H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2016/17

Übungen zur Vorlesung Schemata
—Blatt 1—

Aufgabe 1. (i) Sind a, b Ideale von $k[x_1, \dots, x_n]$, so ist $Z(a) \cup Z(b) = Z(a \cap b) = Z(a \cdot b)$

(ii) Für Ideal $(a_i)_{i\in I}$ ist $\bigcap_{i\in I} Z(a_i) = Z(\sum_{i\in I} a_i)$

(iii) $Z(k[x_1, \dots, x_n]) = \varnothing$ und $Z(0) = k^n$.

(iv) Für jedes Ideal a von $k[x_1, \dots, x_n]$ ist $Z(a) = Z(\sqrt{a})$.

Aufgabe 2. Sei $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$ eine endliche Menge. Zeige, dass Z Zariski abgeschlossen in $\mathbb{A}^n(k)$ ist. Zeige auch, dass die Zariski Topologie auf $\mathbb{A}^2(k)$ nicht durch die Produkt-Topologie auf $\mathbb{A}^1(k) \times \mathbb{A}^1(k)$ gegeben ist.

Aufgabe 3. Sei F eine Prägarbe abelscher Gruppen auf einem topologischem Raum X. Zeige, dass es, gegeben eine offene Teilmenge U und eine offene Überdeckung $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, eine natürliche Sequenz

$$0 \to F(U) \to \prod_{i\in I} F(U_i) \to \prod_{(j,k)\in I\times I} F(U_j \cap U_k)$$

so gibt, dass F genau dann eine Garbe ist, wenn die obige Sequenz für alle U und alle $\{U_i\}_i$ exakt ist.

Aufgabe 4. Sei A eine abelsche Gruppe und sei X ein topologischer Raum. Zeige, dass durch

$$A_X(U) = \{f : U \to A \mid f \text{ ist lokal konstant}\}$$

eine Garbe auf X definiert wird, die mit der Garbifizierung der konstanten Prägarbe auf X mit Wert A übereinstimmt.