H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2017/18

Übungen zur Vorlesung Schemata
—Blatt 5—

Aufgabe 1. Ein Ring A heißt Jacobson, wenn jedes seiner Primideale als Durchschnitt von maximalen Idealen geschrieben werden kann. Verwende folgende Version von Hilberts Nullstellensatz (die man in Eisenbuds Buch finden kann):

Sei A ein Jacobson Ring. Ist B eine endlich erzeugte A-Algebra, so ist B auch Jacobson. Ferner ist für jedes maximale Ideal n von B auch $n \cap A$ ein maximales Ideal von A und die Erweiterung $A/(n \cap A) \to B/n$ ist endlich.

Verwende diesen Satz, um folgende Aussagen zu zeigen:

(i) Ist A eine endlich erzeugte Algebra über einem Körper k, so stimmen die abgeschlossenen Punkte von $\operatorname{Spec} A$ überein mit der Menge der $p \in \operatorname{Spec} A$, für die $\kappa(p)$ eine endliche Erweiterung von k ist.

(ii) Sei $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus von endlich erzeugten k-Algebren. Dann bildet $\operatorname{Spec}(\varphi) : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ abgeschlossene Punkte auf abgeschlossene Punkte ab.

(iii) Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $A = k[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m)$, so ist die Menge $\operatorname{Max} A$ der abgeschlossenen Punkte von $\operatorname{Spec} A$ in Bijektion zur Menge $Z(f_1, \ldots, f_m)$ der $x = (x_1, \ldots, x_n) \in k^n$, die $f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0$ erfüllen.

(iv) Versehe, in der Situation von (iii), die Menge $\operatorname{Max} A$ mit der Relativtopologie der Zariski Topologie auf $\operatorname{Spec} A$ und $Z(f_1, \ldots, f_m)$ mit der Relativtopologie der Zariski Topologie auf k^n. Zeige, dass die obige Bijektion ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 2. Sei $A = \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ und $A_{\mathbb{C}} = A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Betrachte die natürliche Abbildung $\pi : \operatorname{Spec} A_{\mathbb{C}} \to \operatorname{Spec} A$.

(i) Zeige, dass es auf der Menge der abgeschlossenen Punkte von $\operatorname{Spec} A_{\mathbb{C}}$ eine S_2-Aktion derart gibt, dass die von π induzierte Abbildung $\operatorname{Max}(A_{\mathbb{C}}) \to \operatorname{Max}(A)$ auf den abgeschlossenen Punkten mit der Quotientenabbildung übereinstimmt.

(ii) Unter der Abbildung π werden die Fixpunkte der S_2-Aktion auf die $m \in \operatorname{Max}(A)$ mit $\kappa(m) = \mathbb{R}$ abgebildet.

(iii) Diejenigen $m \in \operatorname{Max}(A)$ mit $\kappa(m) = \mathbb{C}$ sind maximale Ideale von der Form

$$(X^2 + Y^2 - 1, \alpha X + \beta Y - 1)$$

für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha^2 + \beta^2 < 1$.

Die Aussagen (i) und (ii) sind Spezialfälle zu allgemeinen Resultaten über rationale Punkte, die wir (vielleicht) noch kennenlernen werden.

Aufgabe 3. Sei $A = \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2)$. Wir definieren $A_{\mathbb{C}}$ und π wie in der Aufgabe zuvor.

(i) $\operatorname{Spec} A$ ist irreduzibel.

(ii) $\operatorname{Spec} A_{\mathbb{C}}$ hat zwei irreduzible Komponenten.

(iii) Der einzige abgeschlossene Punkt von $\operatorname{Spec} A$ mit $\kappa(m) = \mathbb{R}$ ist der Nullpunkt.

(iv) Auch hier kann man wieder eine S_2-Aktion wie in der vorigen Aufgabe finden.