b) = 0$ in $\varinjlim_{i\in I} B_i$ ist, wenn es ein $k \geq j$ gibt mit $\varphi_{jk}(b) = 0$ in B_k.

Beispiel 4.6.9. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge in der euklidischen Topologie. Sei $\mathscr{O}_{\mathbb{C}}(U)$ der Ring der holomorphen Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$. Ist $U \subseteq V \subseteq \mathbb{C}$ eine weitere offene Teilmenge, so erhalten wir einen $\mathbb{C}$-Algebrenhomomorphismus $r_{V,U} : \mathscr{O}_{\mathbb{C}}(V) \to \mathscr{O}_{\mathbb{C}}(U)$ durch $f \mapsto f|_U$.
Nun sei $x \in \mathbb{C}$ fest und betrachte die Menge $\mathfrak{U}_x$ aller offenen Umgebungen von x. Darauf definieren wir die Ordnung $V \leq U$ durch $V \supseteq U$. Damit wird $\mathfrak{U}_x$ zu einer gerichteten Menge. Es gilt

$$\varinjlim_{U\in\mathfrak{U}_x} \mathscr{O}_{\mathbb{C}}(U) = \mathscr{O}_{\mathbb{C},x},$$

der Ring der Keime holomorpher Funktionen an x. Das liegt daran, dass ein Keim per Definition eine Äquivalenzklasse in $\bigsqcup_{U \in \mathfrak{U}_x} \mathscr{O}_{\mathbb{C}}(U)$ ist; die Addition und Multiplikation stimmen ebenfalls überein.

4.6.10. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Definiere auf der Menge $A \setminus \mathfrak{p}$ folgende Relation. Wir schreiben $f \leq g$, wenn f ein Teiler von g ist. In diesem Fall ist $g = hf$ für ein $h \in A$. Dann ist $(hf)/1 \in A[g^{-1}]^{\times}$, also auch $f/1 \in A[g^{-1}]^{\times}$. Das liefert einen A-Algebrenhomomorphismus $\varphi_{f,g} : A[f^{-1}] \to A[g^{-1}]$. Es gilt

$$\varphi_{f,g}\left(\frac{a}{f^n}\right) = \frac{h^n a}{(hf)^n}$$

für $a \in A$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Somit entsteht ein induktives System. Wir können daher den Limes

$$\varinjlim_{f \in A \setminus \mathfrak{p}} A[f^{-1}]$$

bilden. Für $g \in A \setminus \mathfrak{p}$ sei $\varphi_g : A[g^{-1}] \to \varinjlim_{f \in A \setminus \mathfrak{p}} A[f^{-1}]$ der natürliche A-Algebrenhomomorphismus.

Proposition 4.6.11. *Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Dann gilt $\varinjlim_{f \in A \setminus \mathfrak{p}} A[f^{-1}] \cong A_{\mathfrak{p}}$ als A-Algebren.*

Beweis. Betrachte die Abbildung $A \to A_{\mathfrak{p}}$. Unter dieser Abbildung wird $f \in A \setminus \mathfrak{p}$ auf eine Einheit abgebildet. Demnach erhalten wir einen A-Algebrenhomomorphismus $\psi_f : A[f^{-1}] \to A_{\mathfrak{p}}$. Es gilt $\psi_f(a/(f^n)) = a/(f^n)$. Die universelle Eigenschaft des direkten Limes liefert einen eindeutigen A-Algebrenhomomorphismus $\psi : \varinjlim_{f \in A \setminus \mathfrak{p}} A[f^{-1}] \to A_{\mathfrak{p}}$, so dass

$$\begin{tikzcd}
A[g^{-1}] \arrow[r, "\varphi_g"] \arrow[dr, "\psi_g"'] & \varinjlim_{f \in A \setminus \mathfrak{p}} A[f^{-1}] \arrow[d, dashed, "\psi"] \\
& A_{\mathfrak{p}}
\end{tikzcd}$$

kommutiert für alle $g \in A \setminus \mathfrak{p}$. Zeige, dass ψ bijektiv ist. Zur Injektivität. Sei $x \in \varinjlim_{f \in A \setminus \mathfrak{p}} A[f^{-1}]$, so dass $\psi(x) = 0$. Es existieren $g \in A \setminus \mathfrak{p}$, $a \in A$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, so dass

$$x = \varphi_g\left(\frac{a}{g^n}\right).$$

Dann gilt $0 = \psi_g(a/(g^n)) = a/(g^n)$ in $A_{\mathfrak{p}}$. Also gibt es ein $h \in A \setminus \mathfrak{p}$ mit $ha = 0$. Dann gilt auch $gh^{n+1}a = 0$, also ist

$$\varphi_{g,gh}\left(\frac{a}{g^n}\right) = \frac{h^n a}{(gh)^n} = 0$$

in $A[(gh)^{-1}]$. Damit ist

$$0 = \varphi_{gh}\left(\frac{h^n a}{(gh)^n}\right) = \varphi_{gh}\left(\varphi_{g,gh}\left(\frac{a}{g^n}\right)\right) = \varphi_g\left(\frac{a}{g^n}\right) = x.$$

Nun zur Surjektivität. Sei $y \in A_{\mathfrak{p}}$. Dann gibt es $a \in A$ und $g \in A \setminus \mathfrak{p}$ mit $y = a/g$. Dann ist $y = \psi_g(a/g) = \psi(\varphi_g(a/g))$. $\square$

4.6.12. Zur geometrischen Bedeutung der Lokalisierung an einem Primideal.
Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät. Sei $A = A(X)$ und sei $x \in X$. Dem Punkt entspricht ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subseteq A$. Analog zum Ring der Keime holomorpher Funktionen definiert man den Ring der Keime regulärer Funktionen an x als

$$\mathscr{O}_{X,x} := \varinjlim_{U \in \mathfrak{U}_x} \mathscr{O}_X(U).$$

Da es für jede offene Umgebung U von x ein $f \in A \setminus \mathfrak{m}$ mit $D(f) \subseteq U$ gibt, folgt

$$\mathscr{O}_{X,x} \cong \varinjlim_{f \in A \setminus \mathfrak{m}} \mathscr{O}_X(D(f)) \cong \varinjlim_{f \in A \setminus \mathfrak{m}} A[f^{-1}] \cong A_{\mathfrak{m}}$$

mit Proposition 4.6.11.
Für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von A gibt es auch eine geometrische Beschreibung der Lokalisierung. Sei $Z := V(\mathfrak{p})$, eine irreduzible abgeschlossene nicht-leere Teilmenge von X. Es gilt

$$A_{\mathfrak{p}} \cong \varinjlim_{f \in A \setminus \mathfrak{p}} A[f^{-1}].$$

Für $f \in A$ gilt genau dann $f \in A \setminus \mathfrak{p}$, wenn $D(f) \cap Z \neq \emptyset$. Damit ist

$$A_{\mathfrak{p}} \cong \varinjlim_{U \cap Z \neq \emptyset} \mathscr{O}_X(U)$$

(da Z irreduzibel ist, ist das ein induktives System). Diesen Ring bezeichnen wir mit $\mathscr{O}_{X,\eta_Z}$. Er besteht aus Äquivalenzklassen $[a, U]$ von Quotienten $a = (g|_U)/(h|_U)$ von Funktionen $g, h \in A$ und offenen Teilmengen $U \subseteq X$ mit $U \cap Z \neq \emptyset$.
Ist X selbst irreduzibel, so ist $\mathscr{O}_{X,\eta_X} = Q(A)$. Dieser Körper heißt der Funktionenkörper von X.

5. Ganze Ringerweiterungen

Im gesamten Kapitel sei A ein Ring und B eine A-Algebra.

5.1. **Ganzheit.**

Definition 5.1.1. Ein Polynom $p \in A[t]$ der Form $p(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n$ nennt man *normiert*.

Definition 5.1.2.
(1) Ein Element $b \in B$ heißt *ganz* über A, wenn es ein normiertes Polynom $p \in A[t]$ gibt mit $p(b) = 0$. Eine Gleichung der Form $p(b) = 0$ nennen wir eine *ganze Gleichung* für b.
(2) Die Menge $\overline{A} := \{b \in B \mid b \text{ ganz über } A\}$ heißt der *ganze Abschluss* von A in B.
(3) B heißt *ganz* über A, wenn $\overline{A} = B$ ist, sprich wenn jedes $b \in B$ ganz über A ist.
(4) A heißt *ganz abgeschlossen* in B, wenn $\overline{A} = \operatorname{im}(A \to B)$ ist.
(5) Ein Integritätsbereich A heißt *normal*, wenn A ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper $Q(A)$ ist.

Definition 5.1.3. Wir nennen B eine *Ringerweiterung* von A, wenn $A \to B$ injektiv ist.

Bemerkung 5.1.4. Oft findet man den Begriff Ganzheit nur für Ringerweiterungen definiert. Gemäß unserer Definition sind surjektive Ringhomomorphismen immer ganz. Außerdem gilt für einen beliebigen Ringhomomorphismus $A \to B$ mit $C := \operatorname{im}(A \to B)$, dass $C \subseteq B$ eine Ringerweiterung ist und $b \in B$ genau dann ganz über A ist, wenn b ganz über C ist. (Vergleiche Lemma 5.1.9.)

Beispiel 5.1.5. Sei $A = \mathbb{Z}$ und $B = \mathbb{Q}$. Sei $b = r/s$ mit $r, s \in \mathbb{Z}$ teilerfremd. Angenommen b ist ganz über $\mathbb{Z}$. Dann gibt es eine Relation

$$\left(\frac{r}{s}\right)^n + a_1 \left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

oder äquivalent

$$r^n + a_1 r^{n-1} s + \ldots + a_n s^n = 0$$

Damit ist s ein Teiler von r^n und deshalb $s = \pm 1$ wegen der Teilerfremdheit. So folgt $b \in \mathbb{Z}$. Wir haben gezeigt, dass $\mathbb{Z}$ normal ist.

5.1.6. Ist $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, so ist offensichtlich $b \in L$ genau dann ganz über K, wenn b algebraisch über K ist.

Lemma 5.1.7 (Division mit Rest durch normierte Polynome)**.** *Sei $p \in A[t]$ ein normiertes Polynom. Für jedes $q \in A[t]$ existieren eindeutig bestimmte $c, r \in A[t]$ mit $q = cp + r$ und* $\deg(r) < \deg(p)$.

Beweis. Ist $\deg(q) < \deg(p)$, so ist $c = 0$ und $r = q$ geeignet. Ist $\deg(q) \geq \deg(p)$ und $a \in A$ der Leitkoeffizient von q, so ist $\deg(q - ap) < \deg(q)$. Wir erhalten die Behauptung also induktiv. □

Lemma 5.1.8. *Sei $b \in B$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*
(1) b ist ganz über A.
(2) $A[b]$ ist eine endliche A-Algebra

(3) Es gibt eine endliche A-Unteralgebra $C \subseteq B$ mit $b \in C$.

Beweis. Zu „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Sei $p \in A[t]$ normiert mit $p(b) = 0$. Sei $n := \deg p$ der Grad von p. Da p normiert ist gilt nach Lemma 5.1.7

$$\begin{aligned} A[b] &= \{q(b) \mid q \in A[t]\} \\ &= \{r(b) \mid r \in A[t],\ \deg(r) < n\} \\ &= \langle 1, b, b^2, \ldots, b^{n-1} \rangle_A \end{aligned}$$

Zu „(2) $\Rightarrow$ (3)“: Klar.
Zu „(3) $\Rightarrow$ (1)“: Betrachte den A-linearen Endomorphismus $\psi : C \to C$ gegeben durch $\psi(c) = bc$. Da C ein endlich erzeugter A-Modul ist, existieren nach dem Determinantentrick 2.9.3 (mit $I = A$) Elemente $a_1, \ldots, a_n \in A$ mit

$$\psi^n + a_1 \psi^{n-1} + \ldots + a_n \operatorname{id}_C = 0.$$

Diesen Endomorphismus werten wir an $1 \in C$ aus und erhalten

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

also eine ganze Gleichung für b. □

Lemma 5.1.9. *Sei C eine B-Algebra.*

(1) Falls C eine endliche A-Algebra ist, so ist C eine endliche B-Algebra.
(2) Ist $c \in C$ ganz über A, so ist c ganz über B.
(3) Falls C eine ganze A-Algebra ist, so ist C eine ganze B-Algebra.

Beweis.

(1) Klar.
(2) Sei $f : A[t] \to B[t]$ der durch $A \to B$ induzierte A-Algebrenhomomorphismus. Beachte, dass für ein normiertes Polynom $p \in A[t]$ auch $f(p)$ normiert ist. Damit folgt leicht die Behauptung.
(3) Folgt aus (2). □

Lemma 5.1.10. *Sei C eine B-Algebra.*

(1) Falls B eine endliche A-Algebra ist und C eine endliche B-Algebra, so ist C eine endliche A-Algebra.
(2) Falls B eine ganze A-Algebra ist und C eine ganze B-Algebra, so ist C eine ganze A-Algebra.

Beweis.

(1) Folgt sofort aus 3.1.13.
(2) Sei $c \in C$. Dann existieren $b_1, \ldots, b_n$ mit $c^n + b_1 c^{n-1} + \ldots + b_n = 0$ Betrachte die A-Unteralgebra $A[b_1, \ldots, b_n] \subseteq B$. Darüber ist c ganz. Also ist $A[b_1, \ldots, b_n][c]$ eine endliche $A[b_1, \ldots, b_n]$-Algebra. Da alle b_i ganz über A sind, ist b_i auch ganz über $A[b_1, \ldots, b_{i-1}]$ (mit Lemma 5.1.9). So sehen wir induktiv mit (1), dass $A[b_1, \ldots, b_n]$ eine endliche A-Algebra ist. Demnach sind

$$A \to A[b_1, \ldots, b_n] \to A[b_1, \ldots, b_n][c]$$

beides endliche A-Algebren. Es folgt mit (1), dass $A[b_1, \dots, b_n][c]$ eine endliche A-Unteralgebra von C ist, die c enthält. Aus Lemma 5.1.8 folgt, dass c ganz über A ist. $\square$

Proposition 5.1.11. *Für eine A-Algebra B sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) B ist eine endlich erzeugte ganze A-Algebra.
(2) Es gibt $b_1, \dots, b_n \in B$ ganz über A mit $B = A[b_1, \dots, b_n]$.
(3) B ist eine endliche A-Algebra.

Beweis. Zu „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Klar.
Zu „(2) $\Rightarrow$ (3)“: Insbesondere ist b_i ganz über $A[b_1, \dots, b_{i-1}]$ (Lemma 5.1.9). Somit sind nach Lemma 5.1.8 alle folgenden Ringhomomorphismen ganz:

$$A \to A[b_1] \subseteq A[b_1, b_2] \subseteq \dots \subseteq A[b_1, \dots, b_n] = B$$

Nach der Transitivität von Ganzheit (Lemma 5.1.10(2)) ist dann auch $A \to B$ ganz.
Zu „(3) $\Rightarrow$ (1)“: Folgt aus Lemma 5.1.8. $\square$

Korollar 5.1.12. *Der ganze Abschluss $\overline{A}$ von A in B ist eine A-Unteralgebra von B.*

Beweis. Seien $b, b' \in B$ ganz über A. Dann ist $A[b, b']$ eine endliche A-Algebra nach Proposition 5.1.11. Da $b + b'$ und bb' in $A[b, b']$ enthalten sind, sind auch $b + b'$ und bb' ganz über A. $\square$

Lemma 5.1.13. *Sei B eine ganze A-Algebra.*

(1) Ist $J \subseteq B$ ein Ideal, so ist $A/(J \cap A) \to B/J$ ganz.
(2) Ist $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge, so ist $S^{-1}A \to S^{-1}B$ ganz.

Beweis.

(1) Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\text{ganz}"] \arrow[d] & B \arrow[d, "\text{ganz}"] \\ A/(J \cap A) \arrow[r] & B/J \end{tikzcd}$$

Dann ist auch $A \to B/J$ ganz nach Lemma 5.1.10. Aus Lemma 5.1.9 folgt, dass $A/(J \cap A) \to B/J$ ganz ist.

(2) Sei $c = b/s \in S^{-1}B$. Für b existieren $a_1, \dots, a_n \in A$, so dass $b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n = 0$ ist. Dann ist aber auch

$$0 = \left(\frac{b}{s}\right)^n + \frac{a_1}{s}\left(\frac{b}{s}\right)^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{s^n}$$

und das ist eine ganze Gleichung für b/s über $S^{-1}A$. $\square$

5.2. **Going-Up.**

Definition 5.2.1. Sei B eine A-Algebra.

(1) Wir sagen $A \to B$ *erfüllt die Lying-Over-Eigenschaft*, wenn es für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ ein $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ mit $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ gibt.

(2) Wir sagen $A \to B$ *erfüllt die Going-Up-Eigenschaft*, wenn es für je zwei Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Spec}(A)$ mit $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$ und jedes Primideal $\mathfrak{q}_1 \in \operatorname{Spec}(B)$ mit $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$ ein $\mathfrak{q}_2 \in \operatorname{Spec}(B)$ existiert mit $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$ und $\mathfrak{q}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$. Wir veranschaulichen das in folgendem Diagramm:

$$\begin{tikzcd} B & \mathfrak{q}_1 \arrow[d, mapsto] & \subseteq & \exists \mathfrak{q}_2 \arrow[d, mapsto] \\ A \arrow[u] & \mathfrak{p}_1 & \subseteq & \mathfrak{p}_2 \end{tikzcd}$$

Lemma 5.2.2. *Sei $A \hookrightarrow B$ eine ganze Ringerweiterung und sei B ein Integritätsbereich. Genau dann ist B ein Körper, wenn A ein Körper ist.*

Beweis. Wir nehmen ohne Einschränkung an $A \subseteq B$ sei ein Unterring.
Zu „$\Rightarrow$“: Sei $a \in A \setminus \{0\}$. Dann existiert ein $b \in B$ mit $ab = 1$. Da b ganz über A ist, existieren $a_1, \ldots, a_n \in A$ mit

$$b^n = \sum_{i=1}^{n} a_i b^{n-i}$$

Dann ist

$$b = a^{n-1} b^n = \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{a^{n-1} b^{n-i}}_{=a^{i-1}} \in A$$

und damit $a \in A^\times$.
Zu „$\Leftarrow$“: Sei $b \in B \setminus \{0\}$. Wegen der Ganzheit existiert ein normiertes Polynom $p \in A[t]$ mit $p(b) = 0$. Wähle p so dass $\deg(p)$ minimal ist. Schreibe $p(t) = tq(t) + a$ mit $a \in A$ und $q \in A[t]$. Da q normiert ist und $\deg(q) < \deg(p)$, folgt $q(b) \neq 0$. Daher ist

$$a = -b \cdot q(b) \neq 0$$

denn B ist ein Integritätsbereich. Somit ist $b \cdot q(b) \in A^\times \subseteq B^\times$ und daher auch $b \in B^\times$. □

Beispiel 5.2.3. Sei k ein Körper. Die Ringerweiterung $k \subseteq k[t]/(t^2)$ ist ganz, aber $k[t]/(t^2)$ ist kein Integritätsbereich.

