H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2017/18

Übungen zur Vorlesung Schemata
—Blatt 7—

Aufgabe 1. Sei p eine Primzahl. Man sagt ein Ring A habe Charakteristik p, wenn $p \cdot 1 = 0$ in A gilt. Zeige, dass für ein Schema X folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Für jede offene Teilmenge U von X hat $\mathscr{O}_X(U)$ Charakteristik p.

(ii) Für jede affine offene Teilmenge U von X hat $\mathscr{O}_X(U)$ Charakteristik p.

(iii) Es gibt eine affine offene Überdeckung $X = \bigcup_i U_i$, so dass alle $\mathscr{O}_X(U_i)$ Charakteristik p besitzen.

(iv) $\mathscr{O}_X(X)$ hat Charakteristik p.

(v) Der natürliche Morphismus $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ faktorisiert durch $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Wie stehen diese Eigenschaften zu der Aussage, dass alle Residuenkörper $\kappa(x)$ Charakteristik p haben?

Aufgabe 2. Sei X ein Schema und sei K ein Körper.

(i) Zeige, dass die Menge $X(K) := \operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} K, X)$ aller Morphismen $\operatorname{Spec} K \to X$ von Schemata in Bijektion zur Menge aller Paare (x, i) bestehend aus $x \in X$ und Körpererweiterungen $i : \kappa(x) \hookrightarrow K$ steht. Aus dem Grund bezeichnet man einen Morphismus $\operatorname{Spec} K \to X$ auch als einen K-wertigen Punkt von X.

(ii) Sei k ein Körper und nehme an, dass X ein Schema über $\operatorname{Spec} k$ ist. Sei K ein Erweiterungskörper von k. Wozu steht die Menge $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} k}(\operatorname{Spec} K, X)$ aller Morphismen von Schemata von $\operatorname{Spec} K \to X$ über $\operatorname{Spec} k$ in Bijektion?

(iii) Nimm, in der Situation von (ii), zusätzlich an, dass X über $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ definiert sei; es gibt also ein Schema X_0 über $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ mit $X = X_0 \times \operatorname{Spec} k$. Dann gibt es eine natürliche Bijektion zwischen $X_0(K)$ und $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} k}(\operatorname{Spec} K, X)$.

(iv) Sei $X_0 = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]/(f_1, \ldots, f_m))$. Zeige, dass $X_0(K)$ mit der Menge $\{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ (alle } i)\}$ übereinstimmt.

(v) Zeige, dass es ein Schema N_2 über $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ gibt, so dass $N_2(K)$ die Menge aller nilpotenten 2×2-Matrizen mit Einträgen in K für jeden Körper K ist. Bestimme $\# N_2(\mathbb{F}_q)$ für jede Primzahlpotenz q.

Aufgabe 3. Sei X ein Schema. Für einen Punkt $x \in X$ sei der Zariski-Tangentialraum T_x definiert als das Dual des $\kappa(x)$-Vektorraums m_x/m_x^2 (hierbei ist, wie üblich, m_x das maximale Ideal von $\mathscr{O}_{X,x}$).

(i) Sei nun X ein Schema über k und x sei ein k-rationaler Punkt, d.h. $\kappa(x) = k$. Sei $k[\varepsilon] = k[t]/(t^2)$. Dann gibt es eine natürliche Bijektion zwischen T_x und der Menge der Morphismen $f : \operatorname{Spec} k[\varepsilon] \to X$, die den abgeschlossenen Punkt von $\operatorname{Spec} k[\varepsilon]$ auf x abbilden.

(ii) Sei $N_{2,\mathbb{C}} = N_2 \times \operatorname{Spec} \mathbb{C}$. Bestimme den Tangentialraum jedes abgeschlossenen Punkts von $N_{2,\mathbb{C}}$.