KLAUSUR "THEORETISCHE GEOPHYSIK II, FLUIDDYNAMIK" WINTERSEMESTER 2013/14

24. Februar 2014

Matrikelnummer:

1	~~8~~ 7
2	3
3	4
4	2
5	2
6	–
7	0
8	8
9	2
10	3
Σ	31

Beim sogenannten Finite-Differenzen-Verfahren werden mittels zwei zentraler mathematischer Werkzeuge partielle Differentialgleichungen in numerisch „einfach" lösbare Probleme verwandelt. Zum einen werden Ableitungen durch Quotienten finiter Differenzen angenähert, wofür man endlich viele „Gitter- oder Stützpunkte" einführen muss, an denen man löst, und zum anderen wird die zu lösende Gleichung in ein lineares Gleichungssystem überführt.

Aufgabe 1): Untenstehend sind Ihnen drei Schemata für die Zuordnung von Funktionswerten zu Stütz(Raum)punkten gegeben. **a)** Erklären Sie unter Nutzung der ersten beiden Schemata die beiden Möglichkeiten zur Näherung von 2. Ableitungen (mit und ohne „imaginäre" Stützpunkte) für 1-dimensionale Probleme. **b)** Geben Sie für ein 2-dimensionales Problem die Näherung der gemischten Ableitung $d^2 f / dxdy$, wobei die Raumkoordinaten den beiden Richtungen im Stützpunktraster entsprechen. (Bei beiden Teilaufgaben erscheint es vermutlich sinnvoll, die Raster als Hilfsmittel für einfache „Zeichnungen" und zusätzliche Beschriftungen zu benutzen.)

	i-2	*i*-1	*i*	*i*+1	*i*+2
f	•	•	• f_i	•	•
f'	•	•	• f'_i	•	•
f''	•	•	• f''_i	•	•

	i-2	*i*-1	*i*	*i*+1	*i*+2
f	•	•	• f_i	•	•
f'	o	o $f'_{i-1/2}$	o	o	
f''	•	•	• f''_i	•	•

	i-2	i-1	i	i+1	i+2
j-2	•	•	•	•	•
j-1	•	•	•	• $f_{j-1,i+1}$	•
j	•	•	• $f_{j,i}$	•	•
j+1	•	•	•	•	•
j+2	•	•	•	•	•

Aufgabe 2): Es sei die gewöhnliche Differentialgleichung $\frac{df}{dx} = 3x$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 3x$$

für das Intervall $x \in [0,1]$ unter der Randbedingung $f(x=0)=0$ zu lösen. **a)** Erklären Sie, was die Elemente **A** (Matrize) und $\vec{b}$ (Vektor) des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\vec{f} = \vec{b}$ bei der numerischen Umsetzung der Gleichung mittels finiter Differenzen beinhalten, wenn der Vektor $\vec{f}$ die Werte der gesuchten Funktion an den gewählten Stützstellen angibt. Wo landet die Randbedingung? **b)** Lösen Sie die Gleichung analytisch und erklären, welche Rolle bei diesem Verfahren die Randbedingung spielt. Könnte man auch eine Randbedingung (nur oder zusätzlich) für die obere Intervallgrenze angeben?

Aufgabe 3): Betrachten Sie die Rotation eines beliebigen Vektorfelds $\vec{v}$ in Kugelkoordinaten, i.e., $\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\varphi\vec{e}_\varphi + v_\theta\vec{e}_\theta$. **a)** Benutzen Sie die Komponentendarstellung des Einheitsvektors $\vec{e}_\varphi = (0,1,0)$ um das zugehörige Rotationsfeld zu berechnen. **b)** Können Sie Ihr Ergebnis graphisch interpretieren?

