Liste von Themen

1. Hintergrund: eine kurze Wiederholung. *Sehen Sie [A] oder [H, Ch 1] oder [E, Appendixe].*
    - L^p-Räume (und L^p_{loc}), Satz von Lebesgue, Banachräume und Hilberträume, Satz von Fubini, Höldersche und Minkowski Ungleichung.
    - C_c, C_0, C^k, und $C^{k,\alpha}$ Räume.
    - Der Gaußsche Satz, Satz von Green, Integration in Polarkoordinaten.
    - Faltung. Dichtheit von glatter Funtionen in $L^p(\mathbb{R}^n)$.
2. Die Transportgleichung.
    - Die homogene Gleichung: $u_t + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} = 0$ auf $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ mit Anfangsbedingung $u = g$ auf $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.
        - Für $n = 1$ und $b = 1$, *[S, Seite 32-33].*
        - Der allgemeine Fall, *[E, Seite 18].*
        - Charakteristiken. *[S, Seite 34].*
    - Die inhomogene Gleichung: $u_t + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} = f$ auf $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ mit Anfangsbedingung $u = g$ on $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.
        - Der Fall $n = 1$ und $b = 1$, *[S, Seite 33-34].*
        - Der allgemeine Fall, *[E, Seite 19].*
    - Auf einen Raum-Zeit Zylinder: $(a, b) \times (0, \infty)$. Randbedingungen und Charakteristiken *[S, Seite 34].*
3. Die Fouriertransformation. Wir werden die Definition von [E], [L], [H] benutzen*. *Benutzen Sie [L, Abschnitt 2.3] und zusätzlich den Literaturhinweis für das Lemma von Riemann-Lebesgue.*
    - Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$. Lemma von Riemann-Lebesgue: $f \in L^1$ impliziert $\hat{f}$ stetig ist und $\|\hat{f}\|_{C^0} \leq \|f\|_{L^1}$. *[HN, Satz 11.34] und [F, Lem 0.24].*
    - Fouriertransformation der Gauß'schen Normalverteilung. Fortsetzung der FT zu $L^2(\mathbb{R}^n)$.
    - Erste Eigenschaften der Fouriertransformation; Satz von Plancherel, ableiten $\partial_i \to$ multiplikation von x_i, die Faltung $\to$ multiplikation, die Rücktransformationsformel.
4. Die Wärmeleitungsgleichung. *Benutzen Sie [L, Abschnitt 2.4].*
    - Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$: mit Hilfe der Fouriertransformation, aber auch rigoros begründet.
    - die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

*Vorsicht: verschiedene Bücher verwenden unterschiedliche Definitionen für die Fouriertransformation. Wie gesagt, wir werden die Definition von [E] benutzen.

5. Eine Abschnitt auf Distributionen (nennt man auch verallgemeinerte Funktionen). *Sehen Sie [L, Abschnitt 2.5] oder [S, Abschnitt 3.2] oder [A] und die Referenzen unten.*

    - Erste Begriffe und Beispiele *[L, Abschnitt 2.5]*, Konvergenz von Distributionen, *für genaurer sehen Sie [H, Abschnitt 3.3].* Reguläre Distributionen *[H, Bei 3.11].*
    - Die Ableitung von Distributionen *[L, Abschnitt 2.5].*
    - Schwache Ableitungen von L^1_{loc}-Functionen und Beispiele, *[H, Seite 47,48]. Sehen Sie auch die Bemerkungen auf [H, Seite 53], wobei die schwache Ableitung als distributionale Ableitung interpretiert ist.* Erste Eigenschaften von schwache Ableitungen; die Eindeutigkeit *[E, Seite 243]*, die Produktregel *[H, Prop 3.16].*
    - Lösungen der Transportgleichung im Distributionssinn, *[S, Bei 3.9].*

6. Weiter mit der Wärmeleitungsgleichung. *Benutzen Sie [L, Abschnitt 4, Seite 30-44], aber lassen Sie [L, Abschnitt 2.7.3] und [L, Abschnitt 2.7.4] aus. Sehen Sie auch [S, Seite 203-206].* Genauer gesagt:

    - Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung wieder betrachtet *[L, Abschnitt 2.5.4].*
    - Eigenschaften von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung *[L, Abschnitt 2.6].*
    - Die inhomogene Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$. Variation der Konstanten (Auf Englisch nennt man die oft "Duhamel's Principle"). *[L, Abschnitt 2.7], aber Abschnitte 2.7.3, 2.7.4 konnen Sie auslassen.*
    - Das Maximumprinzip auf einem beschränkten Gebiet, das Maximumprinzip auf $\mathbb{R}^n$ *[L Abschnitt 2.8].*
    - Energiemethoden. *Sehen Sie [L, Seite 44], aber diese Resultat kann auch als eine Ungleichung wie im [RR Lemma 1.20] angegeben.*
    - Die Eindeutigkeit von Lösungen: mit Hilfe von das Maximumprinzip und Energiemethoden (Sie können sie vergleichen). Ein Beispiel auf $\mathbb{R}^n$, bei dem die Eindeutigkeit ausfällt, weil die Lösung zu schnell wachst. *Sehen Sie [FJ, Seite 211].*

7. Die Laplace-Gleichung auf $\mathbb{R}^n$. *Benutzen Sie [L, Abschnitt 3] und zusätzlich den Literaturhinweis für die Harnack-Ungleichung. Lassen Sie Abschnitt 3.3 von [L] aus.*

    - Die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung und der Beweis im Distributionssinn.
    - Eine Lösung der Poisson-Gleichung.
    - Harmonische Functionen: die Mittelwerteigenschaft, das Maximumprinzip, die Harnack-Ungleichung *[S, Satz 8.4] oder [H, Abschnitt 2.4]*, die Eindeutigkeit auf beschränkte Gebiete, die Regularität, Satz von Liouville, die Eindeutigkeit von beschränkte Lösungen der Poisson-Gleichung auf $\mathbb{R}^{n\geq 3}$ (die Darstellungsformel).

    Diese Themen kann man auch im [E, Abschnitt 2.2] und [S, Abschnitte 2.2 und 8.1] finden.

8. Die Laplace-Gleichung auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Benutzen Sie [L, Abschnitt 4] und die weiteren Literaturangaben unten. Diese Themen kann man auch im [E, Abschnitt 2.2] und [S, Abschnitte 5.2] finden.*

   - Diskussion über das Dirichlet Problem und das Neumann Problem. *Sehen Sie [F, Seite 83-85].*
   - Green'sche Funktionen (die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung auf einem beschränkten Gebiet). Motivation, die Darstellung einer Lösung. Die Green'sche Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}^n_+$. Die Poisson-Formel auf $\mathbb{R}^n_+$. Die Poisson-Formel auf der Ball ohne Beweis *[L, Abschnitt 4].*
   - Symmetrie der Green'sche Funktion: *Falls es nicht genug Zeit gibt, reicht es den Beweis zu skizzieren. Sehen Sie [F, Seite 86], und [L, Abschnitt 4.3, Lemma 13].*
   - Lösung der Poisson-Gleichung mit Hilfe der Green'sche Funktion.

   Geben Sie Beispiele 6,7,8,10 von [L, Abschnitt 4] ohne Details. Sie kann auch Theorem 12 auslassen.

9. Die Wellen Gleichung.

   - Auf $\mathbb{R}^n \times [0, T]$; erstmal für $n = 1$, die d'Alembert'sche Formel *[S, Abschnitt 2.3.3] und [E, Abschnitt 2.4.1].*
   - Formel für $n = 3$: Die Kirchoff-Formel mit Hilfe der sphärischen Mittel: *[E, Seite 70-72].*
   - Formel für $n = 2$ aus der Formel für $n = 3$, die "Absteigemethode". *Nur eine Skizze [E, Seite 73-74].*
   - Eigenschaften von Lösungen der Wellen Gleichung: *[E, Seite 83-85] + [E, Bemerkungen Seite 78].* Behandeln Sie die folgenden Themen:
     - Huygens-Prinzip *(Sehen Sie auch die Bemerkungen auf [F, Seite 172]).*
     - Der Einflussbereich (Eng: Domain of dependence),
     - Die endlich Verschwindigkeit der Ausbreitungsstörung (Eng: Finite speed of propagation/disturbance),
     - Energieerhaltung,
     - Die Eindeutigkeit von Lösungen mit Hilfe von Energiemethoden,
     - Kein Maximumprinzip.

10. Potentialtheorie. *Benutzen Sie [L, Abschnitt 5]. Lassen das "Exterior-Problems" aus. Legen Sie den Schwerpunkt auf das Dirichlet-Problem wenige auf das Neumann-Problem.*

    - Erste Definitionen.
    - Gaußsche Lemma.
    - Reduzieren die ("interior") Dirichlet und Neumann Problems auf Integralgleichungen.

