H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum Wintersemester 2017/18

Übungen zur Vorlesung Schemata
—Blatt 4—

Aufgabe 1. Sei A ein Ring und sei $S \subseteq A$ ein multiplikatives System.

(i) Sei a ein Ideal von A. Dann stimmt das Ideal $S^{-1}A \cdot a$ (also das vom Bild von a unter $A \to S^{-1}A$ erzeugte Ideal von $S^{-1}A$) überein mit $\{f/s \mid f \in a,\ s \in S\}$. Ferner ist jedes Ideal von $S^{-1}A$ von der Form $S^{-1}A \cdot a$.

(ii) Sei a ein Ideal von A. Dann ist das Bild T von S unter $A \to A/a$ ein multiplikatives System von A/a und es gibt einen natürlichen Isomorphismus von A-Algebren

$$(S^{-1}A)/(S^{-1}A \cdot a) \xrightarrow{\cong} T^{-1}(A/a).$$

(iii) Ist p ein Primideal von A mit $p \cap S = \emptyset$, so ist $S^{-1}A \cdot p$ ein Primideal von $S^{-1}A$. Die Zuordnungen $p \mapsto S^{-1}A \cdot p$ und $q \mapsto q \cap A$ liefern stetige, zueinander inverse Bijektionen

$$\{p \in \operatorname{Spec} A \mid p \cap S = \emptyset\} \rightleftarrows \operatorname{Spec} S^{-1}A.$$

Aufgabe 2. Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und sei $S \subseteq A$ ein multiplikatives System.

(i) Die A-Algebren $B \otimes_A S^{-1}A$ und $\varphi(S)^{-1}B$ sind natürlich isomorph.

(ii) $\operatorname{Spec}(B \otimes_A S^{-1}A)$ ist homöomorph zu $\{q \in \operatorname{Spec} B \mid (q \cap A) \cap S = \emptyset\}$.

(iii) Sei p ein Primideal von A. Zu welchen Teilmengen von $\operatorname{Spec} B$ sind $\operatorname{Spec}(B \otimes_A A_p)$ bzw. $\operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(p))$ homöomorph?

Aufgabe 3. Ein A-Modul M heißt flach, wenn für jeden injektiven Homomorphismus $N' \to N''$ von A-Moduln auch die induzierte Abbildung $N' \otimes_A M \to N'' \otimes_A M$ injektiv ist. Zeige, dass $S^{-1}A$ aufgefasst als A-Modul flach ist.
Hinweis: Definiere, in analoger Weise zur Äquivalenzrelation in der Definition zur Lokalisation von Ringen, eine Äquivalenzrelation auf $S \times M$ und zeige, dass die Menge $S^{-1}M$ der Äquivalenzklassen mit geeigneten Operationen zu einem $S^{-1}A$-Modul wird. Zeige dann $S^{-1}M \cong M \otimes_A S^{-1}A$ und folgere daraus die Flachheit.

Aufgabe 4. Lokal-gobal Prinzipien: Sei M ein A-Modul.

(i) Für $x \in M$ ist genau dann $x = 0$, wenn $x \otimes 1 = 0$ in $M \otimes_A A_m$ für alle maximalen Ideale m von A ist.

(ii) Genau dann ist $M = 0$, wenn $M \otimes_A A_m = 0$ ist für alle maximalen Ideale m von A.

(iii) Genau dann ist ein Homomorphismus $M \to N$ von A-Moduln injektiv bzw. surjektiv, wenn $M \otimes_A A_m \to N \otimes_A A_m$ injektiv bzw. surjektiv ist für jedes maximale Ideal m von A.