Korollar 5.2.4. *Sei B eine ganze A-Algebra und sei $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$. Ganau dann ist $\mathfrak{q}$ ein maximales Ideal von B, wenn $\mathfrak{q} \cap A$ ein maximales Ideal von A ist.*

Beweis. Nach Lemma 5.1.13 ist $A/(\mathfrak{q} \cap A) \to B/\mathfrak{q}$ ganz. Da $\mathfrak{q} \cap A = \ker(A \to B/\mathfrak{q})$ ist, ist $A/(\mathfrak{q} \cap A) \to B/\mathfrak{q}$ außerdem injektiv. Dann liefert Lemma 5.2.2 die Behauptung. □

Proposition 5.2.5. *Sei B eine ganze A-Algebra. Seien $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \operatorname{Spec}(B)$ mit $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$. Falls $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{q}_2 \cap A$, so folgt $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{p} := \mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{q}_2 \cap A$ und betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\text{ganz}"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & B_{\mathfrak{p}} \end{tikzcd}$$

Nach Lemma 5.1.13 ist $B_\mathfrak{p}$ eine ganze $A_\mathfrak{p}$-Algebra. Definiere $\mathfrak{q}_i' := \mathfrak{q}_i \cdot B_\mathfrak{p}$ für $i = 1, 2$. Es gilt $\mathfrak{q}_i \cap f(A \setminus \mathfrak{p}) = \emptyset$. (Angenommen $b \in \mathfrak{q}_i \cap f(A \setminus \mathfrak{p})$, so gäbe es ein $a \in A \setminus \mathfrak{p}$ mit $b = f(a)$. Dann wäre $a \in \mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}$.) Da $B_\mathfrak{p} = f(A \setminus \mathfrak{p})^{-1}B$ ist, folgt aus Lemma 4.2.1, dass $\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2' \in \operatorname{Spec}(B_\mathfrak{p})$. Es gilt

$$(\mathfrak{q}_i' \cap A_\mathfrak{p}) \cap A = (\mathfrak{q}_i' \cap B) \cap A = \mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}$$

also folgt aus Lemma 4.2.1 $\mathfrak{q}_i' \cap A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p} \in \operatorname{Max}(A_\mathfrak{p})$. Aus Korollar 5.2.4 schließen wir, dass $\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2' \in \operatorname{Max}(B_\mathfrak{p})$. Da aber $\mathfrak{q}_1' \subseteq \mathfrak{q}_2'$ ist, muss $\mathfrak{q}_1' = \mathfrak{q}_2'$ gelten. Wiederum unter Ausnutzung der Idealkorrespondenz (Lemma 4.2.1) folgern wir

$$\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_1' \cap B = \mathfrak{q}_2' \cap B = \mathfrak{q}_2.$$

□

Satz 5.2.6 (Lying-Over)**.** *Sei $A \hookrightarrow B$ eine ganze Ringerweiterung. Dann erfüllt sie die Lying-Over-Eigenschaft 5.2.1(1).*

Beweis. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Sei $f : A \to B$. Betrachte wieder

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "f", "\text{ganz}"'] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_\mathfrak{p} \arrow[r] & B_\mathfrak{p} \end{tikzcd}$$

Da $0 \notin f(A \setminus \mathfrak{p})$ (wegen der Injektivität von f), ist $B_\mathfrak{p} \neq 0$. Also gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{n}$ von $B_\mathfrak{p}$. Da $B_\mathfrak{p}$ eine ganze $A_\mathfrak{p}$-Algebra ist, ist $\mathfrak{n} \cap A_\mathfrak{p} \in \operatorname{Max}(A_\mathfrak{p})$ wegen Korollar 5.2.4. Aber $A_\mathfrak{p}$ ist ein lokaler Ring, somit ist $\mathfrak{n} \cap A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p}$. Wir definieren $\mathfrak{q} := \mathfrak{n} \cap B$. Dann ist

$$\mathfrak{q} \cap A = (\mathfrak{n} \cap B) \cap A = (\mathfrak{n} \cap A_\mathfrak{p}) \cap A = (\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p}) \cap A = \mathfrak{p}.$$

□

Satz 5.2.7 (Going-Up)**.** *Sei B eine ganze A-Algebra. Dann erfüllt $A \to B$ die Going-Up-Eigenschaft 5.2.1(2).*

Beweis. Seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Spec}(A)$ mit $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{q}_1 \in \operatorname{Spec}(B)$ mit $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$. Betrachte

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\text{ganz}"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A/\mathfrak{p}_1 \arrow[r] & B/\mathfrak{q}_1 \end{tikzcd}$$

Wir erhalten eine ganze Ringerweiterung $A/\mathfrak{p}_1 \hookrightarrow B/\mathfrak{q}_1$ (Lemma 5.1.13). Darauf wenden wir Lying-Over an. Für das Primideal $\mathfrak{p}_2 \cdot A/\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1$ existiert ein Primideal $\mathfrak{q}_2' \in \operatorname{Spec}(B/\mathfrak{q}_1)$, so dass $\mathfrak{q}_2' \cap (A/\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1$. Sei

$$\mathfrak{q}_2 := \mathfrak{q}_2' \cap B = (B \to B/\mathfrak{q}_1)^{-1}(\mathfrak{q}_2').$$

Dann ist $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$ und außerdem gilt

$$\mathfrak{q}_2 \cap A = (\mathfrak{q}_2' \cap B) \cap A = (\mathfrak{q}_2' \cap A/\mathfrak{p}_1) \cap A = (\mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1) \cap A = \mathfrak{p}_2$$

□

5.3. **Going-Down.**

Definition 5.3.1. Sei B eine A-Algebra. Wir sagen $A \to B$ *erfüllt die Going-Down-Eigenschaft*, wenn es für je zwei Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Spec}(A)$ mit $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$ und jedes Primideal $\mathfrak{q}_2 \in \operatorname{Spec}(B)$ mit $\mathfrak{q}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$ ein $\mathfrak{q}_1 \in \operatorname{Spec}(B)$ existiert mit $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$ und $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$. Wir veranschaulichen das in folgendem Diagramm:

$$\begin{tikzcd} B & \exists \mathfrak{q}_1 \arrow[d, mapsto] & \subseteq & \mathfrak{q}_2 \arrow[d, mapsto] \\ A \arrow[u] & \mathfrak{p}_1 & \subseteq & \mathfrak{p}_2 \end{tikzcd}$$

Definition 5.3.2. Sei I ein Ideal von A. Ein Element $b \in B$ heißt *ganz* über I, wenn es ein Polynom $p \in A[t]$ der Form $p(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n$ mit $a_1, \ldots, a_n \in I$ gibt mit $p(b) = 0$.

Lemma 5.3.3. *Sei $I \subseteq A$ ein Ideal und sei $b \in B$. Sei $\overline{A}$ der ganze Abschluss von A in B. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) b ist ganz über I.
(2) $b \in \sqrt{I \cdot \overline{A}}$.

Beweis. Zu „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Sei $b \in B$ ganz über I. Insbesondere ist $b \in \overline{A}$. Es gibt $a_1, \ldots, a_n \in I$ mit $b^n = a_1 b^{n-1} + \ldots + a_n \in I \cdot \overline{A}$. Dann ist $b \in \sqrt{I \cdot \overline{A}}$.
Zu „(2) $\Rightarrow$ (1)“: Da $b \in \sqrt{I \cdot \overline{A}}$ existiert ein $n > 0$ mit $b^n \in I \cdot \overline{A}$. Also gibt es $a_1, \ldots, a_r \in I$ und $c_1, \ldots, c_r \in \overline{A}$ mit

$$b^n = a_1 c_1 + \ldots + a_r c_r.$$

Da $c_1, \ldots, c_r$ ganz über A sind ist $C := A[c_1, \ldots, c_r]$ eine endliche A-Algebra (Lemma 5.1.8), sprich ein endlich erzeugter A-Modul. Wir betrachten den A-linearen Endomorphismus $\psi : C \to C$ definiert durch $\psi(c) = b^n c$. Es gilt dann $\operatorname{im}(\psi) = b^n C \subseteq IC$. Nach Lemma 2.9.3 existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in I$, so dass

$$\psi^m + \alpha_1 \psi^{m-1} + \ldots + \alpha_m = 0.$$

Anwenden auf $1 \in C$ liefert

$$b^{mn} + \alpha_1 b^{(m-1)n} + \ldots + \alpha_m = 0$$

was eine ganze Gleichung für b mit Koeffizienten in I ist. $\square$

Lemma 5.3.4. *Seien*

- *$A \subseteq B$ eine Ringerweiterung,*
- *B ein Integritätsbereich,*
- *A normal,*
- *$K := Q(A)$ der Quotientenkörper,*
- *$I \subseteq A$ ein Ideal,*
- *$b \in B$ ganz über I.*

Ferner sei $m_b(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n \in K[t]$ das Minimalpolynom von b über K. Dann gilt $a_1, \ldots, a_n \in \sqrt{I}$.

Beweis. Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung über der m_b zerfällt in $m_b(t) = (t-y_1)\dots(t-y_n)$. Da b ganz über I ist, existiert ein normiertes Polynom $f \in A[t]$ mit Koeffizienten in I (außer dem Leitkoeffizienten), so dass $f(b) = 0$. Dann ist f ein Vielfaches von m_b und damit ist $f(y_i) = 0$ für $i = 1, \dots, n$. Also sind auch $y_1, \dots, y_n$ ganz über I. Sei $\overline{A}$ der ganze Abschluss von A in L. Nach Lemma 5.3.3 (mit „$B = L$") sind $y_1, \dots, y_n \in \sqrt{I \cdot \overline{A}}$. Damit ist

$$a_k = (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} y_{i_1} \dots y_{i_k} \in \sqrt{I \cdot \overline{A}}$$

also sind $a_1, \dots, a_n \in K$ ganz über I. Da A normal ist, stimmt A mit seinem ganzen Abschluss in K überein. Nun wenden wir noch einmal Lemma 5.3.3 an (dieses Mal mit „$B = K$"). Es folgt $a_1, \dots, a_n \in \sqrt{I}$. $\square$

Lemma 5.3.5. *Sei B eine A-Algebra und sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Genau dann existiert ein $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ mit $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$, wenn $(\mathfrak{p} \cdot B) \cap A = \mathfrak{p}$ gilt.*

Beweis. Übung. $\square$

Satz 5.3.6 (Going down)**.** *Sei $A \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung, B ein Integritätsbereich und A normal. Dann erfüllt $A \subseteq B$ die Going-Down-Eigenschaft 5.3.1.*

Beweis. Seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Spec}(A)$ mit $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{q}_2 \in \operatorname{Spec}(B)$ mit $\mathfrak{q}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$. Angenommen, es gilt die Gleichung

$$(*) \qquad (\mathfrak{p}_1 \cdot B_{\mathfrak{q}_2}) \cap A = \mathfrak{p}_1.$$

Nach Lemma 5.3.5 existiert dann $\mathfrak{q}_1' \in \operatorname{Spec}(B_{\mathfrak{q}_2})$ mit $\mathfrak{q}_1' \cap A = \mathfrak{p}_1$. Das Primideal $\mathfrak{q}_1 := \mathfrak{q}_1' \cap B$ erfüllt dann $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$ und $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$.
Zum Beweis von (*). Die Inklusion „$\supseteq$" gilt immer.
Zu „$\subseteq$": Sei $x \in (\mathfrak{p}_1 \cdot B_{\mathfrak{q}_2}) \cap A$. Ohne Einschränkung sei $x \neq 0$. Es gilt $x/1 = y/s$ für $y \in \mathfrak{p}_1 \cdot B$ und $s \in B \setminus \mathfrak{q}_2$ (siehe Lemma 4.2.1). Wir wenden Lemma 5.3.3 an; beachte, dass der ganze Abschluss von A in B mit B übereinstimmt. Es folgt y ist ganz über $\mathfrak{p}_1$. Sei $K := Q(A)$. Dann ist y algebraisch über K. Sei $m_y \in K[t]$ das Minimalpolynom von y über K. Schreibe es als

$$m_y(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n.$$

Aus Lemma 5.3.4 wissen wir, dass $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{p}_1$. Da $x = y/s \in A$ und $x \neq 0$, folgt $s = y/x \in Q(B)$ und $1/x \in K$. Das Polynom

$$m(t) := t^n + \frac{a_1}{x} t^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \in K[t]$$

hat eine Nullstelle an s (es gilt $m(s) = m_y(y)/(x^n) = 0$) und es gibt kein normiertes Polynom f kleineren Grades über K, das s annulliert (denn sonst wäre $x^d f(y) = 0$). Daher ist m das Minimalpolynom von s über K. Definiere

$$\tilde{a}_k := \frac{a_k}{x^k}.$$

Andererseits ist s ganz über A (denn nach Voraussetzung ist B ganz über A). Wenden wir nun Lemma 5.3.4 (mit $I = (1)$) an, so ergibt sich

$$\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n \in \sqrt{(1) \cdot B} = B.$$

Also sind die $\tilde{a}_k$ ganz über A. Allerdings gilt auch $\tilde{a}_k \in K$ und da A normal ist, folgt $\tilde{a}_k \in A$.
Angenommen, $x \notin \mathfrak{p}_1$. Da $x^k \tilde{a}_k = a_k \in \mathfrak{p}_1$, würde $\tilde{a}_k \in \mathfrak{p}_1$ folgen. Damit wäre

$$s^n = -(\tilde{a}_1 s^{n-1} + \ldots + \tilde{a}_n) \in \mathfrak{p}_1 \cdot B \subseteq \mathfrak{p}_2 \cdot B = (\mathfrak{q}_2 \cap A) \cdot B \subseteq \mathfrak{q}_2$$

und das wäre ein Widerspruch zu $s \in B \setminus \mathfrak{q}_2$. Die Identität (*) ist damit bewiesen. $\square$

6. Noethersche und Artinsche Ringe und Moduln

In diesem Kapitel sei A ein Ring.

6.1. Kettenbedingungen.

Definition 6.1.1. Sei $(I, \leq)$ eine angeordnete Menge, d.h. die Relation $\leq$ ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch.

(1) Man sagt $(I, \leq)$ erfüllt die *aufsteigende Kettenbedingung*, wenn jede aufsteigende Kette
$$i_1 \leq i_2 \leq \dots$$
in I stationär wird; das bedeutet es gibt ein $n \geq 1$, so dass $i_n = i_{n+1} = \dots$.

(2) Man sagt $(I, \leq)$ erfüllt die *absteigende Kettenbedingung*, wenn jede absteigende Kette $i_1 \geq i_2 \geq \dots$ in I stationär wird.

6.1.2. Genau dann erfüllt $(I, \leq)$ die absteigende Kettenbedingung, wenn $(I, \geq)$ die aufsteigende Kettenbedingung erfüllt.

Lemma 6.1.3. *Sei $(I, \leq)$ angeordnet. Dann sind äquivalent:*

(1) $(I, \leq)$ erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung.

(2) Jede nicht-leere Teilmenge $J \subseteq I$ besitzt ein maximales Element.

Beweis. Zu „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Angenommen es gibt eine nicht-leere Teilmenge J, die kein maximales Element besitzt. Wähle ein $i_1 \in J$. Da i_1 nicht maximal ist, existiert ein $i_2 \in J$ mit $i_1 < i_2$. So fortfahrend erhalten wir eine unendliche Kette $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$.
Zu „(2) $\Rightarrow$ (1)“: Sei $i_1 \leq i_2 \leq \dots$ eine Kette. Da $J := \{i_n \mid n > 0\}$ ein maximales Element besitzt wird die Kette stationär. □

6.1.4. Genau dann erfüllt $(I, \leq)$ die absteigende Kettenbedingung, wenn jede nicht-leere Teilmenge von I ein minimales Element besitzt.

Definition 6.1.5. Sei A ein Ring und sei M ein A-Modul. Sei
$$\mathfrak{U}(M) := \{N \mid N \subseteq M \ A\text{-Untermodul}\}$$
Mit der Teilmengeninklusion $\subseteq$ ist die Menge $\mathfrak{U}(M)$ angeordnet.

(1) M heißt *noethersch*, wenn $(\mathfrak{U}(M), \subseteq)$ die aufsteigende Kettenbedingung erfüllt.
(2) M heißt *artinsch*, wenn $(\mathfrak{U}(M), \subseteq)$ die absteigende Kettenbedingung erfüllt.
(3) A heißt *noethersch/artinsch*, wenn ${}_AA$ noethersch/artinsch ist.

Beispiel 6.1.6. Einige (Nicht-)Beispiele für noethersche/artinsche Ringe. Sei k ein Körper.

(1) k ist noethersch und artinsch.
(2) $k[t]/(t^2)$ ist noethersch und artinsch.
(3) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist für $n > 0$ noethersch und artinsch.
(4) $\mathbb{Z}$ ist noethersch, aber nicht artinsch.
(5) $k[t]$ ist noethersch, aber nicht artinsch.
(6) $k[t_1, t_2, \dots]$ ist weder noethersch noch artinsch.

Beispiel 6.1.7. Einige (Nicht-)Beispiele für noethersche/artinsche Moduln.

(1) Jede endliche abelsche Gruppe ist ein noetherscher und artinscher $\mathbb{Z}$-Modul.

(2) Sei k ein Körper und A eine k-Algebra. Sei M ein A-Modul mit $\dim_k M < \infty$. Dann ist M noethersch und artinsch.
(3) Sei p eine Primzahl. Betrachte die Untergruppe G von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ aller Elemente deren Ordnung eine Potenz von p ist. Die Untergruppe
$$G_n := \frac{1}{p^n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$
von G hat Ordnung p^n. Wir haben eine unendliche aufsteigende Kette
$$G_0 \subsetneqq G_1 \subsetneqq G_2 \subsetneqq \dots$$
also ist G nicht noethersch. Allerdings ist G artinsch, denn die G_n sind die einzigen echten Untergruppen von G.

6.2. **Permanenzeigenschaften von Kettenbedingungen.**

Proposition 6.2.1. *Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln. Genau dann ist M noethersch/artinsch, wenn M' und M'' noethersch/artinsch sind.*

Beweis. Seien $i : M' \to M$ und $p : M \to M''$. Die Abbildungen
$$\begin{aligned} \mathfrak{U}(M') &\to \{N \in \mathfrak{U}(M) \mid N \subseteq \operatorname{im} i\} \\ N' &\mapsto i(N') \\ \mathfrak{U}(M'') &\to \{N \in \mathfrak{U}(M) \mid N \supseteq \ker p\} \\ N'' &\mapsto p^{-1}(N'') \end{aligned}$$
sind bijektiv.
Zu „$\Rightarrow$“: Sei $M_1' \subseteq M_2' \subseteq \dots$ eine Kette in M'. Dann ist $i(M_1') \subseteq i(M_2') \subseteq \dots$ eine Kette in M. Ist M noethersch, so wird sie stationär; sagen wir ab n. Dann gilt auch $M_n' = M_{n+1}' = \dots$, denn i ist injektiv.
Genauso argumentiert man für artinsch. Das Argument für die Kettenbedingung von M'' ist ähnlich.
Zu „$\Leftarrow$“: Sei $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ eine Kette in M. Die Ketten $i^{-1}(M_1) \subseteq i^{-1}(M_2) \subseteq \dots$ und $p(M_1) \subseteq p(M_2) \subseteq \dots$ werden beide stationär. Es gibt also ein n, so dass für alle $m \geq n$ gilt $i^{-1}(M_n) = i^{-1}(M_m)$ und $p(M_n) = p(M_m)$. Dann gilt $M_n = M_n$. Dazu sei $x_m \in M_m$. Dann ist $p(x_m) \in p(M_n)$, also gibt es ein $x_n \in M_n$ mit $p(x_n) = p(x_m)$. Dann ist $x_n - x_m \in \ker p = \operatorname{im} i$. Es existiert also ein $x' \in M'$ mit $i(x') = x_m - x_n \in M_m$. Dann ist $x' \in i^{-1}(M_m) = i^{-1}(M_n)$. Also ist $x_m = x_n + i(x') \in M_n$.
Im artinschen Fall argumentiert man genauso. □

Korollar 6.2.2. *Sei A noethersch/artinsch und sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann ist M noethersch/artinsch.*

Beweis. Wegen der exakten Sequenz $0 \to A \to A^n \to A^{n-1} \to 0$ ist A^n ebenfalls noethersch/artinsch. Da M endlich erzeugt ist, existiert eine Surjektion $A^n \to M \to 0$. Damit ist auch M noethersch/artinsch. □

Korollar 6.2.3. *Sei A ein noetherscher/artinscher Ring und B eine endliche A-Algebra. Dann ist B ein noetherscher/artinscher Ring.*

Beweis. Nach Korollar 6.2.2 ist ${}_AB$ noethersch/artinsch. Jeder B-Untermodul von B ist aber auch ein A-Untermodul. Somit ist auch ${}_BB$ noethersch/artinsch. □

6.2.4. Insbesondere sind also Quotienten von noetherschen/artinschen Ringen wieder noethersche/artinsche Ringe.

6.2.5. Sei $I \subseteq A$ ein Ideal und sei N ein A/I-Modul. Dann ist jeder A-Untermodul von ${}_AN$ auch ein A/I-Untermodul und umgekehrt natürlich auch. Es gilt also

$$\mathfrak{U}(N) = \mathfrak{U}({}_AN).$$

Somit ist N genau dann ein noetherscher/artinscher A/I-Modul, wenn ${}_AN$ ein noetherscher/artinscher A-Modul ist.

6.3. **Kompositionsreihen und einfache Moduln.**

Definition 6.3.1. Ein A-Modul $M \neq 0$ heißt *einfach* (oder auch irreduzibel), wenn er keine Untermoduln außer 0 und M besitzt.

Beispiel 6.3.2. Sei k ein Körper.

(1) Genau dann ist ein k-Vektorraum V einfach, wenn $\dim_k V = 1$.
(2) Betrachte den Polynomring $k[t]$. Sei M ein $k[t]$-Modul mit ${}_kM = k$. Dann ist M einfach. Ist k algebraisch abgeschlossen, so ist jeder einfache Modul von dieser Form.
(3) Sei $k = \mathbb{R}$. Betrachte den $\mathbb{R}[t]$-Modul M gegeben durch das Paar $(\mathbb{R}^2, S)$, wobei $S \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ sei. Ein Untermodul U von M ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum mit $SU \subseteq U$. Also ist M genau dann einfach, wenn S keinen reellen Eigenwert hat, sprich das charakteristische Polynom χ_S keine reelle Nullstelle besitzt.

6.3.3. Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A. Dann ist $A/\mathfrak{m}$ ein einfacher A-Modul.

Lemma 6.3.4 (Schur)**.** *Sei $f : M \to N$ eine A-lineare Abbildung.*

(1) Ist M einfach, so ist entweder f injektiv oder $f = 0$.
(2) Ist N einfach, so ist entweder f surjektiv oder $f = 0$.

Insbesondere gibt es zwischen zwei nicht-isomorphen einfachen Moduln keine Homomorphismen $\neq 0$.

Beweis.

(1) Da $\ker(f) \subseteq M$ ein Untermodul des einfachen Moduls M ist, gilt entweder $\ker(f) = 0$ oder $\ker(f) = M$.
(2) Genauso. □

Lemma 6.3.5. *Sei M ein einfacher A-Modul. Dann ist* $\operatorname{Ann}(M)$ *ein maximales Ideal von A und $M \cong A/\operatorname{Ann}(M)$.*

Beweis. Sei $x \in M \setminus \{0\}$. Die A-lineare Abbildung $\varphi : A \to M$ definiert durch $\varphi(a) = ax$ ist nicht die Null-Abbildung, also ist sie surjektiv nach Schurs Lemma. Somit $M \cong A/I$, wobei $I := \ker(\varphi)$. Es folgt $\operatorname{Ann}(M) = \operatorname{Ann}(A/I) = I$. Wäre I kein maximales Ideal, so hätte A/I einen echten nicht-trivialen Untermodul und wäre nicht einfach. □

Definition 6.3.6. Sei M ein A-Modul. Eine *Kompositionsreihe* von M ist eine strikt absteigende Kette

$$K: \ M = M_n \supsetneqq M_{n-1} \supsetneqq \ldots \supsetneqq M_1 \supsetneqq M_0 = 0$$

von A-Untermoduln, so dass die Subquotienten M_i/M_{i-1} einfach sind für $i = 1, \ldots, n$. Man nennt n die *Länge* der Kompositionsreihe K.