$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^T$ $\quad$ $\varepsilon = \varepsilon^T$

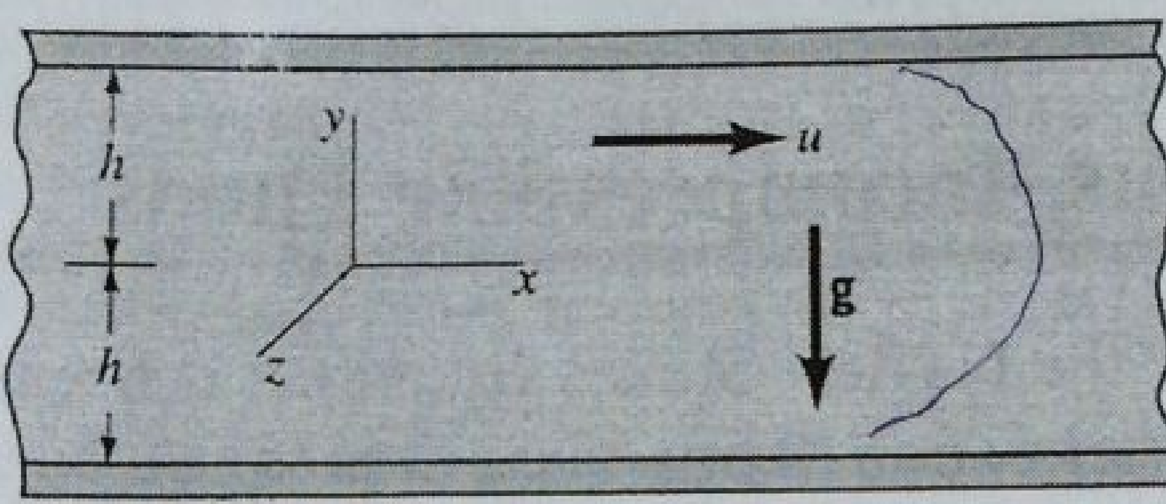
Aufgabe 4): Woraus resultiert die Symmetrie **a)** des Spannungstensors und **b)** des Verformungsratentensors? **c)** Wie zerlegt man einen Tensor (eine Matrize) in seinen (ihren) symmetrischen und antisymmetrischen Anteil. **d)** Wie hängen Verformungsratentensor $\dot{\varepsilon}$ und der Vortizitätsvektor $\vec{\zeta}$ mit der Geschwindigkeitsgradientenmatrix zusammen? (ruhig einfach für kartesische Koordinaten ausschreiben)

Aufgabe 5): Stationäres, laminares Fließen einer inkompressiblen Flüssigkeit mit Viskosität η zwischen zwei unendlich großen planparallelen Platten mit Abstand $2h$ wird durch das Geschwindigkeitsfeld

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \dots \, dy$$

$$v_{x(y)} = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\left(y^2 - h^2\right)$$

beschrieben, wenn die x-Achse genau in der Mitte zwischen den beiden Platten liegt. Nehmen Sie im Folgenden den Druckgradienten als konstant an.



a) Welcher Term in der Gleichung ist der Druckgradient und was beschreibt er? Wie verhalten sich Strömungsrichtung und Druckgradient zueinander? Welche Konsequenz hätte die Berücksichtigung der Gravitationsbeschleunigung (in Zeichnung zwar angedeutet, für das Geschwindigkeitsfeld aber nicht berücksichtigt) für das Druckfeld?
b) Beschreiben Sie die Geschwindigkeitsverteilung. (Maximum, Minimum, Mittelwert [für eine Stichprobe würden Sie die Ergebnisse aufsummieren und dann durch etwas teilen, wie geht das dann bei einer analytischen Funktion, die auf einem bestimmten Intervall definiert ist …])
c) Untersuchen Sie die Strömung auf Wirbel. Überrascht Sie das Ergebnis? (denken Sie daran, dass die Strömung als laminar deklariert wurde; wie verlaufen die Strömungslinien?) Wie kann man sich das Ergebnis mit dem üblichen Gedankenexperiment mit einem „Drehkreuz", das man in die Strömung einfügt, veranschaulichen?
d) Wie ändert sich die Spannung entlang einer zur Strömung vertikalen Linie? Nehmen Sie linear viskoses Verhalten ohne Volumenviskosität an. Welche Scherkraft pro Einheitsfläche wirkt auf die Platten? (betrachten Sie die Einheit Ihrer Antwort!) Erklären Sie die Bedeutung der beiden Indizes der resultierenden Scherspannung.

