Aufgaben zum Vorkurs für Mathematiker und Physiker 2016

Prof. Dr. M. Reineke 26. September 2016
Blatt 4

(Eigene) Lösungen der Aufgaben, die mit $\mathcal{K}$ gekennzeichnet sind, können Sie zur Selbstkontrolle bei Ihrem jeweiligen Übungsgruppenleiter zur Korrektur abgeben.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme. Stellen Sie die einzelnen Gleichungen auch im Koordinatensystem dar und geben Sie eine geometrische Interpretation der Ergebnisse.

(a) $\begin{aligned} -3x + y &= -1 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 4x + 2y &= 3 \\ -3y - 6x &= 5 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 8x - 4y &= -12 \\ -6x + 3y &= 9 \end{aligned}$

Aufgabe$^{\mathcal{K}}$ 2: (4 Punkte)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

Welche geometrische Form hat die Lösungsmenge?

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Gegeben sei die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeichnen Sie den Graphen der Geraden g.

(b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Es seien X und Y endliche Mengen, und $f : X \to Y$ eine Abbildung.
Zeigen Sie:

(a) f ist injektiv $\iff \exists\, g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

(b) f ist surjektiv $\iff \exists\, g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(c) f ist bijektiv $\iff \exists!\, g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

Ist die Abbildung g in (a) und (b) auch eindeutig bestimmt?

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Es seien X und Y Mengen, und $f : X \to Y$ eine Abbildung.
Zeigen Sie: Es existiert

- eine Menge W,
- eine surjektive Abbildung $g : X \to W$, und
- eine injektive Abbildung $h : W \to Y$,

derart, dass $f = h \circ g$ gilt.

Aufgabe$^{\mathcal{K}}$ 6: (2 Punkte)

Lösen Sie die quadratische Gleichung $z^2 + 15z + 57 = 0$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe$^{\mathcal{K}}$ 7: (3 Punkte)

Es sei $z = 5 + 3\mathbf{i}$ und $w = 6 - 7\mathbf{i}$.
Bringen Sie

$$z + w, \;\; z \cdot w, \;\; z \cdot w, \;\; z/w$$

jeweils in die (Standard-)Form $a + b\mathbf{i}$.