6.3.7. Auf der Menge $\mathfrak{K}(M)$ aller endlichen strikt absteigenden Ketten von Untermoduln von M definieren wir eine Relation $K' \leq K$, wenn K durch einfügen von (endlich vielen) Zwischenschritten aus K' entsteht. Wir sagen K ist eine Verlängerung von K'. Die Relation $\leq$ ist dann reflexiv, transitiv und antisymmetrisch, also eine Anordnung. Ersichtlich sind maximale Elemente von $\mathfrak{K}(M)$ genau Kompositionsreihen.

Definition 6.3.8. Sei M ein A-Modul. Falls M eine Kompositionsreihe hat, definieren wir

$$l(M) := \min\{n \mid \text{es gibt eine Kompsitionsreihe von } M \text{ mit Länge } n\}.$$

Falls M keine Kompositionsreihe besitzt, setzen wir $l(M) := \infty$. Man nennt $l(M)$ die *Länge* von M.

6.3.9. Ersichtlich ist genau dann $l(M) = 0$, wenn $M = 0$ ist und genau dann $l(M) = 1$, wenn M einfach ist.

Lemma 6.3.10. *Sei M ein Modul von endlicher Länge. Sei $M' \subseteq M$ ein A-Untermodul. Dann gilt:*

(1) $l(M') \leq l(M)$ und $l(M/M') \leq l(M)$.
(2) Falls $l(M') = l(M)$ ist, so gilt $M' = M$.

Beweis.

(1) Sei

$$K: \ M = M_n \supsetneqq M_{n-1} \supsetneqq \ldots \supsetneqq M_1 \supsetneqq M_0 = 0$$

eine Kompositionsreihe von M mit Länge $n = l(M)$. Definiere K' als die Kette mit Einträgen $M_i \cap M'$, wobei Wiederholungen eliminiert werden. Für einen Subquotienten der Kette K' gilt

$$M'_i/M'_{i-1} = (M_j \cap M')/(M_{j-1} \cap M') \hookrightarrow M_j/M_{j-1}.$$

Da M_j/M_{j-1} einfach ist, gilt entweder $M'_i/M'_{i-1} \cong M_j/M_{j-1}$ oder $M'_i/M'_{i-1} = 0$, was wir ausgeschlossen haben. Also ist K' eine Kompositionsreihe von M'. Damit ist $l(M') \leq n = l(M)$.
Den Beweis für den Quotienten führt man ähnlich.

(2) Wäre $l(M') = l(M) = n$, so hätte insbesondere K' die Länge $l(M)$. Dann wären aber alle Subquotienten isomorph, sprich $M'_i/M'_{i-1} \cong M_i/M_{i-1}$. Induktiv würde $M'_i = M_i$ folgen und es wäre insbesondere $M' = M'_n = M_n = M$. □

Satz 6.3.11 (Jordan–Hölder)**.** *Sei M ein A-Modul von endlicher Länge. Dann gilt:*

(1) Jede strikt absteigende Kette von A-Untermoduln in M lässt sich zu einer Kompositionsreihe verlängern.
(2) Je zwei Kompositionsreihen von M haben die gleiche Länge; diese ist $l(M)$.

(3) *Jede strikt absteigende Kette von A-Untermoduln von M hat Länge höchstens $l(M)$. Falls sie Länge $l(M)$ hat, so ist sie eine Kompositionsreihe von M.*

Beweis.

(1) Sei
$$K: \ M = M_k \supsetneqq M_{k-1} \supsetneqq \ldots \supsetneqq M_1 \supsetneqq M_0 = 0$$
eine strikt absteigende Kette von M. Da auch der Subquotient M_i/M_{i-1} endliche Länge hat, besitzt er eine Kompositionsreihe. Verlängert man K durch diese Kompositionsreihen der Subquotienten, entsteht eine Kompositionsreihe von M.

(3a) Sei
$$M = M_k \supsetneqq M_{k-1} \supsetneqq \ldots \supsetneqq M_1 \supsetneqq M_0 = 0$$
eine beliebige Kette von M. Dann ist $k \leq l(M)$, denn nach Lemma 6.3.10 gilt
$$l(M) = l(M_k) > l(M_{k-1}) > \ldots > l(M_1) > l(M_0) = 0.$$

(2) Sei K eine Kompositionsreihe; sei n ihre Länge. Dann gilt nach Definition $n \geq l(M)$. Andererseits ist K auch eine strikt absteigende Kette, also ist $n \leq l(M)$ nach (3a).

(3b) Sei K eine strikt absteigende Kette von Länge $n = l(M)$. Wäre sie keine Kompositionsreihe, so könnten wir sie durch endlich viele (aber mindestens eine) Einfügung zu einer Kompsitionsreihe K' verlängern. Die Länge von K' wäre dann aber mindestens $n + 1 = l(M) + 1$. Ein Widerspruch zu (2). □

Proposition 6.3.12. *Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln. Dann gilt $l(M) = l(M') + l(M'')$. Insbesondere hat M genau dann endliche Länge, wenn M' und M'' endliche Länge haben.*

Beweis. Wir nehmen ohne Einschränkung $0 \neq M' \subsetneqq M$ an.
Angenommen M habe endliche Länge. Verlängern wir die strikt absteigende Kette $M \supsetneqq M' \supsetneqq 0$ zu einer Kompositionsreihe
$$K: \ M = M_n \supsetneqq M_{n-1} \supsetneqq \ldots \supsetneqq M_1 \supsetneqq M_0 = 0$$
so gilt $l(M) = n$. Außerdem existiert ein $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit $M_k = M'$. Dann sind
$$M' = M_k \supsetneqq M_{k-1} \supsetneqq \ldots \supsetneqq M_1 \supsetneqq M_0 = 0$$
$$M/M' = M_n/M' \supsetneqq M_{n-1}/M' \supsetneqq \ldots \supsetneqq M_{k+1}/M' \supsetneqq M_k/M' = 0$$
zwei Kompositionsreihen. Es gilt also $l(M') = k$ und $l(M'') = n-k$ nach Jordan–Hölder. Falls M' und M'' endliche Länge haben, so setzt man zwei Kompositionsreihen von M' und M'' zu einer Kompositionsreihe von M zusammen. So erhält man, dass M endliche Länge hat. □

Satz 6.3.13. *Sei M ein A-Modul. Genau dann hat M endliche Länge, wenn M noethersch und artinsch ist.*

Beweis. Zu „$\Rightarrow$“: Hat M endliche Länge $n = l(M)$, so kann es in einer aufsteigenden oder absteigenden Kette höchsten n echte Schritte geben.
Zu „$\Leftarrow$“: Sei M noethersch und artinsch. Ist $M = 0$, so ist die Behauptung klar. Nehmen wir $M \neq 0$ an. Da M noethersch ist, hat die Menge der echten Untermoduln von M ein maximales Element M_1. Wegen der Maximalität ist M/M_1 einfach. Auch M_1

ist noethersch nach Proposition 6.2.1. Ist $M_1 = 0$, so haben wir eine Kompsitionsreihe gefunden. Falls $M_1 \neq 0$, so gibt es einen maximalen echten Untermodul M_2. Angenommen der Prozess würde nicht abbrechen, so hätten wir eine unendliche strikt absteigende Kette

$$M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq M_2 \supsetneqq \dots$$

konstruiert, was ein Widerspruch zu M artinsch ist. □

6.3.14. Sei k ein Körper. Für einen k-Vektorraum V sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) V ist endlich-dimensional
(2) V hat endliche Länge
(3) V ist noethersch
(4) V ist artinsch.

Definition 6.3.15. Sei M ein A-Modul. Die Menge $\mathrm{Supp}(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid M_\mathfrak{p} \neq 0\}$ heißt der *Träger* von M.

Proposition 6.3.16. *Sei M ein A-Modul mit $l(M) < \infty$. Dann ist* $\mathrm{Supp}(M)$ *eine endliche Teilmenge von* $\mathrm{Max}(A)$ *und der natürliche Homomorphismus von A-Moduln*

$$M \to \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)} M_\mathfrak{p}$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Übung. □

6.4. **Noethersche Ringe und Moduln.**

Proposition 6.4.1. *Für einen A-Modul M sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) M ist noethersch.
(2) Jeder A-Untermodul $N \subseteq M$ ist endlich erzeugt.

Beweis. Zu „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Sei $N \subseteq M$ ein A-Untermodul und sei

$$\Sigma := \{N' \mid N' \subseteq N \ A\text{-Untermodul}, \ N' \text{ endlich erzeugt}\}.$$

Betrachte die angeordnete Menge $(\Sigma, \subseteq)$. Es gilt $\Sigma \neq \emptyset$, also gibt es nach Lemma 6.1.3 ein maximales Element $N' \in \Sigma$. Ist $x \in N$, so ist $N' \subseteq N' + \langle x \rangle \in \Sigma$, also folgt $N' = N' + \langle x \rangle$ mit Maximalität. Somit ist $x \in N'$. Daher ist $N' = N$ und damit N endlich erzeugt.
Zu „(2) $\Rightarrow$ (1)“: Sei $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ eine aufsteigende Kette von A-Untermoduln. Definiere $N := \bigcup_{n \geq 1} M_n$. Dann ist N ein A-Untermodul, also endlich erzeugt. Wähle ein endliches Erzeugendensystem E. Dann existiert ein $n \geq 1$, so dass $E \subseteq M_n$. Somit ist $N = M_n$. □

Korollar 6.4.2. *Sei A ein noetherscher Ring und sei I ein Ideal. Dann gibt es ein $k > 0$, so dass $\sqrt{I}^k \subseteq I$.*

Beweis. Da A noethersch ist, ist $\sqrt{I}$ endlich erzeugt, sagen wir $\sqrt{I} = (x_1, \dots, x_n)$. Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt es ein $m_i > 0$, so dass $x_i^{m_i} \in I$. Für jedes $k > 0$ wird $\sqrt{I}^k$ erzeugt von Produkten $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ mit $\sum_i k_i = k$. Wählen wir $k \geq \sum_i m_i$, so gibt es für jede Zerlegung $k = \sum_i k_i$ mindestens ein i mit $k_i \geq m_i$. Also ist $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ und damit

$$\sqrt{I}^k \subseteq I.$$

□

Korollar 6.4.3. *Sei A ein noetherscher Ring. Dann gibt es ein $k > 0$ mit* $\mathrm{Nil}(A)^k = (0)$.

Lemma 6.4.4. *Sei A ein noetherscher/artinscher Ring und sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge. Dann ist $S^{-1}A$ noethersch/artinsch.*

Beweis. Folgt aus der Bijektion zwischen echten Idealen von $S^{-1}A$ und Idealen I von A mit $I \cap S = \emptyset$. □

Satz 6.4.5 (Hilberts Basissatz)**.** *Sei A ein noetherscher Ring. Dann ist auch $A[t_1, \ldots, t_n]$ ein noetherscher Ring.*

Beweis. Es genügt die Aussage für $n = 1$ zu zeigen. Dazu zeigen wir, dass jedes Ideal von $A[t]$ endlich erzeugt ist. Sei $J \subseteq A[t]$ ein Ideal. Angenommen J wäre nicht endlich erzeugt. Wähle ein $f_1 \in J$ mit $f_1 \neq 0$ und $\deg(f_1)$ minimal. Da $(f_1) \subsetneqq J$ können wir ein $f_2 \in J \setminus (f_1)$ von minimalem Grad wählen. Auf diese Art erhalten wir eine Folge

$$f_1, f_2, f_3, \ldots$$

von $f_n \in J$ von minimalem Grad $d_n := \deg(f_n)$, so dass $f_n \notin (f_1, \ldots, f_{n-1})$ gilt. Dann ist

$$d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \ldots$$

Sei $a_n \in A$ der Leitkoeffizient von f_n, also

$$f_n(t) = a_n t^{d_n} + \text{ Terme kleineren Grades.}$$

Definiere $I := (a_1, a_2, \ldots) \subseteq A$. Da A noethersch ist, ist I endlich erzeugt. Es gibt also ein n, so dass $I = (a_1, \ldots, a_n)$ (klar?). Da $a_{n+1} \in I$ ist gibt es $u_1, \ldots, u_n \in A$ mit $a_{n+1} = u_1 a_1 + \ldots + u_n a_n$. Nun definiere

$$g := \sum_{i=1}^{n} u_i f_i t^{d_{n+1} - d_i} \in (f_1, \ldots, f_n)$$

Dann ist $\deg(g) = d_{n+1} = \deg(f_{n+1})$ und

$$g(t) = a_{n+1} t^{d_{n+1}} + \text{ Terme kleineren Grades}$$

also ist $\deg(f_{n+1} - g) < d_{n+1}$. Wegen $g \in (f_1, \ldots, f_n) \not\ni f_{n+1}$ ist aber $f_{n+1} - g \notin (f_1, \ldots, f_n)$. Das ist aber ein Widerspruch zur Grad-Minimalität von f_{n+1}. □

Korollar 6.4.6. *Sei k ein Körper und A eine endlich erzeugte k-Algebra. Dann ist A ein noetherscher Ring.*

Proposition 6.4.7 (Hilberts Basissatz, Potenzreihenversion)**.** *Sei A ein noetherscher Ring. Dann ist auch $A[[t_1, \ldots, t_n]]$ noethersch.*

Beweis. Übung. □

Definition 6.4.8. Sei A ein Ring. Ein $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ heißt *minimales Primideal* von A, falls es kein Primideal $\mathfrak{p}'$ von A gibt mit $\mathfrak{p}' \subsetneqq \mathfrak{p}$. Mit $\mathrm{MinSpec}(A)$ bezeichnen wir die Menge der minimalen Primideale von A.

Beispiel 6.4.9. Berechne die minimalen Primideale einiger Ringe.

(1) Ist A ein Integritätsbereich, so ist $\mathrm{MinSpec}(A) = \{(0)\}$.

(2) Sei k ein Körper und $A = k[X,Y]/(XY)$. Dann ist $\mathrm{MinSpec}(A) = \{(X),(Y)\}$.
(3) Sei k ein Körper und $A = k[t_1, t_2, \ldots]/(t_1t_2, t_3t_4, t_5t_6, \ldots)$. Dann sind alle minimalen Primideale von der Form

$$\mathfrak{p} = (t_{1+i_1}, t_{3+i_2}, t_{5+i_3}, \ldots)$$

wobei $i_\nu \in \{0,1\}$. Dieser Ring hat also unendlich viele minimale Primideale.

6.4.10. Sei $I \subseteq A$ ein Ideal und sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge. Die Idealkorrespondenzen für Quotienten bzw. Lokalisierungen beschränken sich zu Bijektionen

$$\mathrm{MinSpec}(A/I) \xrightarrow{\sim} \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \text{ minimales Primoberideal von } I\}$$
$$\mathrm{MinSpec}(S^{-1}A) \xrightarrow{\sim} \{\mathfrak{p} \in \mathrm{MinSpec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

Proposition 6.4.11. *Ein noetherscher Ring A hat nur endlich viele minimale Primideale.*

Beweis. Sei

$$\Sigma := \{I \mid I \subseteq A \text{ Ideal, so dass } A/I \text{ unendlich viele minimale Primideale hat}\}$$

Angenommen Σ wäre nicht-leer. Dann hätte Σ ein maximales Element I nach Lemma 6.1.3, denn A ist noethersch. Dann kann I kein Primideal sein, denn für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von A ist $\mathrm{MinSpec}(A/\mathfrak{p}) = \{(0)\}$. Also gibt es $a, b \in A \setminus I$, so dass $ab \in I$. Dann sind $I + (a), I + (b) \notin \Sigma$ und damit

$$\mathrm{MinSpec}(A/(I+(a))) \qquad \mathrm{MinSpec}(A/(I+(b)))$$

beide endlich. Also haben $I+(a)$ und $I+(b)$ nur endlich viele minimale Primoberideale. Nun sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ ein minimales Primoberideal von I. Insbesondere ist $ab \in \mathfrak{p}$ und damit $a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{p}$. Ohne Einschränkung gelte $a \in \mathfrak{p}$. Dann ist $I + (a) \subseteq \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ ein minimales Primoberideal von I ist, ist es damit auch ein minimales Primoberideal von $I + (a)$. Also hätten wir gezeigt, dass die Menge der minimalen Primoberideale von I (nach Annahme eine unendliche Menge) enthalten ist in der Vereinigung der Mengen der minimalen Primoberideale von $I+(a)$ und der minimalen Primoberideale von $I+(b)$ (zweier endlicher Mengen). Ein Widerspruch. □

6.4.12. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät, also eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge – nicht notwendig irreduzibel. Sei $A = A(X)$ der Koordinatenring. Die minimalen Primideale von A entsprechen genau den irreduziblen Komponenten von X, also den maximalen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X. Die obige Proposition zeigt also, dass eine affine Varietät nur endlich viele irreduzible Komponenten besitzt.

6.5. **Artinsche Ringe.**

Proposition 6.5.1. *Sei A ein artinscher Ring. Dann gilt:*
(1) Jedes Primideal von A ist ein maximales Ideal.
(2) $\mathrm{Nil}(A) = \mathrm{Jac}(A)$
(3) A hat nur endlich viele maximale Ideale.
(4) Es gibt ein $n > 0$, so dass $\mathrm{Nil}(A)^n = (0)$.

Beweis.

(1) Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Dann ist $B := A/\mathfrak{p}$ ebenfalls artinsch. Wir zeigen, dass B ein Körper ist. Sei $x \in B \setminus \{0\}$. Da die absteigende Kette

$$(x) \supseteq (x^2) \supseteq (x^3) \supseteq \ldots$$

stationär wird, existiert ein $n \geq 1$ und ein $y \in B$, so dass $x^n = x^{n+1}y$. Da B nullteilerfrei ist, gilt $1 = xy$. Also ist $x \in B^\times$.

(2) Folgt sofort aus (1).

(3) Betrachte die Menge

$$\Sigma = \{\mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_r \mid \mathfrak{m}_i \in \operatorname{Max}(A)\}.$$

Da A artinsch ist, hat diese Menge nach Lemma 6.1.3 ein minimales Element, sagen wir $\mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_n$. Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A gilt also

$$\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_n$$

anders ausgedrückt $\mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_n \subseteq \mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{m}$ insbesondere ein Primideal ist, folgt $\mathfrak{m}_i \subseteq \mathfrak{m}$ für ein i (siehe Blatt 1, Aufgabe 2). Nun ist $\mathfrak{m}_i$ aber maximal. Also gilt $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}$.

(4) Sei $N := \operatorname{Nil}(A)$. Es gibt wegen der absteigenden Kettenbedingung ein $k > 0$, so dass $N^k = N^{k+1} = \ldots$. Sei $I := N^k$ und angenommen $I \neq (0)$. Sei

$$\Sigma = \{J \subseteq A \mid J \text{ Ideal}, IJ \neq (0)\}.$$

Dann gilt $I \in \Sigma$, denn $I^2 = N^{2k} = N^k = I \neq (0)$ nach Annahme. Da A artinsch ist, besitzt die Menge Σ ein minimales Element, sagen wir J. Es gibt ein $x \in J$ mit $xI \neq (0)$. Wegen $(x) \subseteq J$ und der Minimalität von J ist $(x) = J$. Aber genauso gilt $xI^2 = xI \neq (0)$, weshalb mit $xI \subseteq (x) = J$ auch $xI = (x) = J$ folgt. Es gibt also ein $y \in I$ mit $xy = x$. Dann ist

$$x = xy = xy^2 = xy^3 = \ldots$$

Wegen $y \in I = N^k \subseteq N = \operatorname{Nil}(A)$ gibt es aber ein $n > 0$, so dass $y^n = 0$. Dann folgt $x = xy^n = 0$. Dann wäre auch $xI = (0)$, was ein Widerspruch ist. □

Satz 6.5.2 (Akizuki–Hopkins)**.** *Sei A ein Ring. Dann sind äquivalent:*

(1) A ist artinsch.
(2) A ist noethersch und jedes Primideal von A ist ein maximales Ideal.
(3) A ist noethersch und jedes Primideal von A ist ein minimales Primideal.