Aufgabe 6): Das Reynolds-Transport-Theorem verknüpft die zeitliche Änderung einer extensiven Größe Φ (= Element der Lagrange-Beschreibung; Eigenschaft eines Fluidvolumens) mit den Eigenschaften einer intensiven Größe φ in der Euler-Beschreibung (lokale Feldgröße):

$$\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t} = \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial t}\mathrm{d}V + \int_F \varphi\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{F} ,$$

wobei V ein beliebiges Raumvolumen innerhalb der Strömung und F dessen Oberfläche beschreiben. **a)** Leiten Sie die Kontinuitätsgleichung aus der Massenerhaltung ab. Wie heißt die zur Masse gehörige intensive Größe? **b)** Nutzen Sie die Materialableitung, um Ihr Ergebnis in einen Ausdruck für eine relative Dichteänderung umzuschreiben. Formulieren Sie mit Hilfe der gefundenen Beziehung die Bedingung für Inkompressibilität eines Mediums einmal über seine Dichte und einmal über eine Eigenschaft seines Geschwindigkeitsfelds. Wie kann man darüber hinaus Inkompressibilität über eine Eigenschaft des zugehörigen Verformungsratentensors ausdrücken?

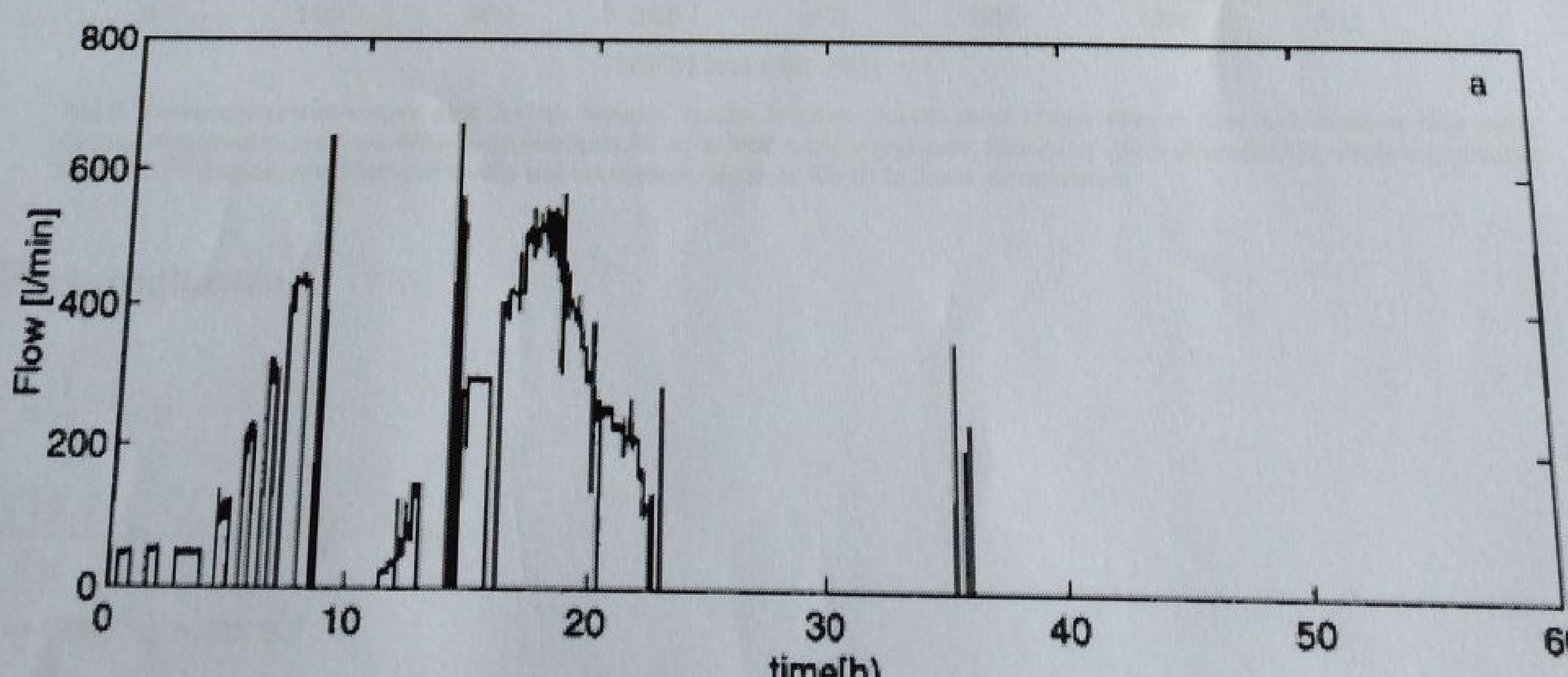
Aufgabe 7): Eine Kugel mit Radius R werde von einer inkompressiblen, isotropen, linear viskosen Flüssigkeit umströmt. Das Geschwindigkeitsfeld berechnet sich zu

