M. Reineke
H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2016/17

Übungen zur Linearen Algebra I
—Blatt 8—

Aufgabe* 1. Betrachte $\mathbb{C}^3$ und darin die Vektoren

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2+i \\ i \\ i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2i \\ -1-i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Sei $V = \mathbb{C}^3$ versehen mit der üblichen $\mathbb{C}$-Vektorraumstruktur. Sind die obigen Vektoren in V linear unabhängig?

(ii) Sind die selben Vektoren linear unabhängig in $V_\mathbb{R} = \mathbb{C}^3$ aufgefaßt als reeller Vektorraum?

Begründe jeweils Deine Antwort.

Aufgabe* 2. Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2a \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

Aufgabe 3. Sei V ein komplexer Vektorraum und sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Es sei $V_\mathbb{R}$ der Vektorraum V aufgefaßt als ein reeller Vektorraum. Zeige, daß $(v_1, \ldots, v_n, iv_1, \ldots, iv_n)$ eine Basis von $V_\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 4. Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Sei I eine beliebige Menge und sei $(v_i)_{i\in I}$ ein Tupel von Vektoren $v_i \in V$. Zeige:

(i) Genau dann ist $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig, wenn $v_j \notin \langle v_i : i \in I \setminus \{j\}\rangle$ für jedes $j \in I$ gilt.

(ii) Ist $(v_i)_{i\in I}$ unverlängerbar linear unabhängig und $v \in V$, so ist $v \in \langle v_i : i \in I\rangle$.

Abgabe am Montag, den **19.12.2016**, um 10 Uhr. Einwurf in die Zettelkästen auf Ebene NA 02.

Aufgaben mit * müssen abgegeben werden und sind für die Bonuspunkte relevant. Diese Aufgaben werden mit maximal 4 Punkten bewertet.