Beweis. Zu „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Ist A artinsch, so ist jedes Primideal maximal nach 6.5.1. Ferner hat A nur endlich viele maximale Ideale $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$. Es gilt also

$$\operatorname{Nil}(A) = \operatorname{Jac}(A) = \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_n \supseteq \mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n.$$

Ferner ist $\operatorname{Nil}(A)$ nilpotent. Es gibt also ein $k > 0$, so dass $\operatorname{Nil}(A)^k = (0)$. Dann ist auch

$$\mathfrak{m}_1^k \ldots \mathfrak{m}_n^k = (0).$$

Es gibt also (nicht notwendig verschiedene) maximale Ideale $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_N$ von A mit $\mathfrak{n}_1 \ldots \mathfrak{n}_N = 0$. Betrachte die Kette

$$(*) \qquad A \supseteq \mathfrak{n}_1 \supseteq \mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{n}_1 \ldots \mathfrak{n}_N = (0).$$

Da A artinsch ist, ist jeder Subquotient $V_i := (\mathfrak{n}_1 \dots \mathfrak{n}_{i-1})/(\mathfrak{n}_1 \dots \mathfrak{n}_i)$ ein artinscher A-Modul. Da $\mathfrak{n}_i \subseteq \mathrm{Ann}(V_i)$, können wir V_i als einen $A/\mathfrak{n}_i$-Vektorraum auffassen. Also ist V_i artinsch als $A/\mathfrak{n}_i$-Vektorraum, sprich endlich-dimensional. Dann ist V_i aber auch ein noetherscher $A/\mathfrak{n}_i$-Vektorraum und damit auch ein noetherscher A-Modul. Wir haben also A eine Kette von A-Untermoduln von A gefunden, deren Subquotienten noethersch sind. Dann ist auch A noethersch.
Zu „(2) $\Leftrightarrow$ (3)": Klar, denn in beiden Fällen kann es keine echten Inklusionen zwischen Primidealen geben.
Zu „(2)+(3) $\Rightarrow$ (1)": In einem noetherschen Ring ist $\mathrm{Nil}(A)$ nilpotent. Ferner sind alle Primideale maximal. Wieder können wir schließen, dass es (nicht notwendig verschiedene) maximale Ideale $\mathfrak{n}_1, \dots, \mathfrak{n}_N$ von A gibt mit

$$\mathfrak{n}_1 \dots \mathfrak{n}_N = (0).$$

Betrachte die gleiche Kette von Untermoduln (*) wie in der Richtung „(1) $\Rightarrow$ (2)" und die Subquotienten V_i. Dann ist V_i ein noetherscher A-Modul. Somit ist V_i ein endlich-dimensionaler $A/\mathfrak{n}_i$-Vektorraum und daher auch ein artinscher A-Modul. Das zeigt A artinsch. □

Korollar 6.5.3. *Genau dann ist ein Ring A artinsch, wenn $l({}_A A) < \infty$.*

Beweis. Ist A artinsch, so ist A auch noethersch nach Akizuki–Hopkins. Also hat ${}_A A$ endliche Länge nach Satz 6.3.13. Gilt umgekehrt $l({}_A A) < \infty$, so ist nach Satz 6.3.13 ${}_A A$ artinsch, also A ein artinscher Ring. □

Proposition 6.5.4. *Sei A ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Dann gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen:*

- $\mathfrak{m}^n \supsetneq \mathfrak{m}^{n+1}$ *für alle $n \geq 0$, oder*
- *es gibt ein $n > 0$, so dass $\mathfrak{m}^n = 0$; in diesem Fall ist A artinsch.*

Beweis. Gelte $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1} = \dots$. Da $\mathfrak{m}$ endlich erzeugt ist (A ist noethersch), können wir Nakayamas Lemma anwenden. Es liefert $\mathfrak{m}^n = 0$. Wir zeigen noch, dass A artinsch ist. Sei dazu $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Dann gilt $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{p}$ und deshalb $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}$ (Blatt 1, Aufgabe 2). Somit ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$. Satz 6.5.2 zeigt, dass A artinsch ist. □

6.5.5. Seien $A_1, \dots, A_n$ Ringe und $A := A_1 \times \dots \times A_n$. Ideale von A sind von der Form $I_1 \times \dots \times I_n$. Genau dann ist I ein Primideal, wenn es von der Form

$$(1) \times \dots \times \mathfrak{p}_i \times \dots \times (1)$$

ist für ein $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(A_i)$. Genau dann ist I maximal, wenn $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Max}(A_i)$ ist.
Die Einheitengruppe von A ist $A_1^\times \times \dots \times A_n^\times$.
Sind $S_i \subseteq A_i$ multiplikative Teilmengen, so ist $S := S_1 \times \dots \times S_n$ eine multiplikative Teilmenge von A. Aus der universellen Eigenschaft der Lokalisierung entsteht ein Ringhomomorphismus $\varphi : S^{-1}A \to S_1^{-1}A_1 \times \dots \times S_n^{-1}A_n$. Dieser Ringhomomorphismus ist ein Isomorphismus.

Satz 6.5.6 (Struktursatz für artinsche Ringe)**.** *Sei A ein artinscher Ring.*

(1) Es gibt artinsche lokale Ringe $A_1, \dots, A_n$, so dass $A \cong A_1 \times \dots \times A_n$.
(2) Sind $B_1, \dots, B_m$ weitere artinsche lokale Ringe mit $A \cong B_1 \times \dots \times B_m$, so gilt $m = n$ und, bis auf Umnummerierung, $A_i \cong B_i$.

Beweis.

(1) Da A artinsch ist, ist $l({}_AA) < \infty$ und damit ist die natürliche A-lineare Abbildung
$$A \to \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Supp}({}_AA)} A_{\mathfrak{m}}$$
ein Isomorphismus (Proposition 6.3.16). Dieser Isomorphismus ist aber ersichtlich ein Isomorphismus von Ringen. Es gilt außerdem $\mathrm{Supp}({}_AA) = \mathrm{Max}(A)$ und das ist eine endliche Menge.

(2) Seien $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ und $B = B_1 \times \ldots \times B_m$, wobei $(A_i, \mathfrak{m}_i)$ und $(B_j, \mathfrak{n}_j)$ artinsche lokale Ringe seien. Sei $\varphi : A \to B$ ein Isomorphismus von Ringen. Dann induziert φ eine Bijektion
$$\mathrm{Max}(A) = \{\tilde{\mathfrak{m}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{m}}_n\} \to \mathrm{Max}(B) = \{\tilde{\mathfrak{n}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{n}}_m\},$$
wobei $\tilde{\mathfrak{m}}_i = (1) \times \ldots \times \mathfrak{m}_i \times \ldots \times (1)$ sei und $\tilde{\mathfrak{n}}_j$ analog definiert sei. Also muss $n = m$ sein und es gibt eine Permutation $\sigma \in S_n$, so dass $\varphi(\tilde{\mathfrak{m}}_i) = \tilde{\mathfrak{n}}_{\sigma(i)}$. Sei $j := \sigma(i)$. Betrachte die Lokalisierung $A_{\tilde{\mathfrak{m}}_i}$. Wir lokalisieren an
$$S = A \setminus \tilde{\mathfrak{m}}_i = A_1 \times \ldots \times (A_i \setminus \mathfrak{m}_i) \times \ldots \times A_n$$
und deshalb ist
$$A_{\tilde{\mathfrak{m}}_i} \xrightarrow{\cong} 0 \times \ldots \times (A_i)_{\mathfrak{m}_i} \times \ldots \times 0 \cong (A_i)_{\mathfrak{m}_i} = A_i$$
denn A_i ist bereits ein lokaler Ring. Dann ist
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_{\tilde{\mathfrak{m}}_i} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"] & B_{\tilde{\mathfrak{n}}_j} \arrow[d, "\cong"] \\ A_i \arrow[r, dashed] & B_j \end{tikzcd}$$
also ist A_i isomorph zu B_j. □

Lemma 6.5.7. *Sei $A \to B$ ein ganzer Ringhomomorphismus.*

(1) Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Dann ist jedes Primideal von $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ ein maximales Ideal.

(2) Falls A noethersch ist und $A \to B$ endlich, so ist $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ artinsch.

Beweis. Übung. □

6.5.8. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ affine Varietäten über k und sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten. Seien $B = A(X)$ und $A = A(Y)$ die Koordinatenringe. Dann entspricht $f : X \to Y$ einem k-Algebrenhomomorphismus $f^* : A \to B$.
Angenommen $f^* : A \to B$ ist ganz. Da B eine endlich erzeugte k-Algebra ist, ist B auch endlich erzeugt als A-Algebra. Demnach ist $A \to B$ endlich. Wir nennen deshalb f in diesem Fall einen endlichen Morphismus.
Ferner ist A noethersch als endlich erzeugte k-Algebra. Dann sagt uns Lemma 6.5.7, dass $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ ein artinscher Ring ist für jedes Primideal $\mathfrak{p}$. Somit hat $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ nach Proposition 6.5.1 nur endlich viele Primideale und jedes davon ist maximal. Sei $y \in Y$.

Es entspricht einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von A. Ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ entspricht einem Primideal/maximalen Ideal von $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{m}) = B/\mathfrak{m}B$. Da dieser Ring nur endlich viele Primideale besitzt, ist die Faser $f^{-1}(y)$ endlich. Sprich, endliche Morphismen von Varietäten haben endliche Fasern.
In der Übung haben wir zudem bereits gezeigt, dass $f : X \to Y$ eine abgeschlossene Abbildung ist und dass, falls $f^* : A \to B$ injektiv ist, $f : X \to Y$ sogar surjektiv ist.

7. Endlich erzeugte Algebren über Körpern

7.1. Noether-Normalisierung.

Definition 7.1.1. Sei A eine k-Algebra. Man nennt $x_1, \dots, x_n \in A$ *algebraisch unabhängig* über k, wenn der eindeutig bestimmte k-Algebrenhomomorphismus

$$k[X_1, \dots, X_n] \to A$$

mit $X_i \mapsto x_i$ (alle $i = 1, \dots, n$) injektiv ist. Andernfalls heißen $x_1, \dots, x_n$ *algebraisch abhängig.*

Lemma 7.1.2. *Sei A eine k-Algebra und seien $x_1, \dots, x_n \in A$ algebraisch abhängig über k mit $k[x_1, \dots, x_n] = A$. Dann gibt es $y_1, \dots, y_{n-1} \in A$, so dass x_n ganz ist über $k[y_1, \dots, y_{n-1}]$ und $k[y_1, \dots, y_{n-1}, x_n] = A$.*

Lemma 7.1.3 (Nagata)**.** *Sei $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ ein Polynom mit $f \neq 0$. Für ganze Zahlen $r_1, \dots, r_{n-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definieren wir neue Variablen*

$$Y_i := X_i - X_n^{r_i}$$

für $i = 1, \dots, n-1$. Die Variablen $Y_1, \dots, Y_{n-1}, X_n$ sind algebraisch unabhängig und es gilt

$$k[X_1, \dots, X_n] = k[Y_1, \dots, Y_{n-1}, X_n] = k[Y_1, \dots, Y_{n-1}][X_n].$$

Sei $c \in k[Y_1, \dots, Y_{n-1}]$ der Leitkoeffizient von $f \in k[Y_1, \dots, Y_{n-1}][X_n]$. Es gibt eine Wahl von $r_1, \dots, r_{n-1}$, so dass $c \in k^\times$ ist.

Beweis. Schreibe

$$f = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} a_m X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}.$$

Definiere $E_f := \{m \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \mid a_m \neq 0\}$. Sei außerdem $r_n := 1$ und $r := (r_1, \dots, r_{n-1}, r_n)$. Dann ist

$$\begin{aligned} f &= f(X_1, \dots, X_n) \\ &= f(Y_1 + X_n^{r_1}, \dots, Y_{n-1} + X_n^{r_{n-1}}, X_n) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} a_m \Bigl(\prod_{i=1}^{n-1} (Y_i + X_n^{r_i})^{m_i} \Bigr) X_n^{m_n} \\ &= \sum_m a_m \Bigl(X_n^{r \cdot m} + \text{Terme von kleinerem Grad in } X_n \Bigr), \end{aligned}$$

wobei $r \cdot m := \sum_{i=1}^n r_i m_i$ sei. Um sicherzustellen, dass es zwischen den einzelnen Summanden keine Eliminationen des Leitterms gibt, wollen wir r so wählen, dass

$$r \cdot m \neq r \cdot m'$$

gilt für alle $m, m' \in E_f$ mit $m \neq m'$. Das ist möglich nach Lemma 7.1.4. Fixiere eine solche Wahl von r. Nun wählen wir das eindeutig bestimmte $m \in E_f$, so dass

$$r \cdot m = \max\{r \cdot m' \mid m' \in E_f\}$$

Der Grad von f, aufgefasst als Polynom in X_n über $k[Y_1, \dots, Y_{n-1}]$, ist dann $r \cdot m$ und der Leitkoeffizient ist $a_m \in k^\times$. ☐

Lemma 7.1.4. *Sei $E \subseteq \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ eine endliche Menge. Dann gibt es ein $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ mit $r_n = 1$, so dass*
$$r \cdot m \neq r \cdot m'$$
ist für alle $m, m' \in E$ mit $m \neq m'$.

Beweis. Beweis per Induktion über n. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei $n > 1$ und die Behauptung gelte für $n-1$. Sei $\pi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^{n-1}$ definiert durch $\pi(x_1, \ldots, x_n) := (x_2, \ldots, x_n)$. Nach Induktionsannahme existiert $s = (r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}_{\geq 0}$ mit $r_n = 1$, so dass $s \cdot \pi(m) \neq s \cdot \pi(m')$ für alle $m, m' \in E$ mit $\pi(m) \neq \pi(m')$. Nun wählen wir
$$r_1 > \max\{s \cdot \pi(m) \mid m \in E\}$$
und definieren $r := (r_1, r_2, \ldots, r_n)$. Seien $m, m' \in E$ mit $m \neq m'$. Falls $m_1 = m_1'$ ist $\pi(m) \neq \pi(m')$ und damit
$$r \cdot m - r \cdot m' = s \cdot \pi(m) - s \cdot \pi(m') \neq 0$$
Anderenfalls ist $m_1 \neq m_1'$. In diesem Fall berechnen wir
$$|r \cdot m - r \cdot m'| \geq |r_1(m_1 - m_1')| - \underbrace{|s \cdot \pi(m) - s \cdot \pi(m')|}_{<r_1} > r_1(|m_1 - m_1'| - 1) \geq 0.$$
□

Beweis von Lemma 7.1.2. Wegen der algebraischen Abhängigkeit von $x_1, \ldots, x_n$ gibt es ein Polynom $f \in k[X_1, \ldots, X_n] \setminus \{0\}$, so dass $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Nach Lemma 7.1.3 existieren $r_1, \ldots, r_{n-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, so dass mit
$$Y_i := X_i - X_n^{r_i}$$
der Leitkoeffizient c von $f \in k[Y_1, \ldots, Y_{n-1}][X_n]$ eine Einheit ist. Nun definiere
$$y_i := x_i - x_n^{r_i}$$
für $i = 1, \ldots, n-1$. Sei $B := k[y_1, \ldots, y_{n-1}]$. Da $k[Y_1, \ldots, Y_{n-1}, X_n] = k[X_1, \ldots, X_n]$ gilt, folgt auch
$$B[x_n] = k[y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n] = k[x_1, \ldots, x_n] = A.$$
Nun sei $g \in B[X_n]$ das Bild von f unter dem k-Algebrenhomomorphismus
$$\begin{aligned} k[X_1, \ldots, X_n] = k[Y_1, \ldots, Y_{n-1}, X_n] &\to B[X_n] \\ Y_i &\mapsto y_i \\ X_n &\mapsto X_n \end{aligned}$$
Der Leitkoeffient von g ist $c(y_1, \ldots, y_n) = c$, eine Einheit, und es gilt
$$g(x_n) = f(y_1 + x_n^{r_1}, \ldots, y_{n-1} + x_1^{r_{n-1}}, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$
Also ist x_n ganz über B. □

Satz 7.1.5 (Noether-Normalisierung)**.** *Sei k ein Körper und sei A eine endlich erzeugte k-Algebra. Dann existieren $z_1, \ldots, z_m$ algebraisch unabhängig über k, so dass $k[z_1, \ldots, z_m] \subseteq A$ eine endliche Ringerweiterung ist.*

Beweis. Der Beweis benutzt Induktion über die minimale Anzahl n von Erzeugern von A über k. Ist $n = 0$, so ist $A = k$ und nichts ist zu zeigen. Wir nehmen an $n > 0$ und für jede k-Algebra, die von höchstens $n - 1$ Elementen erzeugt werden kann gelte die Behauptung. Sei $x_1, \dots, x_n$ ein Erzeugendensystem von A. Falls $x_1, \dots, x_n$ algebraisch unabhängig über k sind, ist wiederum nichts zu zeigen. Also seien $x_1, \dots, x_n$ algebraisch abhängig über k. Nach Lemma 7.1.2 gibt es $y_1, \dots, y_{n-1} \in A$, so dass x_n ganz ist über $k[y_1, \dots, y_{n-1}] =: B$ und $k[y_1, \dots, y_{n-1}, x_n] = A$. Wir wenden die Induktionsannahme auf B an. Es gibt $z_1, \dots, z_m \in B$, algebraisch unabhängig über k, so dass $k[z_1, \dots, z_m] \subseteq B$ ganz ist. Dann ist auch $k[z_1, \dots, z_m] \subseteq B[x_n] = A$ ganz und somit endlich. □

7.1.6. Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Sei $A = A(X)$ der Koordinatenring. Nach Noether-Normalisierung existieren $z_1, \dots, z_m \in A$, so dass $B := k[z_1, \dots, z_m] \subseteq A$ eine endliche Erweiterung ist und $z_1, \dots, z_m$ algebraisch unabhängig über k sind. Der Ring B ist reduziert, also entspricht ihm eine Varietät Z. Da $z_1, \dots, z_m$ algebraisch unabhängig über k sind, ist der k-Algebrenhomomorphismus

$$k[Z_1, \dots, Z_m] \to B,\ Z_i \mapsto z_i$$

ein Isomorphismus. Demnach ist $Z \cong \mathbb{A}^m$. Wir erhalten also einen endlichen Morphismus $X \to \mathbb{A}^m$, der (siehe 6.5.8) surjektiv ist.
Zusammenfassend sagt Noether-Normalisierung uns also, dass jede affine Varietät endlich und surjektiv auf einen affinen Raum abbildet.

Bemerkung 7.1.7. Der Beweis der noetherschen Normalisierung lief, grob zusammengefasst, wie folgt:

$$\text{Lemma 7.1.3} \Rightarrow \text{Lemma 7.1.2} \Rightarrow \text{Noether-Normalisierung.}$$

über einem unendlichen Körper kann man Lemma 7.1.2 einfacher beweisen.

Lemma 7.1.8. *Sei k ein unendlicher Körper. Sei $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ ein Polynom mit $f \neq 0$. Für $b_1, \dots, b_{n-1} \in k$ definieren wir neue Variablen*

$$Y_i := X_i - b_i X_n$$

für $i = 1, \dots, n-1$. Die Variablen $Y_1, \dots, Y_{n-1}, X_n$ sind algebraisch unabhängig und es gilt

$$k[X_1, \dots, X_n] = k[Y_1, \dots, Y_{n-1}, X_n] = k[Y_1, \dots, Y_{n-1}][X_n].$$

Sei $c \in k[Y_1, \dots, Y_{n-1}]$ der Leitkoeffizient von $f \in k[Y_1, \dots, Y_{n-1}][X_n]$. Es gibt eine Wahl von $b_1, \dots, b_{n-1}$, so dass $c \in k^\times$ ist.

Beweis. Sei $f = f_d + f_{d-1} + \ldots + f_0$, wobei $f_r \in k[X_1, \dots, X_n]$ homogen vom Totalgrad r sei. Dann ist also

$$f_r = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \\ m_1 + \ldots + m_n = r}} a_m X_1^{m_1} \ldots X_n^{m_n}.$$

Demnach ist

$$\begin{aligned}
f_r &= f_r(X_1, \ldots, X_n) \\
&= f_r(Y_1 + b_1 X_n, \ldots, Y_{n-1} + b_{n-1} X_n, X_n) \\
&= \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \\ m_1 + \ldots + m_n = r}} a_m \left(\prod_{i=1}^{n-1} (Y_i + b_i X_n)^{m_1} \right) X_n^{m_n} \\
&= \underbrace{\left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \\ m_1 + \ldots + m_n = r}} a_m b_1^{m_1} \ldots b_{n-1}^{m_{n-1}} \right)}_{= f_r(b_1, \ldots, b_{n-1}, 1)} X_n^r + \text{Terme von kleinerem Grad in } X_n.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$f = f_d(b_1, \ldots, b_{n-1}, 1) X_n^d + \text{Terme von kleinerem Grad in } X_n.$$

Es genügt also zu zeigen, dass $f_d(b_1, \ldots, b_{n-1}, 1) \neq 0$ ist für eine geeignete Wahl von $b_1, \ldots, b_{n-1} \in k$. Um das zu zeigen, schreiben wir

$$f_d = \sum_{j=0}^{d} f_{d,j} X_n^{d-j}$$

für eindeutig bestimmte $f_{d,0}, \ldots, f_{d,d} \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Da f homogen vom Grad d ist, ist $f_{d,j}$ homogen vom Grad j. Wegen $f_d \neq 0$ gibt es ein j, so dass $f_{d,j} \neq 0$. Ferner ist

$$f_d(X_1, \ldots, X_{n-1}, 1) = \sum_{j=0}^{d} f_{d,j}$$

und das muss ungleich Null sein, denn alle $f_{d,j}$ haben verschiedenen Grad und mindestens eines ist ungleich 0. Also ist $f_d(X_1, \ldots, X_{n-1}, 1) \in k[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ ein von Null verschiedenes Polynom. Dann kann es nach dem nachfolgenden Lemma nicht auf ganz k^{n-1} verschwinden. □

Lemma 7.1.9. *Sei k ein unendlicher Körper. Sei* $\mathrm{Abb}(k^n, k)$ *die Menge der Abbildungen $k^n \to k$. Sie wird eine k-Algebra mit der offensichtlichen Addition und Multiplikation von Funktionen. Die Abbildung $\varphi : k[X_1, \ldots, X_n] \to \mathrm{Abb}(k^n, k)$ definiert durch*

$$\varphi(f) : k^n \to k, \ (b_1, \ldots, b_n) \mapsto f(b_1, \ldots, b_n)$$

ist ein injektiver k-Algebrenhomomorphismus.

Beweis. Übung. □

Beispiel 7.1.10. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und betrachte die k-Algebra $A = k[X_1, X_2]/(X_1 X_2 - 1)$. Die Algebra wird erzeugt von x_1, x_2, den Restklassen von X_1 und X_2. Die Elemente x_1, x_2 sind algebraisch abhängig, und x_1 ist algebraisch unabhängig über k. Allerdings ist x_2 nicht ganz über $k[x_1]$. Das sieht man mit einem geometrischen Argument: Angenommen die Ringerweiterung $k[x_1] \subseteq A$ wäre ganz. Dann gäbe es zu jedem maximalen Ideal $\mathfrak{n}$ von $k[x_1] = k[X_1]$ ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von A mit $\mathfrak{m} \cap k[x_1] = \mathfrak{n}$. Das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A entspricht einem maximalen Ideal

$\mathfrak{m}' \in k[X_1, X_2]$ mit $X_1X_2 - 1 \in \mathfrak{m}'$. Jedes maximale Ideal von $k[X_1, X_2]$ ist von der Form $(X_1 - a_1, X_2 - a_2)$ (Hilberts Nullstellensatz; kommt noch). Da $X_1X_2 - 1 \in \mathfrak{m}'$ sein muss, gilt die Relation $a_1a_2 = 1$. Nun ist

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap k[x_1] = \mathfrak{m}' \cap k[X_1] = (X_1 - a_1).$$

Aber für $\mathfrak{n} = (X_1)$ müsste dann $a_1 = 0$ sein, also $\mathfrak{m}' = (X_1, X_2 - a_2)$. Kein Ideal dieser Form enthält das Polynom $X_1X_2 - 1$.
Geometrisch bedeutet das folgendes: Die zugehörige Varietät X zu A ist die Hyperbel. Die Projektion auf die X_1-Achse entlang der X_2-Achse ist aber nicht surjektiv; der Nullpunkt besitzt kein Urbild.