11. Lösung des Dirichlet-Problems mit Hilfe von Variationsmethoden/Hilbertraum-methoden:

    (A) Einleitung Sobolewsche-Räume. *Sehen Sie die Referenzen unten. Man kann viele Details im [A] auch finden.*

        (i) Definitionen von $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ und $H^k(\mathbb{R}^n)$ und auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Hilfe von Ableitungen im Distributionssinn. Erste Eigenschaften, z.B. vollständigkeit. Dichtheit glatter Funktionen $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. *[S, Abschnitt 3.3: Seite 51-54].* Definition von $H_0^k(\Omega)$, und Vollständigkeit, *[S, Def 3.21].*

        (ii) Lemma: äquivalent Charakterisierung von $H^k(\mathbb{R}^n)$ mit Hilfe der Fouriertransformation *[F, Satz 6.1].* $H^s(\mathbb{R}^n)$ für reelle $s \geq 0$.

        (iii) Das Sobolewsche-Lemma (nennt man auch die Einbettungssatz): Die Einbettung $H^k(\mathbb{R}^n) \subset C^r(\mathbb{R}^n)$, falls $k > r + \frac{1}{2}n$, mit Hilfe der Fouriertransformation. Korollar: $f \in H^k$ für alle k impliziert $f \in C^\infty$. *[F, Lem 6.5, Kor 6.7].*

    (B) Das Dirichlet-Prinzip und schwache Lösungen von $-\Delta u = f$ auf Ω mit homogen Randbedingungen. *Benutzen Sie [S, Seite 97-102]. [A, 170-180] könnte auch Hilfreich sein.*

        (i) Die Poincaré-Ungleichung. *[S, Satz 6.1] aber benutzen Sie nur für* $p = 2$.

        (ii) Beweis der Existenz einer schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$. *[S, Satz 6.3], aber wir werden nur die Randbedingungen* $g = 0$ *betrachten. Außerdem, ersetzen Sie den Raum* X_g *durch* $H_0^1(\Omega)$.

Literaturliste

Für partielle Differentialgleichungen ist das Buch vom Evans [E] ein Klassiker geworden, aber für eine Einführung ist es zu komprimiert. Deshalb werden wir hauptsächlich das Skript [L]

http://web.stanford.edu/class/math220b/

von Levandosky benutzen. Die Themen in [L] folgen dem Buch von Evans [E], aber enthalten zusätzliche Details. Es fehlen allerdings in [L] drei Themen die für uns wichstig sind: die Transportgleichung, die Wellen Gleichung, und Sobolewsche-Räume. Für diese Themen und zusätzlichen Stoff über Distributionen habe ich deshalb weitere Literaturhinweise gegeben.

- [A]=Alt, *Lineare Funktionalanalysis: Eine anwendungsorientierte Einführung*, Springer-Lehrbuch Masterclass, Hans Wilhelm Alt.
- [L]=Levandosky, Vorlesungsnotizen, Julie Levandosky. ⋆
- [E]=Evans, *Partial Differential Equations*, Lawrence C. Evans, GSM Vol 19. ⋆
- [F]=Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Gerald B. Folland, Princetion University Press, 2nd Ed.
- [FJ]=Fritz-John, *Partial Differential Equations*, Springer, Applied Mathematical Sciences, 4th Ed.
- [H]=Hunter, Skript als pdf. ⋆
- [HN]=Hunter-Nachtergaele, *Applied Analysis*, World Scientific, John K. Hunter and Bruno Nachtergaele. ⋆

- [R]=Rauch, *Partial Differential Equations*, Jeffrey Rauch, Springer, Graduate texts in Mathematics 128.
- [RR]=Renardy-Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Michael Renardy and Robert C. Rogers, Springer, Texts in Applied Mathematics 13. $\star$
- [S]=Schweizer, *Partielle Differentialgleichungen: Eine anwendungsorientierte Einführung*, Springer-Lehrbuch Masterclass, Ben Schweizer. $\star$

  (Vorsicht! Die Referenzen zu [S] in diese Themenliste sind bezüglich das online-Version des Buchs am **Feb 2012**.)

$\star$ = Man kann dieses Skript oder Buch einfach als Pdf im Internet finden.