H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2017/18

# Übungen zur Vorlesung Schemata
## —Blatt 10—

**Aufgabe 1.** Sei $X$ ein Schema und sei $L$ ein invertierbarer $\mathscr{O}_X$-Modul. Sei $s \in L(X)$ ein globaler Schnitt. Zeige, dass $\{x \in X \mid s_x \notin m_x \cdot F_x\}$ die größte offene Teilmenge $U$ von $X$ ist, auf der $L|_U = \langle s|_U \rangle_{\mathscr{O}_X|_U}$ gilt.

**Aufgabe 2.** Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Zeige, dass es genau einen Morphismus $f_{\mathrm{red}} : X_{\mathrm{red}} \to Y_{\mathrm{red}}$ so gibt, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_{\mathrm{red}} \arrow[r] \arrow[d, "f_{\mathrm{red}}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y_{\mathrm{red}} \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

kommutiert.

**Aufgabe 3.** Betrachte auf $\mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ die Garbe $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \boxtimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) := p_1^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \otimes p_2^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, wobei $p_1 : \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ und $p_2 : \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ die beiden Projektionen seien. Die erzeugenden globalen Schnitte von $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$ und $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ seien mit $s_0, \ldots, s_m$ bzw. $t_0, \ldots, t_n$ bezeichnet. Betrachte den Morphismus

$$\sigma : \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{mn+m+n},$$

der durch die globalen Schnitte $s_i \boxtimes t_j := p_1^* s_i \otimes p_2^* t_j$ von $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \boxtimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ induziert wird. Zeige, dass $\sigma$ eine abgeschlossene Einbettung ist. Man nennt $\sigma$ die Segre Einbettung.