[Bild kommt noch!]

Nun sehen wir auch geometrisch, wie wir diesen Defekt reparieren können. Wenn wir die X_2-Achse kippen und entlang dieser gekippten Ursprungsgerade projizieren, so wird jeder Punkt auf der X_1-Achse getroffen.

[Noch'n Bild. Kommt auch noch.]

Algebraisch bedeutet das, dass wir $y_1 := x_1 - \varepsilon x_2$ für $\varepsilon \in k^\times$ betrachten. Dann ist x_2 ganz über $k[y_1]$, denn

$$0 = x_1x_2 - 1 = (y_1 + \varepsilon x_2)x_2 - 1 = \varepsilon x_2^2 + y_1x_2 - 1,$$

eine ganze Gleichung. Analysieren wir noch die zugehörige Abbildung, um zu sehen, dass die Einbettung $k[y_1] \hookrightarrow A$ tatsächlich der Projektion entlang der gekippten X_2-Achse entspricht. Diese Achse gegeben durch die Gleichung $a_1 = \varepsilon a_2$, wobei $(a_1, a_2) \in \mathbb{A}^2$ ist. Ferner haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[r, mapsto] & X_1 - \varepsilon X_2 \\[-20pt] k[Y_1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & k[X_1, X_2] \arrow[d] \\ k[y_1] \arrow[r, hook] & A \end{tikzcd}$$

also ist die durch $k[y_1] \hookrightarrow A$ definierte reguläre Abbildung $f : X \to \mathbb{A}^1$ gegeben durch

$$\begin{tikzcd} (a_1, a_2) \arrow[r, mapsto] & a_1 - \varepsilon a_2 \\[-20pt] \mathbb{A}^2 \arrow[r] & \mathbb{A}^1 \\[-15pt] \cup\!| & \\[-15pt] X \arrow[uur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

7.2. **Transzendenzgrad.**

Definition 7.2.1. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Eine Familie $(x_t)_{t \in T} \in L^T$ heißt *Transzendenzbasis* von L über K, wenn

- $(x_t)_{t \in T}$ algebraisch unabhängig ist über K
- $K(x_t)_{t \in T} \subseteq L$ algebraisch ist.

Proposition 7.2.2. *Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und $(x_t)_{t \in T} \in L^T$.*

(1) Falls $(x_t)_{t \in T}$ eine maximale algebraisch unabhängige Familie ist, so ist $(x_t)_{t \in T}$ eine Transzendenzbasis.

(2) Ist $(x_t)_{t\in T}$ eine algebraisch unabhängige Familie, so lässt sie sich zu einer Transzendenzbasis erweitern.
(3) Falls $(x_t)_{t\in T}$ eine minimale Familie ist, so dass $K(x_t)_{t\in T} \subseteq L$ algebraisch ist, so ist $(x_t)_{t\in T}$ eine Transzendenzbasis.
(4) Ist $(x_t)_{t\in T}$ eine Familie, so dass $K(x_t)_{t\in T} \subseteq L$ algebraisch ist, so lässt sich $(x_t)_{t\in T}$ zu einer Transzendenzbasis verkürzen.
(5) Jede Körpererweiterung besitzt eine Transzendenzbasis.

Beweis. Ähnlich wie die analogen Aussagen für Basen von Vektorräumen. □

Lemma 7.2.3. *Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, seien $x_1, \ldots, x_m \in L$ algebraisch unabhängig über K und $y_1, \ldots, y_n \in L$, so dass $K(y_1, \ldots, y_n) \subseteq L$ algebraisch ist. Dann ist $m \leq n$ und es gibt $1 \leq j_{m+1} < \ldots < j_n \leq n$, so dass*

$$K(x_1, \ldots, x_m, y_{j_{m+1}}, \ldots, y_{j_n}) \subseteq L$$

algebraisch ist.

Beweis. Induktion nach m.
Sei $m = 1$. Natürlich kann in diesem Fall nicht $n = 0$ sein. Sei $s \geq 0$ die minimale ganze Zahl, für die es Indizes $1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq n$ und ein Polynom $f \in k[X_1, Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_s}]\backslash\{0\}$ so gibt, dass

$$f(x_1, y_{i_1}, \ldots, y_{i_s}) = 0.$$

So ein s existiert, da x_1 algebraisch über $K(y_1, \ldots, y_n)$ ist. Außerdem ist $s \geq 1$, da x_1 transzendent über K ist. Ohne Einschränkung nehmen wir $\{i_1, \ldots, i_s\} = \{1, \ldots, s\}$ an. Wir schreiben

$$f = \sum_{d\geq 0} f_d(X_1, Y_2, \ldots, Y_s)Y_1^d.$$

Dann muss es ein $d \geq 1$ geben, so dass $f_d \neq 0$ (denn sonst wäre $f = f_0 \in K[X_1, Y_2, \ldots, Y_s]$, was ein Widerspruch zur Minimalität von s ist). Außerdem gilt $f_d(x_1, y_2, \ldots, y_s) \neq 0$ (wieder aufgrund der Minimalität von s). Damit haben wir gezeigt, dass y_1 algebraisch über $K(x_1, y_2, \ldots, y_s)$ ist. Insbesondere ist y_1 algebraisch über $K(x_1, y_2, \ldots, y_n)$ und somit haben wir zwei algebraische Erweiterungen

$$K(x_1, y_2, \ldots, y_n) \subseteq K(x_1, y_1, \ldots, y_n) \subseteq L.$$

Somit ist $K(x_1, y_2, \ldots, y_n) \subseteq L$ algebraisch.
Sei $m > 1$. Da $x_1, \ldots, x_{m-1}$ algebraisch unabhängig über K sind, ist $m - 1 \leq n$ und (nach Umnummerieren) ist $K(x_1, \ldots, x_{m-1}, y_m, \ldots, y_n) \subseteq L$ algebraisch. Außerdem ist x_m transzendent über $K(x_1, \ldots, x_{m-1})$. Wir wenden den Induktionsanfang an auf die Erweiterung $K(x_1, \ldots, x_{m-1}) \subseteq L$, die algebraisch unabhängige Familie (x_m) und die Familie $(y_m, \ldots, y_n)$. Dann bekommen wir $1 \leq n - m + 1$ und (nach etwaigem Umnummerieren)

$$K(x_1, \ldots, x_{m-1})(x_m, y_{m+1}, \ldots, y_n) \subseteq L$$

algebraisch. □

Korollar 7.2.4. *Sei $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Transzendenzbasis einer Körpererweiterung $K \subseteq L$. Dann ist jede Transzendenzbasis von $K \subseteq L$ endlich und hat Kardinalität n.*

Bemerkung 7.2.5. Tatsächlich kann man zeigen, dass je zwei Transzendenzbasen einer Erweiterung die gleiche Kardinalität haben. Man verwendet zum Beweis den Satz von Cantor–Schröder–Bernstein. Details finden Sie in Hungerfords Buch [5, VI, Thm. 1.9].

Definition 7.2.6. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Sei $(x_t)_{t \in T}$ eine Transzendenzbasis von $K \subseteq L$. Dann heißt

$$\operatorname{trdeg}(L|K) := |T| \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \sqcup \{\infty\}$$

der *Transzendenzgrad* von $K \subseteq L$.

7.2.7. Sind $K \subseteq L \subseteq M$ Körpererweiterungen, so ist $\operatorname{trdeg}(M|K) = \operatorname{trdeg}(M|L) + \operatorname{trdeg}(L|K)$.

Korollar 7.2.8. *Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung von Transzendenzgrad $n < \infty$. Seien $x_1, \dots, x_n \in L$.*

(1) Sind $x_1, \dots, x_n$ algebraisch unabhängig über K, so ist $(x_1, \dots, x_n)$ eine Transzendenzbasis von $K \subseteq L$.

(2) Falls $K(x_1, \dots, x_n) \subseteq L$ algebraisch ist, so ist $(x_1, \dots, x_n)$ eine Transzendenzbasis von $K \subseteq L$.

7.3. **Starke Form der Noether-Normalisierung.**

Lemma 7.3.1. *Sei $A \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung und sei B ein Integritätsbereich. Dann ist $Q(A) \subseteq Q(B)$ eine algebraische Körpererweiterung.*

Beweis. Sei $S := A \setminus \{0\}$. Dann ist $Q(A) = S^{-1}A \to S^{-1}B$ ebenfalls eine ganze Ringerweiterung. Da $Q(A)$ ein Körper ist, ist nach Lemma 5.2.2 auch $S^{-1}B$ ein Körper. Also ist $S^{-1}B = Q(S^{-1}B) = Q(B)$. □

Lemma 7.3.2. *Sei k ein Körper und sei B eine endlich erzeugte k-Algebra. Seien $x_1, \dots, x_n \in B$ und $y_1, \dots, y_n \in B$. Seien $k[x_1, \dots, x_n] \subseteq B$ und $k[y_1, \dots, y_n] \subseteq B$ beide ganz und seien $x_1, \dots, x_n$ algebraisch unabhängig über k. Dann sind auch $y_1, \dots, y_n$ algebraisch unabhängig über k.*

Beweis. Da $k[x_1, \dots, x_n] =: A$ isomorph zu einem Polynomring über k ist, ist A ein Integritätsbereich. Also ist $(0) \in \operatorname{Spec} A$. Wir wenden Lying-Over auf die ganze Erweiterung $A \subseteq B$ an und erhalten ein Primideal $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$, so dass $\mathfrak{q} \cap A = (0)$. (Man kann leicht zeigen, dass $\mathfrak{q}$ ein minimales Primideal von B ist; das werden wir hier allerdings nicht verwenden.) Betrachte die ganze Erweiterung $A \hookrightarrow B/\mathfrak{q}$. Die induziert nach Lemma 7.3.1 eine algebraische Körpererweiterung

$$Q(A) = k(x_1, \dots, x_n) \subseteq Q(B/\mathfrak{q})$$

und damit ist $(x_1, \dots, x_n)$ eine Transzendenzbasis von $k \subseteq Q(B/\mathfrak{q})$. Nun betrachte die Unteralgebra $A' := k[y_1, \dots, y_n]$ und das Primideal $\mathfrak{p}' := \mathfrak{q} \cap A'$. Seien $\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_n$ die Nebenklassen von $y_1, \dots, y_n$ in $A'/\mathfrak{p}'$. Da $A'/\mathfrak{p}' \hookrightarrow B/\mathfrak{q}$ eine ganze Ringerweiterung ist, ist die Körpererweiterung

$$Q(A'/\mathfrak{p}') = k(\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_n) \subseteq Q(B/\mathfrak{q})$$

algebraisch. Dann liefert Korollar 7.2.8(2), dass auch $\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_n$ eine Transzendenzbasis von $k \subseteq Q(B/\mathfrak{q})$ ist. Somit sind $\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_n$ insbesondere algebraisch unabhängig über k.

Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y_i \arrow[r, mapsto] & y_i \\
k[Y_1, \ldots, Y_n] \arrow[r] \arrow[dr] & A' \arrow[d] \\
& A'/\mathfrak{p}'
\end{tikzcd}$$

Der diagonal verlaufende Homomorphismus ist injektiv. Also ist der horizontale ebenfalls injektiv und damit sind $y_1, \ldots, y_n$ ebenfalls algebraisch unabhängig über k. (Es gilt zudem $\mathfrak{p}' = (0)$, aber das brauchen wir hier nicht.) □

Lemma 7.3.3. *Sei k ein Körper. Betrachte den Polynomring $A := k[X_1, \ldots, X_n]$ und ein Ideal $I \subsetneqq A$. Dann existiert $h \in \{0, \ldots, n\}$ und $z_1, \ldots, z_n \in A$, so dass*

- *$z_1, \ldots, z_n$ algebraisch unabhängig über k,*
- *$k[z_1, \ldots, z_n] \subseteq A$ endlich,*
- *$I \cap k[z_1, \ldots, z_n] = (z_1, \ldots, z_h)$.*

Beweis. Induktion nach n. Da im Fall $n = 0$ nichts zu zeigen ist, gehen wir direkt zum Fall $n > 0$. Ist $I = (0)$, so können wir $z_i = X_i$ wählen. Also nehmen wir $I \neq (0)$ an. Wir wählen ein $z_1 \in I \setminus \{0\}$. Dann ist $z_1 \notin k$. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass X_1 in einem Monom von z_1 auftaucht. Wir definieren abhängig von $r_2, \ldots, r_n$ neue Variablen

$$y_i := X_i - X_1^{r_i}$$

für $i = 2, \ldots, n$. Lemma 7.1.3 garantiert uns die Existenz von $r_2, \ldots, r_n$, so dass z_1 von der Form

$$z_1 = cX_1^d + g_1(y_2, \ldots, y_n)X_1^{d-1} + \ldots + g_d(y_2, \ldots, y_n)$$

ist mit $c \in k^\times$. Nach Annahme ist $d \geq 1$. Also ist X_1 ganz über $k[z_1, y_2, \ldots, y_n]$. Ferner ist

$$A = k[X_1, \ldots, X_n] = k[X_1, y_2, \ldots, y_n] = k[z_1, y_2, \ldots, y_n][X_1].$$

Somit wird A über $k[z_1, y_2, \ldots, y_n]$ von einem ganzen Element erzeugt. Daher ist die Erweiterung

$$k[z_1, y_2, \ldots, y_n] \subseteq A$$

ganz. Da $X_1, \ldots, X_n$ algebraisch unabhängig sind, sind auch $z_1, y_2, \ldots, y_n$ algebraisch unabhängig nach Lemma 7.3.2. Somit ist die k-Unteralgebra $k[z_1, y_2, \ldots, y_n]$ isomorph zu einem Polynomring. Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf den Polynomring $k[y_2, \ldots, y_n]$ und das Ideal $J := I \cap k[y_2, \ldots, y_n]$ an. Demzufolge existieren $z_2, \ldots, z_n \in k[y_2, \ldots, y_n]$ und ein $h \in \{1, \ldots, n\}$, so dass

- $z_2, \ldots, z_n$ algebraisch unabhängig über k,
- $k[z_2, \ldots, z_n] \subseteq k[y_2, \ldots, y_n]$ endlich,
- $J \cap k[z_2, \ldots, z_n] = (z_2, \ldots, z_h)$.

Dann erhalten wir endliche Ringerweiterungen

$$k[z_1, z_2, \ldots, z_n] \subseteq k[z_1, y_2, \ldots, y_n] \subseteq A,$$

also sind $z_1, \dots, z_n$ algebraisch unabhängig über k (wieder Lemma 7.3.2). Da $z_1 \in I$ ist, folgt mit Lemma 7.3.4 außerdem

$$I \cap k[z_1, \dots, z_n] = (I \cap k[z_2, \dots, z_n]) + (z_1) = (z_1, \dots, z_h).$$

$\square$

Lemma 7.3.4. *Sei I ein Ideal einer k-Algebra A und seien $x, y \in A$ mit $x \in I$. Dann ist $I \cap k[x, y] = (x) + (I \cap k[y])$.*

Beweis. Die Inklusion „$\supseteq$" ist offensichtlich. Sei $f \in I \cap k[x, y]$ und schreibe es als $f = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} x^i y^j$. Dann ist

$$\sum_{j \geq 0} a_{0j} y^j = f - \sum_{i>0, j \geq 0} \underbrace{a_{ij} x^i}_{\in (x) \subseteq I} \cdot y^j \in I \cap k[y]$$

und damit ist $f = \sum_{i>0, j \geq 0} a_{ij} x^i y^j + \sum_{j \geq 0} a_{0j} y^j \in (x) + (I \cap k[y])$. $\square$

Satz 7.3.5 (Noether-Normalisierung, starke Form)**.** *Seien k ein Körper, A eine endlich erzeugte k-Algebra und*

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_d \subsetneqq A$$

eine Kette von Idealen von A. Dann existieren $m \geq 0$, $z_1, \dots, z_m \in A$ und Indizes $0 \leq h_1 \leq \ldots \leq h_d \leq m$, so dass:

- *$z_1, \dots, z_m$ algebraisch unabhängig über k,*
- *$k[z_1, \dots, z_m] \subseteq A$ endlich,*
- *$I_l \cap k[z_1, \dots, z_m] = (z_1, \dots, z_{h_l})$ für alle $l = 1, \dots, d$.*

Beweis. Der Beweis verläuft in 2 Schritten. Zunächst zeigen wir, dass der Satz für den Polynomring $k[X_1, \dots, X_n]$ gilt. Im zweiten Schritt führen wir den allgemeinen Fall auf den ersten zurück.
Schritt 1. Sei $A = k[X_1, \dots, X_n]$. Induktion über d. Der Fall $d = 1$ wurde bereits in Lemma 7.3.3 bewiesen. Darin ist $m = n$. Gelte also $d > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung existieren $y_1, \dots, y_n \in A$ und $0 \leq h_1 \leq \ldots \leq h_{d-1} \leq n$, so dass

- $y_1, \dots, y_n$ algebraisch unabhängig über k,
- $k[y_1, \dots, y_n] \subseteq A$ endlich,
- $I_l \cap k[y_1, \dots, y_n] = (y_1, \dots, y_{h_l})$ für alle $l = 1, \dots, d-1$.

Schreibe abkürzend $s := h_{d-1}$. Dann ist $k[y_{s+1}, \dots, y_n]$ ein Polynomring. Betrachte darin das Ideal $J := I_d \cap k[y_{s+1}, \dots, y_n]$. Das ist ein echtes Ideal von $k[y_{s+1}, \dots, y_n]$. Lemma 7.3.3 liefert die Existenz von $z_{s+1}, \dots, z_n \in k[y_{s+1}, \dots, y_n]$ und eines $h_d \in \{s, \dots, n\}$, so dass

- $z_{s+1}, \dots, z_n$ algebraisch unabhängig über k,
- $k[z_{s+1}, \dots, z_n] \subseteq k[y_{s+1}, \dots, y_n]$ endlich,
- $I_d \cap k[z_{s+1}, \dots, z_n] = (z_{s+1}, \dots, z_{h_d})$.

Definiere $z_i := y_i$ für $i = 1, \dots, s$. Dann sind $z_1, \dots, z_n$ algebraisch unabhängig über k (Lemma 7.3.2) und

$$k[z_1, \dots, z_n] \subseteq k[y_1, \dots, y_n] \subseteq A$$

sind endliche Erweiterungen. Es gilt ferner für $l = 1, \dots, d-1$

$$I_l \cap k[z_1, \dots, z_n] = I_l \cap k[y_1, \dots, y_s, z_{s+1}, \dots, z_n] = (y_1, \dots, y_{h_l}) = (z_1, \dots, z_{h_l})$$
$$I_d \cap k[z_1, \dots, z_n] = (z_1, \dots, z_s) + (I_d \cap k[z_{s+1}, \dots, z_n]) = (z_1, \dots, z_s, z_{s+1}, \dots, z_{h_d}).$$

Schritt 2. Da A eine endlich erzeugte k-Algebra ist, gibt es einen surjektiven k-Algebrenhomomorphismus $f : k[X_1, \dots, X_n] \to A$. Betrachte in $k[X_1, \dots, X_n] =: B$ die Idealkette

$$J_0 \subseteq J_1 \subseteq \ldots \subseteq J_d$$

wobei $J_0 := \ker(f)$ und $J_l := f^{-1}(I_i)$ für $l = 1, \dots, d$ seien. Nach Schritt 1 existieren $y_1, \dots, y_n \in B$ und $0 \le j_0 \le j_1 \le \ldots j_d \le n$, so dass

- $y_1, \dots, y_n$ algebraisch unabhängig über k,
- $k[y_1, \dots, y_n] \subseteq B$ endlich,
- $J_l \cap k[y_1, \dots, y_n] = (y_1, \dots, y_{j_l})$ für $l = 0, \dots, d$.

