Aufgaben zum Vorkurs für Mathematiker und Physiker 2016

Prof. Dr. M. Reineke 19. September 2016
Blatt 3

(Eigene) Lösungen der Aufgaben, die mit $\mathcal{K}$ gekennzeichnet sind, können Sie zur Selbstkontrolle bei Ihrem jeweiligen Übungsgruppenleiter zur Korrektur abgeben.

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei T eine Menge und seien $A, B \subseteq T$ Teilmengen.
Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $A \setminus B = \emptyset$.

(b) $A \subseteq B$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Seien X und Y Mengen, sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und seien $A \subseteq X$ sowie $B \subseteq Y$ jeweils Teilmengen. Zeigen Sie:

(a) $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$.
Gilt auch die andere Inklusion?

(b) $A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$.
Gilt auch die andere Inklusion?

Aufgabe 3: (3 Punkte)
Bestimmen Sie eine lineare Funktion $f(x) = ax + b$ mit

(a) $f(1) = 2$ und $f(3) = 5$.

(b) $f(3) = -1$ und $f(4) = -7$.

Zeichnen Sie die Funktionen.

Aufgabe$^{\mathcal{K}}$ 4: (2 Punkte)
Führen Sie die folgende Polynomdivision durch:

$$(3x^4 + 7x^3 + x^2 + 5x + 1) : (x^2 + 1) = ?$$

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Es seien f und g durch $f(x) = 5x - 1$ und $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie formal $f \circ g$ und $g \circ f$.

(b) Geben Sie die größtmöglichen Definitionsbereiche für f und g an, so dass $f \circ g$ und $g \circ f$ sinnvoll definiert werden können.

Aufgabe$^{\mathcal{K}}$ 6: (8 Punkte)
Seien X und Y Mengen, sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und seien $A, B \subseteq X$ sowie $C, D \subseteq Y$ jeweils Teilemengen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Aufgabe 7: (6 Punkte)
Sei $M = \{1, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$. Überprüfen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$.

(b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{x+1}$.

(c) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto (x - y, x + y)$.