Aufgaben zum Vorkurs für Mathematiker und Physiker 2016

Prof. Dr. M. Reineke 12. September 2016
Blatt 2

(Eigene) Lösungen der Aufgaben, die mit $\mathcal{K}$ gekennzeichnet sind, können Sie zur Selbstkontrolle bei Ihrem jeweiligen Übungsgruppenleiter zur Korrektur abgeben.

Aufgabe$^{\mathcal{K}}$ 1: (3 Punkte)

Beweisen Sie die binomischen Formeln:

(a) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

(b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

(c) $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$.

Geben Sie dabei präzise an, welche Gesetze Sie bei welcher Umformung benutzt haben.

Aufgabe 2: (2 Punkte)

Lösen Sie die Gleichungen

(a) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x} = 1 + \frac{6}{x}$.

(b) $2(x+1) = x + 4$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Zeigen Sie für reelle Zahlen a,b:

(a) $a^2 + b^2 = 0 \Longleftrightarrow (a = 0) \wedge (b = 0)$.

(b) Ist $a < b$ und $ab < 0$, so ist $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Nehmen wir an, jemand gibt die folgenden Zeilen ab. Was wurde alles falsch gemacht?

(a) $x^2 = 48 \Longleftrightarrow 4\sqrt{3}$.

(b) $n = m + 2 \Longrightarrow (m+2)^3 \Longrightarrow m^3 + 6m^2 + 12m + 8$.

(c) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Aufgabe* 5 (Kettenbruch): (10 Punkte)

Man betrachte die Zahlenfolge $\Phi = (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= 1, \\ \Phi_n &= \tfrac{1}{1+\Phi_{n-1}} \quad \text{für } n > 1. \end{aligned}$$

Finden Sie eine Formel für diese Zahlenfolge.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

(a) Geben Sie sämtliche Primzahlen zwischen 1 und 100 an.

(b) Bestimmen Sie ggT(14312,4064) mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

Aufgabe$^{\mathcal{K}}$ 7: (6 Punkte)

Finden Sie eine Formel für

(a) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$,

(b) $\sum_{k=0}^{n} k^3$,

und beweisen Sie diese.

Tipp: Was haben $\int_1^n (2x-1)\,\mathrm{d}x$ und $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ miteinander zu tun?

Aufgabe 8: (8 Punkte)

Beweisen Sie:

(a) $n^2 < 2^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 5.$

(b) Ist $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, $x \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, so gilt:

$$(1+x)^n \; > \; 1+nx.$$

(c) Ist $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$ und $n \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i \; = \; \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

(d) Sind $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a \neq b$ und $n \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i} \; = \; \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

Aufgabe 9: (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen und skizzieren Sie sie.

(a) $|4-3x| > 2x+10.$

(b) $|2x-10| \leq x.$

(c) $2x^2 - 5x + 6 \leq 4.$

Aufgabe* 10 (g-adische Darstellung): (10 Punkte)

Sei $g \in \mathbb{N}$ mit $g \geq 2$.

Für $0 \neq a \in \mathbb{N}$ heißt eine Gleichung der Form

$$a \;=\; q_n g^n + q_{n-1} g^{n-1} + \ldots + q_1 g + q_0$$

eine *g-adische Darstellung von a*, wenn folgendes gilt:

1. $n \in \mathbb{N}$, $q_0, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{N}$,
2. $q_n \neq 0$, $0 \leq q_i < g$ für alle $i = 0, \ldots, n$.

(a) Beweisen Sie, dass jede natürliche Zahl $a \neq 0$ eine eindeutige g-adische Darstellung besitzt.

(b) Bestimmen Sie die 10-adische Darstellung von 123456789.

(c) Bestimmen Sie die 7-adische Darstellung von 257.

(d) Bestimmen Sie die 2-adische Darstellung von 333.