Nun definiere $m := n - j_0$, sowie

$$z_i := f(y_{j_0+i})$$

für $i = 1, \dots, m$. Die Komposition

$$g : k[y_{j_0+1}, \dots, y_n] \subseteq k[y_1, \dots, y_n] \subseteq k[X_1, \dots, X_n] \xrightarrow{f} A$$

bildet y_{j_0+i} auf z_i ab. Ferner ist

$$\begin{aligned}\ker(g) &= (\ker(f) \cap k[y_1, \dots, y_n]) \cap k[y_{j_0+1}, \dots, y_n] \\ &= (y_1, \dots, y_{j_0}) \cap k[y_{j_0+1}, \dots, y_n] = (0),\end{aligned}$$

also ist g injektiv. Da $y_{j_0+1}, \dots, y_n$ algebraisch unabhängig über k sind, ist $k[y_{j_0+1}, \dots, y_n]$ ein Polynomring. Daher g injektiv ist, sind $z_1, \dots, z_m$ algebraisch unabhängig über k. Ferner ist $k[z_1, \dots, z_m] \subseteq A$ endlich, denn wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} k[y_1, \dots, y_n] \arrow[r, hook, "\text{endlich}"] \arrow[d, two heads, "\overline{f}"] & k[X_1, \dots, X_N] \arrow[d, two heads, "f \text{ endlich}"] \\ k[z_1, \dots, z_m] \arrow[r, hook] & A. \end{tikzcd}$$

Schließlich gilt für $l = 1, \dots, d$:

$$\begin{aligned}I_l \cap k[z_1, \dots, z_m] &= \overline{f}(\overline{f}^{-1}(I_l \cap k[z_1, \dots, z_m])) \\ &= \overline{f}(J_l \cap k[y_1, \dots, y_n]) \\ &= \overline{f}(y_1, \dots, y_{j_l}) \\ &= (z_1, \dots, z_{j_l - j_0}).\end{aligned}$$

Wir definieren $h_l := j_l - j_0$. Damit ist der Beweis beendet. $\square$

Korollar 7.3.6. *Sei $A \subseteq B$ eine Ringerweiterung, B endlich erzeugt als A-Algebra und A ein Integritätsbereich. Dann gibt es ein $s \in A \setminus \{0\}$ und $y_1, \dots, y_n \in B$, so dass*

- *$y_1, \dots, y_n$ algebraisch unabhängig über $Q(A)$,*
- *$A[s^{-1}][y_1, \dots, y_n] \subseteq B[s^{-1}]$ endlich.*

Beweis. Sei $S = A \setminus \{0\}$ und $K := Q(A) = S^{-1}A$. Wir erhalten eine Erweiterung $K \subseteq S^{-1}B$. Da $S^{-1}B$ eine endlich erzeugte K-Algebra ist, können wir Noether-Normalisierung anwenden – die gewöhnliche Form reicht hier aus. Es gibt demnach $z_1, \dots, z_n \in S^{-1}B$, algebraisch unabhängig über K, so dass

$$K[z_1, \dots, z_n] \subseteq S^{-1}B$$

endlich ist. Sei $z_i = y_i/s_i$ mit $y_i \in B$ und $s_i \in S$ für $i = 1, \dots, n$. Dann ist auch $K[y_1, \dots, y_n] \subseteq S^{-1}B$ endlich (da $s_i \in K^\times$, kann man aus einer ganzen Gleichung für $y \in S^{-1}B$ über $K[z_1, \dots, z_n]$ leicht eine ganze Gleichung für y über $K[y_1, \dots, y_n]$ machen). Zudem sind $y_1, \dots, y_n$ algebraisch unabhängig über K nach Lemma 7.3.2. Seien $c_1, \dots, c_N \in B$, so dass $B = A[c_1, \dots, c_N]$. Es gibt normierte Polynome $f_i(t) \in K[y_1, \dots, y_n][t]$, so dass $f_i(c_i) = 0$ in $S^{-1}B$ ist. Die endlich vielen Polynome $f_1, \dots, f_N$ haben nur endlich viele Koeffizienten. Daher finden wir ein $u \in S$, so dass

$$uf_i \in A[y_1, \dots, y_n][t]$$

für alle $i = 1, \dots, N$. Also liegen $f_i \in A[u^{-1}][y_1, \dots, y_n][t]$. (Genauer gesagt liegt f_i im Bild von $A[u^{-1}][y_1, \dots, y_n][t] \to K[y_1, \dots, y_n][t]$. Da $A[y_1, \dots, y_n]$ aber ein Integritätsbereich ist, ist diese Abbildung injektiv.) Betrachte $f_i(c_i)$ in $B[u^{-1}]$. Es liegt im Kern von $B[u^{-1}] \to S^{-1}B$. Also gibt es $v \in S$, so dass $vf_i(c_i) = 0$ in $B[u^{-1}]$ für alle $i = 1, \dots, N$. Definieren wir $s := uv$ und betrachten f_i als ein Polynom über $A[s^{-1}][y_1, \dots, y_n]$, so ist $f_i(c_i) = 0$ in $B[s^{-1}]$. Daher sind die Elemente $c_1, \dots, c_N$ ganz über $A[s^{-1}][y_1, \dots, y_n]$. Weil $c_1, \dots, c_N$ Erzeuger von $B[s^{-1}]$ als $A[s^{-1}]$-Algebra sind, ist

$$A[s^{-1}][y_1, \dots, y_n] \subseteq B[s^{-1}]$$

eine endliche Ringerweiterung. □

Korollar 7.3.7. *Sei $A \subseteq B$ eine Ringerweiterung, B endlich erzeugt als A-Algebra und A ein Integritätsbereich. Sei $s \in A \setminus \{0\}$ wie in Korollar 7.3.6. Dann gibt es zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ von $A[s^{-1}]$ ein Primideal $\mathfrak{q}$ von $B[s^{-1}]$, so dass*

- $\mathfrak{q} \cap A[s^{-1}] = \mathfrak{p}$ *und*
- $Q(A/(\mathfrak{p} \cap A)) \hookrightarrow Q(B/(\mathfrak{q} \cap B))$ *eine endliche Körpererweiterung ist.*

Beweis. Wähle zu s noch $y_1, \dots, y_n$ wie in Korollar 7.3.6. Da $y_1, \dots, y_n$ algebraisch unabhängig über $K = Q(A)$ sind, ist $A[s^{-1}][y_1, \dots, y_n]$ isomorph zu einem Polynomring über $A[s^{-1}]$. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $A[s^{-1}]$ und betrachte das Ideal

$$\mathfrak{p}' := \mathfrak{p} \cdot A[s^{-1}][y_1, \dots, y_n] + (y_1, \dots, y_n).$$

Dann ist $A[s^{-1}][y_1, \dots, y_n]/\mathfrak{p}' \cong A[s^{-1}]/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich. Somit ist $\mathfrak{p}'$ ein Primideal von $A[s^{-1}][y_1, \dots, y_n]$. Lying-Over liefert dann die Existenz eines Primideals $\mathfrak{q}$ von $B[s^{-1}]$, so dass $\mathfrak{q} \cap A[s^{-1}][y_1, \dots, y_n] = \mathfrak{p}'$. Dann folgt aber

$$\mathfrak{q} \cap A[s^{-1}] = \mathfrak{p}' \cap A[s^{-1}] = \mathfrak{p}.$$

Ferner haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A[s^{-1}][y_1, \dots, y_n] \arrow[rr, hook, "\text{endlich}"] \arrow[d] & & B[s^{-1}] \arrow[d] \\
A[s^{-1}][y_1, \dots, y_n]/\mathfrak{p}' \arrow[r, equal] & A[s^{-1}]/\mathfrak{p} \arrow[r, hook] & B[s^{-1}]/\mathfrak{q}
\end{tikzcd}$$

also ist $A[s^{-1}]/\mathfrak{p} \hookrightarrow B[s^{-1}]/\mathfrak{q}$ eine endliche Ringerweiterung. Der Übergang zu den Quotientenkörpern liefert dann, dass

$$Q(A/(\mathfrak{p}\cap A)) = Q(A[s^{-1}]/\mathfrak{p}) \hookrightarrow Q(B[s^{-1}]/\mathfrak{q}) = Q(B/(\mathfrak{q}\cap B))$$

eine endliche Körpererweiterung ist. □

7.4. **Jacobson-Ringe.**

Definition 7.4.1. Ein Ring A heißt *Jacobson-Ring*, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A gilt

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)\\ \mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{p}}} \mathfrak{m}.$$

Lemma 7.4.2. *Für einen Ring A sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) A ist Jacobson.
(2) Für jedes echte Ideal $I \subsetneqq A$ ist $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}(A),\mathfrak{m}\supseteq I}\mathfrak{m}$.
(3) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A und jedes $a\in A\setminus\mathfrak{p}$ existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von A mit $\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{m}$ und $a\notin\mathfrak{m}$.

Beweis. Offensichtlich. □

Beispiel 7.4.3.

(1) Körper sind Jacobson-Ringe.
(2) Artinsche Ringe sind Jacobson.
(3) $\mathbb{Z}$ ist Jacobson.
(4) Ist k ein Körper, so ist $k[t]$ Jacobson.
(5) $\mathbb{Z}_{(p)}$ ist nicht Jacobson; allgemeiner ist ein lokaler Integritätsbereich genau dann Jacobson, wenn er ein Körper ist.

Proposition 7.4.4. *Sei A ein Jacobson-Ring und sei B eine ganze A-Algebra. Dann ist B Jacobson.*

Beweis. Sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal von B und sei $W := \{\mathfrak{n}\in\mathrm{Max}(B)\mid \mathfrak{n}\supseteq\mathfrak{q}\}$. Definiere $J := \bigcap_{\mathfrak{n}\in W}\mathfrak{n}$. Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{q} = J$ gilt. Sei $\mathfrak{p} := \mathfrak{q}\cap A$. Definiere $V := \{\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}(A)\mid\mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{p}\}$. Da A Jacobson ist, gilt $\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{m}\in V}\mathfrak{m}$. Sei $\mathfrak{m}\in V$. Nach Going-Up existiert $\mathfrak{n}\in\mathrm{Spec}(B)$, so dass $\mathfrak{n}\cap A = \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{q}\subseteq\mathfrak{n}$. Dann sagt uns Korollar 5.2.4, dass $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal von B sein muss. Also ist $\mathfrak{n}\in W$. Das beweist

$$J\cap A = \mathfrak{p}.$$

Nun betrachten wir den ganzen Ringhomomorphismus $A_\mathfrak{p}\to B_\mathfrak{p}$. Das Ideal $\mathfrak{q}\cdot B_\mathfrak{p}$ ist ein Primideal von $B_\mathfrak{p}$ und es gilt $(\mathfrak{q}\cdot B_\mathfrak{p})\cap A = \mathfrak{p}$. Deshalb folgt

$$(\mathfrak{q}\cdot B_\mathfrak{p})\cap A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\cdot A_\mathfrak{p}.$$

Deswegen ist, wiederum nach Korollar 5.2.4, $\mathfrak{q}\cdot B_\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal von $B_\mathfrak{p}$. Das Ideal $J\subseteq B$ erfüllt $(J\cap A)\cap(A\setminus\mathfrak{p}) = \emptyset$. Also ist $J\cdot B_\mathfrak{p}\subsetneqq B_\mathfrak{p}$ ein echtes Ideal. Wegen $\mathfrak{q}\subseteq J$ gilt $\mathfrak{q}\cdot B_\mathfrak{p}\subseteq J\cdot B_\mathfrak{p}$, also muss aufgrund der Maximalität bereits $\mathfrak{q}\cdot B_\mathfrak{p} = J\cdot B_\mathfrak{p}$ gelten. Dann folgt

$$J\subseteq(J\cdot B_\mathfrak{p})\cap B = (\mathfrak{q}\cdot B_\mathfrak{p})\cap B = \mathfrak{q}\subseteq J.$$

□

Satz 7.4.5. *Sei A ein Jacobson-Ring und sei B eine endlich erzeugte A-Algebra. Dann gilt:*

(1) B ist Jacobson.
(2) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{n}$ von B ist $\mathfrak{n} \cap A$ ein maximales Ideal von A und $A/(\mathfrak{n} \cap A) \hookrightarrow B/\mathfrak{n}$ ist eine endliche Körpererweiterung.

Beweis.

(1) Sei $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ und sei $b \in B \setminus \mathfrak{p}$. Wir wollen zeigen, dass ein maximales Ideal $\mathfrak{n}$ von B existiert, so dass $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{n}$ und $b \notin \mathfrak{n}$. Dazu betrachten wir die Ringerweiterung

$$A/(\mathfrak{q} \cap A) \hookrightarrow B/\mathfrak{q} \hookrightarrow (B/\mathfrak{q})[b^{-1}]$$

und definieren $A' := A/(\mathfrak{q} \cap A)$, sowie $B' := (B/\mathfrak{q})[b^{-1}]$. Dann ist A' ein Integritätsbereich und B' eine endlich erzeugte A'-Algebra. Wegen Korollar 7.3.7 existiert $s' \in A' \setminus \{0\}$ mit folgender Eigenschaft:

(*) Für jedes $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A'$ mit $s' \notin \mathfrak{p}'$ gibt es ein $\mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec} B'$, so dass
- $\mathfrak{q}' \cap A' = \mathfrak{p}'$ und
- $Q(A'/\mathfrak{p}') \hookrightarrow Q(B'/\mathfrak{q}')$ ist eine endliche Körpererweiterung.

Wähle ein Urbild $s \in A \setminus \{0\}$ von s' unter $A \twoheadrightarrow A'$. Dann ist $s \notin \mathfrak{q} \cap A$. Da A Jacobson ist, existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von A mit $\mathfrak{q} \cap A \subseteq \mathfrak{m}$ und $s \notin \mathfrak{m}$. Demnach ist $s' \notin \mathfrak{m} \cdot A' = \mathfrak{m}/(\mathfrak{q} \cap A) =: \mathfrak{m}'$ (erinnere, dass $A' = A/(\mathfrak{q} \cap A)$ ist). Außerdem ist $\mathfrak{m}'$ ein maximales Ideal von A'. Wir wenden die Eigenschaft (*) auf $\mathfrak{p}' = \mathfrak{m}'$ an. Demnach gibt es ein Primideal $\mathfrak{n}'$ von B', so dass $\mathfrak{n}' \cap A' = \mathfrak{m}'$ (insbesondere $s' \notin \mathfrak{n}'$) und

$$\begin{tikzcd}
Q(A'/\mathfrak{m}') \arrow[r, hook, "\text{endlich}"] \arrow[d, equal] & Q(B'/\mathfrak{n}') \arrow[d, equal] \\
A'/\mathfrak{m}' \arrow[d, equal] & Q(B/\mathfrak{n}) \\
A/\mathfrak{m} \arrow[r, hook] & B/\mathfrak{n} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

wobei $\mathfrak{n} := \mathfrak{n}' \cap B$ sei. Wir folgern, dass $B/\mathfrak{n}$ ganz ist über dem Körper $A/\mathfrak{m}$ ist. Dann folgt aus Lemma 5.2.2, dass $B/\mathfrak{n}$ ebenfalls ein Körper ist. Also ist $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$. Außerdem ist $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{n}$ und $b \notin \mathfrak{n}$, denn unter der Idealkorrespondenz entsprechen Primideale von $B' = (B/\mathfrak{q})[b^{-1}]$ genau Primidealen von B, die $\mathfrak{q}$ enthalten, aber nicht b.

(2) Im Beweis von (1) haben wir folgendes gezeigt:

(**) Für jedes $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ mit $b \notin \mathfrak{q}$ existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von A mit $\mathfrak{q} \cap A \subseteq \mathfrak{m}$ und ein maximales Ideal $\mathfrak{n}$ von B, so dass $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{n}$, $b \notin \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$ und die Erweiterung $A/\mathfrak{m} \hookrightarrow B/\mathfrak{n}$ endlich ist.

Wir wenden (**) an auf ein maximales Ideal $\mathfrak{q}$ und $b = 1$. Dann erhalten wir $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ und $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$, so dass $\mathfrak{q} \cap A \subseteq \mathfrak{m}$, $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$ und $A/\mathfrak{m} \hookrightarrow B/\mathfrak{n}$ eine endliche Körpererweiterung ist. Dann muss aber $\mathfrak{q} = \mathfrak{n}$ sein und somit

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{q} \cap A.$$

Also ist $\mathfrak{q} \cap A$ ein maximales Ideal. $\square$

Korollar 7.4.6. *Sei k ein Körper und sei A eine endlich erzeugte k-Algebra. Dann gilt:*

(1) *A ist Jacobson.*
(2) *Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A ist $k \hookrightarrow A/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung.*
(3) *Ein Primideal $\mathfrak{p}$ von A ist genau dann maximal, wenn $k \hookrightarrow Q(A/\mathfrak{p})$ eine endliche Körpererweiterung ist.*
(4) *Ist B eine endlich erzeugte k-Algebra und $f : A \to B$ ein k-Algebrenhomomorphismus, so ist für jedes maximale Ideal $\mathfrak{n}$ von B auch $\mathfrak{n} \cap A$ ein maximales Ideal von A und $A/(\mathfrak{n} \cap A) \hookrightarrow B/\mathfrak{n}$ ist eine endliche Körpererweiterung.*

Beweis.

(1) Folgt aus Satz 7.4.5(1).
(2) Folgt aus Satz 7.4.5(2).
(3) Die Hinrichtung ist Aussage (2). Für die Rückrichtung sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, so dass $k \hookrightarrow Q(A/\mathfrak{p})$ eine endliche Erweiterung ist. Dann ist insbesondere $A/\mathfrak{p}$ ganz über k, also ist $A/\mathfrak{p}$ ein Körper nach Lemma 5.2.2.
(4) Via f ist B eine endlich erzeugte A-Algebra. Dann folgt die Behauptung aus Satz 7.4.5. □

Satz 7.4.7 (Hilberts Nullstellensatz)**.** *Sei k ein Körper und sei A eine endlich erzeugte k-Algebra. Sei $I \subseteq A$ ein Ideal. Dann ist*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A) \\ I \subseteq \mathfrak{m}}} \mathfrak{m}.$$

Beweis. Als endlich erzeugte k-Algebra ist A Jacobson (nach Korollar 7.4.6(1)). Deswegen gilt

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \\ I \subseteq \mathfrak{m}}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A) \\ I \subseteq \mathfrak{m}}} \mathfrak{m}.$$

□

Korollar 7.4.8 (Klassischer Nullstellensatz)**.** *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei $A := k[X_1, \dots, X_n]$ der Polynomring. Für einen Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n$ sei $\mathfrak{m}_x := (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$. Dann gilt:*

(1) *Für jedes $x \in k^n$ ist $\mathfrak{m}_x$ ein maximales Ideal.*
(2) *Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A existiert genau ein $x \in k^n$, so dass $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$.*

Beweis. Klar ist, dass $\mathfrak{m}_x$ ein maximales Ideal von A ist. Außerdem ist für $x, y \in k^n$ mit $x \neq y$ auch $\mathfrak{m}_x \neq \mathfrak{m}_y$. Es bleibt die Existenz in (2) nachzuweisen. Sei $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$. Dann ist $k \hookrightarrow A/\mathfrak{m}$ eine endliche Erweiterung nach Korollar 7.4.6. Da k algebraisch abgeschlossen ist, folgt $k \cong A/\mathfrak{m}$. Sei x_i das Bild von X_i unter $q : A \to A/\mathfrak{m} \cong k$. Dann ist $q(X_i - x_i) = 0$, also liegt $X_i - x_i \in \ker(q) = \mathfrak{m}$. Daraus folgt $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{m}_x$ maximal ist, folgt Gleichheit. □

Korollar 7.4.9. *Sei k ein Körper. Dann wird jedes maximale Ideal des Polynomrings $k[X_1, \dots, X_n]$ von n Elementen erzeugt.*

Beweis. Übung. □

8. Dimension

8.1. Filtrierungen und Graduierungen.

Definition 8.1.1. Sei A ein Ring und sei M ein A-Modul.

(1) Eine *Filtrierung* von M ist eine Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ von Untermoduln
$$M = F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots .$$

(2) Sei $I \subseteq A$ ein Ideal. Eine *I-Filtrierung* von M ist eine Filtrierung $(F_n)_{n\geq 0}$ von M, so dass
$$IF_n \subseteq F_{n+1}$$
gilt für alle $n \geq 0$.

(3) Eine I-Filtrierung $(F_n)_{n\geq 0}$ von M heißt *stabil*, wenn es ein $N \geq 0$ so gibt, dass für alle $n \geq N$ gilt
$$IF_n = F_{n+1}.$$

8.1.2. Durch $F_n := I^n M$ ist eine stabile I-Filtrierung auf M definiert. Insbesondere ist $A = I^0 \supseteq I^1 \supseteq I^2 \supseteq \dots$ eine stabile I-Filtrierung von ${}_AA$.

Definition 8.1.3. Ein *graduierter Ring* besteht aus einem Ring A zusammen mit einer Familie $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ von Untergruppen von $(A, +)$, so dass
$$A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} A_n$$
gilt (als abelsche Gruppe), sowie $A_n A_m \subseteq A_{n+m}$ für alle $n, m \geq 0$.

Beispiel 8.1.4. Der Polynomring $A = k[t_1, \dots, t_r]$ ist graduiert mit
$$A_n = \bigoplus_{m_1+\dots+m_r=n} k \cdot t_1^{m_1} \dots t_r^{m_r}$$
also A_n ist die Menge der homogenen Polynome vom Totalgrad n.

8.1.5. Sei A ein graduierter Ring. Dann ist $1 \in A_0$, denn schreiben wir $1 = \sum_{n\geq 0} 1_n$ mit $1_n \in A_n$ (fast alle gleich Null), so gilt für jedes $x \in A_m$
$$x = 1x = \sum_{n\geq 0} \underbrace{1_n x}_{\in A_{n+m}} .$$
Also muss $1_0 x = x$ gelten, sowie $1_n x = 0$ für alle $n > 0$. Insbesondere ist 1_0 eine Eins des Rings und damit $1_0 = 1$. Das beweist, dass A_0 ein Unterring von A ist.
Zudem ist die Untergruppe $\bigoplus_{n\geq k} A_n$ ein Ideal von A. Am wichtigsten ist das Ideal $A_+ := \bigoplus_{n\geq 1} A_n$, das sogenannte *Augmentationsideal* von A. Offensichtlich ist die Komposition $A_0 \to A \to A/A_+$ ein Isomorphismus von Ringen.

Definition 8.1.6. Sei A ein graduierter Ring. Ein *graduierter A-Modul* besteht aus einem A-Modul M, zusammen mit einer Familie $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ von Untergruppen von $(M, +)$, so dass
$$M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$$
gilt (als abelsche Gruppe), sowie $A_n M_m \subseteq M_{n+m}$ für alle $n, m \geq 0$.

Definition 8.1.7. Sei A ein graduierter Ring und seien M und N graduierte A-Moduln.

(1) Eine A-lineare Abbildung $f : M \to N$ heißt *homogen*, wenn $f(M_n) \subseteq N_n$ gilt für alle $n \geq 0$.
(2) Ein A-Untermodul $M' \subseteq M$ heißt *homogen*, wenn $M' = \sum_{n\geq 0} M' \cap M_n$ gilt.
(3) Ein Ideal $I \subseteq A$ heißt *homogen*, wenn es ein homogen ist als A-Untermodul von ${}_A A$.
(4) Ein Element $a \in A$ oder ein Element $x \in M$ heißt *homogen*, wenn es in einem A_n bzw. M_n liegt. Ist $a \neq 0$, bzw. $x \neq 0$, so ist $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ eindeutig bestimmt und heißt der *Grad* von a bzw. x.

