H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2017/18

Übungen zur Vorlesung Schemata
—Blatt 3—

Aufgabe 1. Sei a ein Ideal eines Rings A. Zeige, dass das Radikal $\sqrt{a}$ von a mit dem Durchschnitt $\bigcap_{p \in V(a)} p$ übereinstimmt.
Hinweis: Führe die Annahme der Existenz eines $f \in \bigcap_{p \in V(a)} p$, das nicht in $\sqrt{a}$ liegt zum Widerspruch durch Anwendung von Zorns Lemma auf die Menge

$$\{b \mid b \text{ Ideal von } A \text{ mit } b \supseteq a \text{ und } f^k \notin b \text{ (alle } k > 0)\}.$$

Aufgabe 2. Beschreibe die topologischen Räume

(i) $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$,

(ii) $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_{(p)}$ und

(iii) $\operatorname{Spec} \mathbb{R}[X]$.

Aufgabe 3. Ein Ring A heißt reduziert, falls es außer 0 keine nilpotenten Elemente in A gibt. Zeige, dass für einen geringten Raum $(X, \mathscr{O}_X)$ die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Für jede offene Teilmenge U von X ist $\mathscr{O}_X(U)$ reduziert.

(ii) Für alle $x \in X$ ist $\mathscr{O}_{X,x}$ reduziert.

Sind diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, so heißt der geringte Raum $(X, \mathscr{O}_X)$ reduziert.

Aufgabe 4. Sei $(X, \mathscr{O}_X)$ ein lokal geringter Raum. Für jede offene Teilmenge U von X sei die Abbildung $\mathscr{O}_X(U) \to \prod_{x \in U} \kappa(x)$ injektiv. Zeige, dass $(X, \mathscr{O}_X)$ reduziert ist.