8.1.8. Sei M ein graduierter Modul über einem graduierten Ring A. Ist M' ein homogener A-Untermodul, so ist M' selbst ein graduierter A-Modul und die Inklusion $M' \hookrightarrow M$ ist homogen. Ferner ist auch M/M' ein graduierter A-Modul und die Quotientenabbildung $M \to M/M'$ ist homogen.

8.1.9. Ist I ein homogenes Ideal eines graduierten Rings, so ist A/I wieder ein graduierter Ring. Wird I von homogenen Elementen erzeugt, so ist I ein homogenes Ideal.

Proposition 8.1.10. *Sei A ein graduierter Ring. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) A ist ein noetherscher Ring.
(2) A_0 ist ein noetherscher Ring und A ist endlich erzeugt als A_0-Algebra.

Beweis. Zu „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Da $A_0 \cong A/A_+$ ist, ist A_0 als Quotient eines noetherschen Rings selbst noethersch. Ferner ist das Ideal A_+ endlich erzeugt, sagen wir von $x_1, \ldots, x_N \in A_+$. Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass die Erzeuger x_i homogen sind, sagen wir vom Grad $d_i > 0$ (falls nicht, so zerlege die x_i in homogene Komponenten). Wir zeigen $A_0[x_1, \ldots, x_N] = A$, indem wir $A_n \subseteq A_0[x_1, \ldots, x_N]$ per Induktion nach n zeigen. Für $n = 0$ ist das klar. Sei nun $n > 0$. Sei $y \in A_n$. Dann ist $y \in A_+$, also finden wir $a_i \in A_{n-d_i}$, so dass

$$y = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i$$

(dabei sei $a_i = 0$ falls $n - d_i < 0$). Nach Induktionsvoraussetzung ist $a_i \in A_0[x_1, \ldots, x_N]$, also ein polynomialer Ausdruck in den x_i mit Koeffizienten in A_0. Das beweist $y \in A_0[x_1, \ldots, x_N]$.
Zu „(2) $\Rightarrow$ (1)“: Endlich erzeugte Algebren über noetherschen Ringen sind selbst noethersch. Das folgt aus Hilberts Basissatz und der Tatsache, dass Quotienten noetherscher Ringe noethersch sind (6.2.4). $\square$

Definition 8.1.11. Sei A ein Ring und sei $I \subseteq A$ ein Ideal. Die A-Unteralgebra

$$R(I) := \bigoplus_{n\geq 0} I^n t^n \subseteq A[t]$$

heißt die *Rees-Algebra* von I. Sie ist eine graduierte A-Algebra mit $R(I)_n = I^n t^n$.

Proposition 8.1.12. *Sei A ein Ring und $I \subseteq A$ ein Ideal.*

(1) Falls I ein endlich erzeugtes Ideal ist, so ist $R(I)$ eine endlich erzeugte A-Algebra.
(2) Ist A noethersch, so ist $R(I)$ noethersch.

Beweis.

(1) Seien $x_1, \dots, x_N$ Erzeuger von I. Dann sind $x_1t, \dots, x_Nt \in R(I)_1$ Erzeuger von $R(I)$ als $A = R(I)_0$-Algebra.
(2) Da A noethersch ist, ist I endlich erzeugt. Aus (1) erhalten wir, dass $R(I)$ eine endlich erzeugte A-Algebra ist. Also ist $R(I)$ auch noethersch (s. Proposition 8.1.10). □

8.1.13. Sei A ein Ring und sei $I \subseteq A$ ein Ideal. Sei M ein A-Modul und sei $F_* := (F_n)_{n\geq 0}$ eine I-Filtrierung von M. Dann wird die direkte Summe $R(F_*) := \bigoplus_{n\geq 0} F_n t^n \subseteq M[t] := M \otimes_A A[t]$ zu einem graduierten $R(I)$-Modul durch Einschränkung der skalaren Multiplikation $A[t] \times M[t] \to M[t]$ auf

$$R(I) \times R(F_*) \to R(F_*).$$

Definition 8.1.14. Sei A ein Ring und sei $I \subseteq A$ ein Ideal. Dann definieren wir auf

$$\mathrm{gr}(I) := \bigoplus_{n\geq 0} I^n / I^{n+1}$$

die Multiplikation $(a + I^{n+1}) \cdot (b + I^{m+1}) := (ab) + I^{n+m+1}$. Diese Multiplikation ist wohldefiniert und macht $\mathrm{gr}(I)$ zu einem graduierten Ring mit $\mathrm{gr}(I)_n = I^n/I^{n+1}$. Man nennt $\mathrm{gr}(I)$ die *assoziierte graduierte Algebra* zu I.

8.1.15. Sei M ein A-Modul, sei $I \subseteq A$ ein Ideal und sei $F_* := (F_n)_{n\geq 0}$ eine I-Filtrierung von M. Dann betrachte die direkte Summe $\mathrm{gr}(F_*) := \bigoplus_{n\geq 0} F_n/F_{n+1}$. Auf $\mathrm{gr}(F_*)$ haben wir eine $\mathrm{gr}(I)$-Modulstruktur gegeben durch

$$(a + I^{n+1}) \cdot (x + F_{m+1}) := (ax) + F_{n+m+1}.$$

8.1.16. Für ein Ideal I eines Rings A gilt $\mathrm{gr}(I) \cong R(I)/IR(I)$ als A/I-Algebren. Ist F_* eine I-Filtrierung von M, so induziert die natürliche surjektive Abbildung $F_n/IF_n \to F_n/F_{n+1}$ einen surjektiven homogenen Homomorphismus von graduierten $R(I)/IR(I) = \mathrm{gr}(I)$-Moduln $R(F_*)/IR(F_*) \to \mathrm{gr}(F_*)$.

Lemma 8.1.17. *Sei A ein noetherscher Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul und $I \subseteq A$ ein Ideal. Sei $F_* = (F_n)_{n\geq 0}$ eine I-Filtrierung von M. Dann sind äquivalent:*

(1) F_* ist stabil.
(2) $R(F_*)$ ist endlich erzeugt als $R(I)$-Modul.

Beweis. Fixiere $k \geq 0$ und definiere

$$L_k := F_0t^0 \oplus F_1t^1 \oplus \ldots \oplus F_kt^k \oplus IF_kt^{k+1} \oplus I^2F_kt^{k+2} \oplus \ldots \subseteq R(F_*).$$

Dann ist L_k ein homogener $R(I)$-Untermodul von $R(F_*)$. Es gilt offensichtlich $L_k \subseteq L_{k+1}$ und $\bigcup_{k\geq 0} L_k = R(F_*)$.
Wir beweisen, dass L_k als $R(I)$-Modul endlich erzeugt ist. Da M ein endlich erzeugter Modul über einem noetherschen Ring ist, sind auch die F_i endlich erzeugte A-Moduln. Somit $F_0t^0 \oplus \ldots \oplus F_kt^k$ auch. Ein Erzeugendensystem von $F_0t^0 \oplus \ldots \oplus F_kt^k$ als A-Modul ist aber auch ein Erzeugendensystem von L_k als $R(I)$-Modul.
Zu „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Ist F_* eine stabile Filtrierung, so gibt es ein k mit $IF_i = F_{i+1}$ für alle $i \geq k$. Also ist $R(F_*) = L_k$.

Zu „(2) $\Rightarrow$ (1)“: Da A noethersch ist, ist die Rees-Algebra $R(I)$ ebenfalls noethersch nach Proposition 8.1.12. Falls $R(F_*)$ ein endlich erzeugter $R(I)$-Modul ist, so ist $R(F_*)$ ein noetherscher $R(I)$-Modul. Also gibt es ein $k \geq 0$, so dass $R(F_*) = L_k$. Das bedeutet aber $I^i F_k = F_{k+i}$ für alle $i \geq 1$. Das zeigt die Stabilität. □

Korollar 8.1.18. *Seien A ein noetherscher Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul, $I \subseteq A$ ein Ideal und $F_* = (F_n)_{n\geq 0}$ eine stabile I-Filtrierung von M. Sei $M' \subseteq M$ ein A-Untermodul. Dann ist $(F_n \cap M')_{n\geq 0}$ eine stabile I-Filtrierung von M'.*

Beweis. Sei $F'_n := F_n \cap M'$. Dann ist $F'_* := (F'_n)_{n\geq 0}$ eine I-Filtrierung von M', denn

$$IF'_n \subseteq IF_n \cap M' \subseteq F_{n+1} \cap M'.$$

Also ist $R(F'_*)$ ein $R(I)$-Untermodul von $R(F_*)$. Weil A als noethersch vorausgesetzt ist, ist $R(I)$ ebenfalls noethersch nach Proposition 8.1.10. Da F_* stabil ist, ist $R(F_*)$ ein endlich erzeugter $R(I)$-Modul. Also ist $R(F_*)$ noethersch als $R(I)$-Modul. Jeder $R(I)$-Untermodul ist demnach auch endlich erzeugt, insbesondere $R(F'_*)$. Eine erneute Anwendung von Lemma 8.1.17 zeigt, dass F'_* eine stabile I-Filtrierung ist. □

Satz 8.1.19 (Artin–Rees)**.** *Seien A ein noetherscher Ring, $I \subseteq A$ ein Ideal, M ein endlich erzeugter A-Modul und $M' \subseteq M$ ein A-Untermodul. Dann gibt es ein $k \geq 0$, so dass für alle $l \geq 0$ gilt*

$$I^l((I^k M) \cap M') = (I^{l+k} M) \cap M'.$$

Beweis. Wende Korollar 8.1.18 auf die stabile I-Filtrierung $(I^n M)_{n\geq 0}$ an. □

8.2. **Hilbert-Funktionen.**

Definition 8.2.1. Sei A ein noetherscher Ring.

(1) Betrachte die freie abelsche Gruppe $\bigoplus_{[M]} \mathbb{Z} \cdot [M]$ erzeugt von allen Symbolen $[M]$, wobei $[M]$ die Isomorphieklasse eines endlich erzeugten A-Moduls M sei. Sei $K_0(A)$ der Quotient dieser freien abelschen Gruppe nach allen Relationen der Form
$$[M] - [M'] - [M'']$$
wann immer eine kurze exakte Sequenz $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ von A-Moduln existiert (beachte, dass mit M auch M' und M'' endlich erzeugt sind). Man nennt die Gruppe $K_0(A)$ die *Grothendieck-Gruppe* von A.

(2) Ein Homomorphismus $\lambda : K_0(A) \to \mathbb{Z}$ heißt eine *additive Funktion.*

8.2.2. Sei A ein artinscher Ring. Dann besitzt jeder endlich erzeugte A-Modul eine Kompositionsreihe. Definieren wir für die Isomorphieklasse $[M]$ eines endlich erzeugten A-Moduls $l([M]) = l(M)$, die Länge von M, so steigt diese Funktion ab zu einem Homomorphismus $l : K_0(A) \to \mathbb{Z}$.

Beispiel 8.2.3.

(1) Ist k ein Körper, so ist $K_0(k) \cong \mathbb{Z}$.
(2) Es gilt $K_0(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Lemma 8.2.4. *Sei A ein noetherscher graduierter Ring und sei M ein endlich erzeugter graduierter A-Modul. Dann ist jedes M_n ein endlich erzeugter A_0-Modul.*

Beweis. Wir wissen bereits aus Proposition 8.1.10, dass A_0 noethersch ist. Damit ist A_+ endlich erzeugt, und somit sind auch alle A_n endlich erzeugt als A_0-Moduln. Seien $y_1, \ldots, y_r$ Erzeuger von M als A-Modul und ohne Einschränkung seien alle y_i homogen; der Grad von y_i sei d_i. Dann gilt

$$M_n = \sum_{i=1}^{r} A_{n-d_i} \cdot y_i$$

und daher ist auch M_n ein endlich erzeugter A_0-Modul. □

Definition 8.2.5. Sei A ein noetherscher graduierter Ring und sei $\lambda : K_0(A_0) \to \mathbb{Z}$ eine additive Funktion. Sei M ein endlich erzeugter graduierter A-Modul. Die Potenzreihe $P_M \in \mathbb{Z}[[t]]$ definiert durch

$$P_M(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n) t^n$$

heißt die *Poincaré-Reihe* von M bezüglich λ.

Beispiel 8.2.6. Sei $A = k[t_1, \ldots, t_s]$ der Polynomring über einem Körper mit der Graduierung durch $\deg(t_i) = 1$. Dann ist

$$P_{{}_A A}(t) = \frac{1}{(1-t)^s}$$

bezüglich der additiven Funktion auf $K_0(k)$ gegeben durch die k-Dimension.
Versehen wir allgemeiner A mit der Graduierung durch $\deg(t_i) = d_i \geq 1$, so ist

$$P_{{}_A A}(t) = \frac{1}{(1-t^{d_1}) \ldots (1-t^{d_s})}$$

Satz 8.2.7 (Hilbert–Serre)**.** *Sei A ein noetherscher graduierter Ring und sei M ein endlich erzeugter graduierter A-Modul. Sei λ eine additive Funktion auf $K_0(A_0)$. Seien $x_1, \ldots, x_s \in A$ homogen von Graden $d_1, \ldots, d_s \geq 1$, so dass $A = A_0[x_1, \ldots, x_s]$. Dann existiert ein Polynom $p \in \mathbb{Z}[t]$, so dass*

$$P_M(t) = \frac{p(t)}{(1-t^{d_1}) \ldots (1-t^{d_s})}.$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach s. Ist $s = 0$, so ist $A = A_0$ und somit gibt es ein $N \geq 0$ mit $M_n = 0$ für $n > N$, da M endlich erzeugt ist. Dann ist $p(t) = \lambda(M_0) + \lambda(M_1)t + \ldots + \lambda(M_N)t^N$ das gesuchte Polynom.
Sei $s > 0$. Betrachte den graduierten A-Modul $N := M[d_s]$ gegeben durch $N_n := M_{n+d_s}$. Wenn wir die Graduierung ignorieren, ist N ein A-Untermodul von M. Da A noethersch ist, ist N auch ein endlich erzeugter A-Modul. Die Abbildung

$$f : M \to N, \ y \mapsto x_s y$$

eine homogene A-lineare Abbildung. Wir betrachten $K := \ker(f)$ und $C := \operatorname{coker}(f)$. Das sind ebenfalls endlich erzeugte graduierte A-Moduln. Wir erhalten die exakte Sequenz

$$0 \to K_n \to M_n \xrightarrow{f} N_n \to C_n \to 0.$$

Also gilt $\lambda(N_n) - \lambda(M_n) = \lambda(C_n) - \lambda(K_n)$. Betrachte die Poincaré-Reihen P_N, P_K und P_C. Es gilt

$$P_M(t) = \underbrace{\lambda(M_0) + \lambda(M_1)t + \dots \lambda(M_{d_s-1})t^{d_s-1}}_{=:r(t)} + t^{d_s}P_N(t).$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} P_C(t) - P_K(t) &= P_N(t) - P_M(t) \\ &= \frac{1-t^{d_s}}{t^{d_s}}P_M(t) - \frac{r(t)}{t^{d_s}} \\ P_M(t) &= \frac{t^{d_s}(P_C(t) - P_K(t)) + r(t)}{1-t^{d_s}} \end{aligned}$$

Nun gilt $x_s \in \mathrm{Ann}(K)$ und $x_s \in \mathrm{Ann}(C)$. Also sind K und C Moduln über $A' := A/(x_s)$. Dieser wird erzeugt von $s-1$ homogenen Elementen. Es gilt $A'_0 = A_0$. Nach Induktionsvoraussetzung existieren Polynome p_K und p_C mit

$$P_K(t) = \frac{p_K(t)}{(1-t)^{d_1}\dots(1-t)^{d_{s-1}}} \qquad P_C(t) = \frac{p_C(t)}{(1-t)^{d_1}\dots(1-t)^{d_{s-1}}}.$$

Wir setzen in die Gleichung für P_M ein und erhalten

$$P_M(t) = \frac{p(t)}{(1-t)^{d_1}\dots(1-t)^{d_s}},$$

wobei

$$(+) \qquad p(t) = t^{d_s}(p_C(t) - p_K(t)) + (1-t)^{d_1}\dots(1-t)^{d_{s-1}}r(t).$$

□

8.2.8. Wir wenden nun Hilbert–Serre auf endlich erzeugte graduierte Moduln über noetherschen graduierten Ringen A an, wobei A als A_0-Algebra von A_1 erzeugt werde. Sei $x_1, \dots, x_s$ ein Erzeugendensystem von A_1 als A_0-Modul. Dann gilt $A = A_0[x_1, \dots, x_s]$. Dann sagt uns Hilbert–Serre, dass die Poincaré-Reihe von M von der Form

$$P_M(t) = \frac{p(t)}{(1-t)^s}$$

ist. Solche Potenzeihen untersuchen wir jetzt.

Lemma 8.2.9. *Sei $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \in \mathbb{Z}[[t]]$ eine Potenzreihe, so dass es ein $s \geq 0$ und ein Polynom $p \in \mathbb{Z}[t]$ gibt mit*

$$f(t) = \frac{p(t)}{(1-t)^s}.$$

Dann gilt:

(1) *Es gibt ein eindeutig bestimmtes Polynom $g \in \mathbb{Q}[t]$, so dass $a_n = g(n)$ für $n \gg 0$ gilt. Dabei ist $\deg g \leq s-1$.*
(2) *Es gibt ein eindeutig bestimmtes Polynom $h \in \mathbb{Q}[t]$, so dass $\sum_{i=0}^{n} = h(n)$ für $n \gg 0$ gilt. Dabei ist $\deg h \leq s$.*

Beweis.

(1) Es gilt $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$. Eine leichte doppelte Induktion nach s und n zeigt uns, dass
$$\frac{1}{(1-t)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s-1+n}{s-1} t^n.$$
Wir definieren nun das Polynom $r \in \mathbb{Q}[t]$ durch
$$r(t) = \binom{s-1+t}{s-1} := \frac{t(t+1)\dots(t+s-1)}{1 \cdot 2 \dots (s-1)}.$$
Dann gilt also $\frac{1}{(1-t)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} r(n)t^n$. Das Polynom r hat Grad $s-1$. Schreibe nun das Polynom p als $p(t) = \sum_{i=0}^{N} b_i t^i$. Dann gilt für alle $n \geq N$
$$a_n = \sum_{i=0}^{N} b_i r(n-i)$$
Wir definieren $g(t) := \sum_{i=0}^{N} b_i r(t-i) \in \mathbb{Q}[t]$, ein Polynom vom Grad höchstens $s-1$, und erhalten $a_n = g(n)$ für alle $n \geq N$. Das Polynom g ist eindeutig bestimmt durch Werte an unendlich vielen (ganzen) Zahlen.

(2) Wende (1) auf die Potenzreihe
$$\frac{f(t)}{1-t} = \frac{p(t)}{(1-t)^{s+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big) t^n$$
an. □

Bemerkung 8.2.10. Im obigen Lemma ist im Fall $s = 0$ das Polynom $g = 0$ und $h(t) = t$. Der Einheitlichkeit halber treffen wir die Konvention, dass das Nullpolynom Grad -1 habe.

Korollar 8.2.11. *Sei A ein noetherscher graduierter Ring, der als A_0-Algebra von A_1 erzeugt werde. Sei M ein endlich erzeugter graduierter A-Modul. Sei $\lambda : K_0(A_0) \to \mathbb{Z}$ eine additive Funktion. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $g, h \in \mathbb{Q}[t]$, so dass gilt*
$$g(n) = \lambda(M_n) \qquad\qquad h(n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(M_j).$$
Ist $x_1, \dots, x_s$ ein Erzeugendensystem von A_1 als A_0-Modul, so ist $\deg g \leq s-1$ *und* $\deg h \leq s$.

Beweis. Klar mit Hilbert–Serre und Lemma 8.2.9. □

Definition 8.2.12. Sei A ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Ein *Definitionsideal* von A ist ein Ideal I von A, für das es ein $n > 0$ so gibt, dass
$$\mathfrak{m}^n \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}.$$

Lemma 8.2.13. *Sei A ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Für ein Ideal $I \subsetneq A$ sind äquivalent:*

(1) I ist ein Definitionsideal von A.
(2) $\mathfrak{m}$ ist das einzige Primideal von A, das I enthält.

(3) $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$
(4) A/I *ist artinsch.*

Beweis. Übung. □

Korollar 8.2.14. *Sei A ein noetherscher lokaler Ring, sei I ein Definitionsideal von A, sei M ein endlich erzeugter A-Modul und sei $F_* = (F_n)_{n\geq 0}$ eine stabile I-Filtrierung von M.*

(1) Für jedes $n \geq 0$ ist M/F_n ein A-Modul von endlicher Länge. Es gibt ein eindeutig bestimmtes Polynom $\chi = \chi_{M,I,F_*} \in \mathbb{Q}[t]$, so dass
$$l(M/F_n) = \chi(n)$$
für $n \gg 0$. Dabei ist $\deg\chi \leq s$, wobei s die minimale Anzahl von Erzeugern von I sei.
(2) Der Grad $\deg\chi$ hängt nur von M ab, ist also unabhängig von I und F_*.
(3) Der Leitkoeffizient von χ hängt nur von M und I ab, ist also unabhängig von F_*.

Beweis.

(1) Betrachte den graduierten Ring $\mathrm{gr}(I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ und den graduierten $\mathrm{gr}(I)$-Modul $\mathrm{gr}(F_*) = \bigoplus_{n\geq 0} F_n/F_{n+1}$. Dann ist $\mathrm{gr}(I)_0 = A/I$ noethersch. Seien $x_1, \ldots, x_s$ Erzeuger von I. Betrachte $\overline{x}_i := x_i + I^2 \in \mathrm{gr}(I)_1$. Dann ist $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{gr}(I)_1$ als $\mathrm{gr}(I)_0$-Modul.
Da die I-Filtrierung F_* stabil ist, ist $R(F_*)$ als $R(I)$-Modul endlich erzeugt (Lemma 8.1.17). Dann ist auch $R(F_*)/IR(F_*)$ ein endlich erzeugter $R(I)/IR(I) = \mathrm{gr}(I)$-Modul. Als Quotient von $R(F_*)/IR(F_*)$ ist auch $\mathrm{gr}(F_*)$ ein endlich erzeugter $\mathrm{gr}(F_*)$-Modul.
Da I ein Definitionsideal von A ist, ist A/I artinsch. Jeder endlich erzeugte A/I-Modul hat deshalb endliche Länge und
$$l : K_0(A/I) \to \mathbb{Z},\ N \mapsto l({}_{A/I}N) = l({}_A N)$$
ist eine additive Funktion. Außerdem ist F_n/F_{n+1} ein endlich erzeugter A/I-Modul, also von endlicher Länge und damit, induktiv, auch
$$l(M/F_n) < \infty.$$
Es gibt nach Korollar 8.2.11 Polynome $g, h \in \mathbb{Q}[t]$, so dass
$$g(n) = l(F_n/F_{n+1}) \qquad h(n) = \sum_{j=0}^{n} l(F_j/F_{j+1})$$
für $n \gg 0$. Definiere $\chi := h - g$. Dann ist für $n \gg 0$
$$\chi(n) = \sum_{j=0}^{n-1} l(F_j/F_{j+1}) = l(M/F_n).$$
Aufgrund der Gradabschätzungen für g und h sehen wir, dass $\deg\chi \leq s$ ist.

(3) Sei $F'_* = (F'_n)_{n\geq 0}$ eine weitere stabile I-Filtrierung. Sei $\chi' \in \mathbb{Q}[t]$ das zugehörige Polynom. Sei $N > 0$, so dass $IF_n = F_{n+1}$ und $IF'_n = F'_{n+1}$ für alle $n \geq N$. Dann gilt
$$F_{i+N} = I^i F_N \subseteq I^i M = I^i F'_0 \subseteq F'_i$$

und genauso folgt $F'_{i+N} \subseteq F_i$. Damit ist

$$l(M/F'_i) \leq l(M/F_{i+N}) \qquad\qquad l(M/F_i) \leq l(M/F'_{i+N})$$

für alle $i \geq 0$. Somit gilt für $n \gg 0$

$$\chi'(n) \leq \chi(n+N) \qquad\qquad \chi(n) \leq \chi'(n+N)$$

Das impliziert $\lim_{n\to\infty} \frac{\chi(n)}{\chi'(n)} = 1$. Für die Polynome χ und χ' bedeutet das, dass sie den gleichen Grad und den gleichen Leitkoeffizienten haben müssen.

(2) Im Beweis von (3) haben wir gezeigt, dass Grad und Leitkoeffizient nicht von der Filtrierung abhängen. Daher genügt es

$$\deg(\underbrace{\chi_{M,I,(I^nM)_n}}_{=:\chi_1}) = \deg(\underbrace{\chi_{M,\mathfrak{m},(\mathfrak{m}^nM)_n}}_{=:\chi_2})$$

zu zeigen. Da I ein Definitionsideal ist, gibt es ein N mit $\mathfrak{m}^N \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}$. Es folgt $\mathfrak{m}^{iN} \subseteq I^i \subseteq \mathfrak{m}^i$ für alle $i \geq 0$ und damit

$$l(M/\mathfrak{m}^iM) \leq l(M/I^iM) \leq l(M/\mathfrak{m}^{iN}).$$

Das impliziert $\chi_2(n) \leq \chi_1(n) \leq \chi_2(nN)$ für $n \gg 0$. Wir haben also zwei Polynome, $\chi_2(t)$ und $\chi_2(Nt)$, vom gleichen Grad, die $\chi_1(t)$ nach oben und unten beschränken (für große Werte für t). Dann muss χ_1 ebenfalls den gleichen Grad haben. $\square$

Definition 8.2.15. Sei A ein noetherscher lokaler Ring, sei I ein Definitionsideal von A, sei M ein endlich erzeugter A-Modul und sei $F_* = (F_n)_{n\geq 0}$ eine stabile I-Filtrierung von M.

(1) Das Polynom χ_{M,I,F_*} aus Korollar 8.2.14 nennt man das *Hilbert-Polynom* von M, I und F_*.
(2) Der Wert $d(M) := \deg \chi_{M,I,F_*} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \sqcup \{-1\}$ ist wohldefiniert und heißt die *Hilbert-Dimension* von M.

8.2.16. Für einen endlich erzeugten A-Modul über einem noetherschen Ring A gilt:

(1) Genau dann ist $d(M) = -1$, wenn $M = 0$.
(2) Genau dann ist $d(M) = 0$, wenn es ein $n \geq 0$ gibt mit $\mathfrak{m}^nM = 0$.
(3) Genau dann ist $d({}_AA) = 0$, wenn A artinsch ist.

Beweis.

(1) Wir sehen

$$\begin{aligned} d(M) = -1 &\Leftrightarrow \chi_{M,I,(\mathfrak{m}^nM)_n} = 0 \\ &\Leftrightarrow l(M/\mathfrak{m}^nM) = 0 \quad (n \gg 0) \\ &\Leftrightarrow M/\mathfrak{m}^nM = 0 \quad (n \gg 0) \\ &\Leftrightarrow M = 0 \end{aligned}$$

wobei die letzte Äquivalenz aus dem Lemma von Nakayama folgt.

(2) Ein ähnliches Nakayama-Argument.

(3) Es gilt

$$\begin{aligned} d(A) = 0 &\Leftrightarrow \mathfrak{m}^n = 0 \quad (n \gg 0) \\ &\Leftrightarrow l(A) < \infty \\ &\Leftrightarrow A \text{ artinsch} \end{aligned}$$

□

Proposition 8.2.17. *Sei A ein noetherscher lokaler Ring, sei $M \neq 0$ ein endlich erzeugter A-Modul und sei $a \in A$ mit $ax \neq 0$ für alle $x \in M \setminus \{0\}$. Dann gilt*

$$d(M/aM) \leq d(M) - 1.$$

Beweis. Sei $M' = aM$ und $M'' := M/aM$. Sei $F_n = \mathfrak{m}^n M$ und sei $F'_n = F_n \cap M'$. Nach Korollar 8.1.18 ist F'_* eine stabile $\mathfrak{m}$-Filtrierung von M'. Betrache die kurze exakte Sequenz

$$0 \to M'/F'_n \to M/\mathfrak{m}^n M \to M''/\mathfrak{m}^n M'' \to 0.$$

Dann gilt also $l(M''/\mathfrak{m}^n M'') = l(M/\mathfrak{m}^n M) - l(M'/F'_n)$ und deshalb auch

$$\chi_{M'',\mathfrak{m},(\mathfrak{m}^n M'')_n}(n) = \chi_{M,\mathfrak{m},(\mathfrak{m}^n M)_n}(n) - \chi_{M',\mathfrak{m},F'_*}(n)$$

für $n \gg 0$. Wegen der Eigenschaft von a ist die Abbildung $M \to M', x \mapsto ax$ ein Isomorphismus. Unter diesem Isomorphismus wird $\mathfrak{m}^n M$ auf $\mathfrak{m}^n M'$ abgebildet. Also gilt

$$\chi_{M,\mathfrak{m},(\mathfrak{m}^n M)_n} = \chi_{M',\mathfrak{m},(\mathfrak{m}^n M')_n}$$

Nach Korollar 8.2.14 stimmen Grad und Leitkoeffizient von $\chi_{M',\mathfrak{m},(\mathfrak{m}^n M')_n}$ und $\chi_{M',\mathfrak{m},F'_*}$ aber überein. Damit ist $d(M'') \leq d(M) - 1$. □

8.3. **Dimension.**

Definition 8.3.1. Sei A ein Ring. Falls $A \neq 0$ ist, definieren wir

$$\dim A := \sup\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \text{es gibt eine Primidealkette } \mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_n \text{ in } A\}.$$

Für den Nullring definieren wir formal $\dim 0 = -1$. Die Zahl $\dim A \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{-1, \infty\}$ heißt die *Krull-Dimension* von A.

Beispiel 8.3.2. Sei k ein Körper.

(1) $\dim k = 0$
(2) $\dim k[t] = 1$
(3) $\dim \mathbb{Z} = 1$.

8.3.3. Sei A ein Ring. Dann gelten:

$$\begin{aligned} \dim A &= \sup\{\dim A_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)\} \\ &= \sup\{\dim A_\mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A)\} \\ \dim A &= \sup\{\dim A/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)\} \\ &= \sup\{\dim A/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{MinSpec}(A)\} \end{aligned}$$

8.3.4. Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} \dim A = \sup\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \text{es gibt eine Primidealkette } \mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_n \text{ in } A,\\ \mathfrak{p}_0 \in (A),\ \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Max}(A)\}. \end{aligned}$$

Definition 8.3.5. Sei A ein noetherscher lokaler Ring. Wir definieren

$$\delta(A) := \min\{s \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \text{es gibt ein Definitionsideal, das von } s \text{ Elementen erzeugt wird}\}$$

8.3.6. Da A noethersch ist, ist jedes Definitionsideal endlich erzeugt. Also ist $\delta(A) < \infty$.

Lemma 8.3.7. *Sei A ein noetherscher lokaler Ring und sei $0 \leq n \leq \dim A$. Dann gibt es $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{m}$, so dass für jedes Primoberideal $\mathfrak{p} \supseteq (x_1, \ldots, x_n)$ gilt $\dim A_{\mathfrak{p}} \geq n$.*

Beweis. Induktion nach n. Der Fall $n = 0$ ist klar. Sei $n > 0$. Wähle nach Induktionsvoraussetzung Elemente $x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathfrak{m}$, so dass für jedes Primoberideal $\mathfrak{p} \supseteq (x_1, \ldots, x_{n-1})$ gelte $\dim A_{\mathfrak{p}} \geq n-1$. Nach Proposition 6.4.11 hat $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ nur endlich viele minimale Primoberideale, sagen wir $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$. Falls $\dim A_{\mathfrak{p}_i} > n-1$ gilt für alle $i = 1, \ldots, r$, so können wir ein beliebiges $x_n \in \mathfrak{m}$ hinzufügen. Wir nehmen an, es gebe ein j mit $\dim A_{\mathfrak{p}_j} = n-1$. Dann ist $\dim A_{\mathfrak{p}_j} < \dim A$ und deshalb $\mathfrak{p}_j \subsetneqq \mathfrak{m}$. Damit ist keines der $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ gleich $\mathfrak{m}$. Nach Prime Avoidance gilt dann $\bigcup_{i=1}^r \mathfrak{p}_i \subsetneqq \mathfrak{m}$. Wir wählen ein $x_n \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup_{i=1}^r \mathfrak{p}_i$. Sei $\mathfrak{p} \supseteq (x_1, \ldots, x_n)$ ein Primoberideal. Dann gibt es ein j mit $\mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{p}$. Da $x_n \notin \mathfrak{p}_j$ gilt

$$\dim A_{\mathfrak{p}} > \dim A_{\mathfrak{p}_j} \geq n-1.$$

□

Satz 8.3.8 (Hauptsatz der Dimensionstheorie)**.** *Sei A ein noetherscher lokaler Ring. Dann ist*

$$\dim A = d(A) = \delta(A) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Beweis. Wir zeigen

$$\delta(A) \geq d(A) \geq \dim A \geq \delta(A).$$

Die Zusatzbehauptung, dass das endliche Werte sind, folgt dann aus 8.3.6.

(1) Zu $\delta(A) \geq d(A)$. Folgt aus Korollar 8.2.14.
(2) Zu $d(A) \geq \dim A$. Wir benutzen Induktion nach $d(A)$. Ist $d(A) = 0$, so ist A artinsch und damit jedes Primideal maximal nach Akizuki–Hopkins. Also gilt $\dim A = 0$.
Gelte $d(A) \geq 1$. Wegen $d(A) \geq d(A/\mathfrak{p})$ und wegen 8.3.3 dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass A ein Integritätsbereich sei. Sei

$$(0) \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_n$$

eine Primidealkette in A (ohne Einschränkung bei (0) startend). Wähle ein $a \in \mathfrak{p}_1 \setminus \{0\}$ und betrachte den Ring $A/(a)$. Dann ist

$$d(A/(a)) \leq d(A) - 1$$

nach Proposition 8.2.17. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\dim A/(a) \leq d(A/(a))$, also auch $\dim A/(a) \leq d(A) - 1$. In $A/(a)$ gibt es die Primidealkette

$$\mathfrak{p}_1/(a) \subsetneqq \mathfrak{p}_2/(a) \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_n/(a).$$

Deshalb ist $n-1 \leq \dim A/(a)$, also $n-1 \leq d(A) - 1$. Da die Primidealkette beliebig war, folgt $\dim A \leq d(A)$.

(3) Zu $\dim A \geq \delta(A)$. Sei $n = \dim A$. Gemäß Lemma 8.3.7 gibt es $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{m}$, so dass jedes Primoberideal $\mathfrak{p} \supseteq (x_1, \ldots, x_n)$

$$\dim A_{\mathfrak{p}} \geq n = \dim A$$

erfüllt. Dann muss aber bereits $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ sein. Somit ist $\mathfrak{m}$ das einzige Primoberideal von $(x_1, \ldots, x_n)$ und damit $(x_1, \ldots, x_n)$ ein Definitionsideal. Da es von n Elementen erzeugt wird, gilt $n \geq \delta(A)$. □

Proposition 8.3.9. *Sei $A \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung. Dann gilt:*

(1) $\dim A = \dim B$

(2) Für jedes Primideal $\mathfrak{q}$ von B ist $\dim B_{\mathfrak{p}} \leq \dim A_{\mathfrak{q} \cap A}$. Falls $A \subseteq B$ Going-Down erfüllt, so gilt sogar $\dim B_{\mathfrak{q}} = \dim A_{\mathfrak{q} \cap A}$.

Beweis.

(1) Sei $\mathfrak{q}_0 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{q}_l$ eine Primidealkette von B. Dann ist $\mathfrak{q}_0 \cap A \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{q}_l \cap A$ eine Primidealkette von A. Wäre $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{q}_{i+1} \cap A$, so würde nach Proposition 5.2.5 bereits $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}_{i+1}$ gelten. Also ist $\mathfrak{q}_0 \cap A \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{q}_l \cap A$ und damit $\dim A \geq \dim B$. Sei umgekehrt $\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_l$ eine Primidealkette in A. Nach Lying-Over existiert ein Primideal $\mathfrak{q}_0$ von B, das über $\mathfrak{p}_0$ lebt. Wegen Going-Up finden wir ein Primideal $\mathfrak{q}_1$ von B, das $\mathfrak{q}_0$ enthält und über $\mathfrak{p}_1$ lebt. So fortfahrend erhalten wir eine Primidealkette $\mathfrak{q}_0 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{q}_l$ von B mit $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$. Da $\mathfrak{q}_i \cap A \subsetneqq \mathfrak{q}_{i+1} \cap A$ gilt, muss bereits $\mathfrak{q}_i \subsetneqq \mathfrak{q}_{i+1}$ sein. Also ist $\dim B \geq \dim A$.

(2) Der Ringhomomorphismus $A_{\mathfrak{q} \cap A} \to B_{\mathfrak{q}}$ erfüllt die Aussage von Proposition 5.2.5. Also können wir wie unter (1) schließen, dass $\dim A_{\mathfrak{q} \cap A} \geq \dim B_{\mathfrak{q}}$ ist. Nun sei Going-Down erfüllt und sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_{l-1} \subsetneqq \mathfrak{p}_l = \mathfrak{q} \cap A$ eine Primidealkette von A. Nach Going-Down gibt es ein Primideal $\mathfrak{q}_{r-1}$, das in $\mathfrak{q} =: \mathfrak{q}_l$ enthalten ist und das über $\mathfrak{p}_{l-1}$ lebt. So fortfahrend bekommen wir eine Kette $\mathfrak{q}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{q}_l = \mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$. Da unten echte Inklusionen gelten, müssen oben ebenfalls echte Inklusionen vorliegen. Damit folgt $\dim B_{\mathfrak{q}} \geq \dim A_{\mathfrak{q} \cap A}$. □

8.3.10. Sei $A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Der Beweis der vorigen Proposition zeigt:

(1) Falls $A \to B$ die Aussage von Proposition 5.2.5 erfüllt, so gilt $\dim A \geq \dim B$.

(2) Falls $A \to B$ Going-Up und Lying-Over erfüllt, so ist $\dim A \leq \dim B$.

8.4. **Krulls Hauptidealsatz.**

Lemma 8.4.1. *Sei A ein noetherscher Ring und $x_1, \ldots, x_s \in A$. Dann gilt für jedes minimale Primoberideal $\mathfrak{p} \supseteq (x_1, \ldots, x_s)$:*

$$\dim A_{\mathfrak{p}} \leq s$$

Beweis. Betrachte $I := (x_1/1, \ldots, x_s/1) = (x_1, \ldots, x_s) \cdot A_{\mathfrak{p}} \subseteq A_{\mathfrak{p}}$. Dann ist $\mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}}$ das einzige minimale Primoberideal von I, also ist I ein Definitionsideal von $A_{\mathfrak{p}}$. Nach Satz 8.3.8 gilt

$$\dim A_{\mathfrak{p}} = \delta(A_{\mathfrak{p}}) \leq s.$$

□

Lemma 8.4.2. *Sei $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal des Rings A. Dann ist jedes $a \in \mathfrak{p}$ ein Nullteiler von A.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $a \neq 0$. Da $\mathfrak{p}$ minimal ist, ist $\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p}$ das einzige Primideal von $A_\mathfrak{p}$. Somit ist $\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p} = \sqrt{0} = \mathrm{Nil}(A_\mathfrak{p})$. Damit $a/1 \in \mathrm{Nil}(A_\mathfrak{p})$, weshalb ein $n > 0$ und ein $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ existieren, so dass $sa^n = 0$ in A. Wähle $n > 0$ minimal mit dieser Eigenschaft. Dann gilt $sa^{n-1} \neq 0$, aber $(sa^{n-1})a = 0$. Also ist a ein Nullteiler. □

Satz 8.4.3 (Krulls Hauptidealsatz)**.** *Sei A ein noetherscher Ring und $a \in A$ ein Nicht-Nullteiler. Dann gilt für jedes minimale Primoberideal $\mathfrak{p} \supseteq (a)$:*

$$\dim A_\mathfrak{p} = 1.$$

Beweis. Nach Lemma 8.4.1 ist $\dim A_\mathfrak{p} \leq 1$. Wäre $\dim A_\mathfrak{p} = 0$, so wäre $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal von A und damit a ein Nullteiler nach Lemma 8.4.2. Ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

8.5. **Dimension von endlich erzeugten Algebren über Körpern.**

Proposition 8.5.1. *Sei k ein Körper. Dann ist $\dim k[t_1, \dots, t_n] = n$.*

Beweis. In $A := k[t_1, \dots, t_n]$ haben wir die Primidealkette

$$(0) \subsetneqq (t_1) \subsetneqq \dots \subsetneqq (t_1, \dots, t_n)$$

also ist $\dim A \geq n$. Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \dots \subsetneqq \mathfrak{p}_l$ eine Primidealkette von A. Wir wollen $l \leq n$ zeigen. Wir verwenden die starke Form der Noether-Normalisierung. Demnach gibt es über k algebraisch unabhängige Elemente $y_1, \dots, y_n \in A$ und Zahlen $0 \leq h_0 \leq \dots \leq h_l \leq n$, so dass $k[y_1, \dots, y_n] \subseteq A$ endlich ist und

$$\mathfrak{p}_i \cap k[y_1, \dots, y_n] = (y_1, \dots, y_{h_i}).$$

Da $\mathfrak{p}_i \subsetneqq \mathfrak{p}_{i+1}$ und A ganz ist über $k[y_1, \dots, y_n]$ folgt $\mathfrak{p}_i \cap k[y_1, \dots, y_n] \subsetneqq \mathfrak{p}_{i+1} \cap k[y_1, \dots, y_n]$ mit Proposition 5.2.5. Wir folgern $h_i < h_{i+1}$. Also muss $l \leq n$ sein. □

Satz 8.5.2 (Dimension als Transzendenzgrad)**.** *Sei k ein Körper und sei A eine endlich erzeugte k-Algebra. Dann ist*

$$\dim A = \mathrm{trdeg}(Q(A) \mid k).$$

Beweis. Nach Noether-Normalisierung existieren $y_1, \dots, y_n \in A$, algebraisch unabhängig über k, so dass $k[y_1, \dots, y_n] \subseteq A$ ganz ist. Mit Propositionen 8.3.9 und 8.5.1 ist

$$\dim A = \dim k[y_1, \dots, y_n] = n.$$

Allerdings ist $n = \mathrm{trdeg}(k(y_1, \dots, y_n)|k)$ und $k(y_1, \dots, y_n) \subseteq Q(A)$ algebraisch. Deshalb ist $n = \mathrm{trdeg}(Q(A) \mid k)$. □

Literatur

[1] A. Altman and S. Kleiman. *A Term of Commutative Algebra*. 2013. Open Source.

[2] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[3] N. Bourbaki. *Commutative algebra. Chapters 1–7*. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the French, Reprint of the 1989 English translation.

[4] D. Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[5] T. W. Hungerford. *Algebra*, volume 73 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980. Reprint of the 1974 original.

[6] H. Matsumura. *Commutative algebra*, volume 56 of *Mathematics Lecture Note Series*. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., second edition, 1980.

[7] M. Reid. *Undergraduate commutative algebra*, volume 29 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[8] O. Zariski and P. Samuel. *Commutative algebra. Vol. 1*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1975. With the cooperation of I. S. Cohen, Corrected reprinting of the 1958 edition, Graduate Texts in Mathematics, No. 28.