$\vec{v} = v_0 \cos\theta\left[1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right]\vec{e}_r - v_0 \sin\theta\left[1 - \frac{3R}{4r} + \frac{R^3}{4r^3}\right]\vec{e}_\theta$. **a)** Welche Eigenschaften hat das

Strömungsfeld an der Oberfläche der Kugel und in großer Entfernung von der Kugel? **b)** Wir haben dieses Strömungsproblem auch im Rahmen von Potentialströmungen betrachtet und sind zu $\vec{v} = v_0 \cos\theta\left[1-\frac{R^3}{r^3}\right]\vec{e}_r - v_0 \sin\theta\left[1+\frac{R^3}{2r^3}\right]\vec{e}_\theta$ gekommen. Das Geschwindigkeitspotential hat sich dabei als Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten ergeben. Wie heißen die allgemeinen Lösungen dieser Gleichung? Stimmen diese beiden Lösungen an der Kugeloberfläche bzw. weit weg von der Kugel überein? Die Potentialströmung gilt für Flüssigkeiten ohne Viskosität. Welchen Einfluss der Fluidviskosität auf das Geschwindigkeitsfeld erkennen Sie, wenn Sie die auftretenden Potenzen der Abstands-abhängigen Terme betrachten?

Aufgabe 8): Ihnen ist das folgende Geschwindigkeitsfeld gegeben $\vec{v} = \frac{v_0}{L}\begin{pmatrix}-x\\ y\end{pmatrix}$. **a)** Skizzieren Sie es im ersten Quadranten und beantworten insbesondere, wo die Geschwindigkeit v_0 auftritt? **b)** Untersuchen Sie die Strömung auf Quellen/Senken und Wirbel. **c)** Bestimmen Sie die Strömungsliniengleichung durch Integration (Bedingung für eine Strömungslinie: $\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}$). „Vergleichen" Sie Ihr rechnerisches Ergebnis mit Ihrer Zeichnung.

Aufgabe 9): Die Reynolds-Zahl $\mathrm{Re} = UL/\nu$ beschreibt das Verhältnis zwischen Reibungs- und Trägheitskräften. Solange die Reibungskräfte dominieren, bleibt die Strömung laminar, aber bei Dominanz der Trägheitskräfte tritt turbulentes Verhalten auf. Die kritische Reynoldszahl liegt bei etwa 1. **a)** Schätzen Sie für Wasser in einem zylindrischen Bohrloch mit Radius R ab, bei welcher Fließgeschwindigkeit (sowie Injektions- bzw. Produktionsrate [das sind Angaben über Volumen pro Zeit]) die kritischen Bedingungen erreicht sind (Viskosität von Wasser $\eta_w = 10^{-3}$ Pa.s). **b)** Für stationäre Strömungen in Rohren verschiebt sich die kritische Reynolds-Zahl erfahrungsgemäß zu $\mathrm{Re}_c \sim 1000$ für $L \sim R$. Welche Geschwindigkeit und Rate sind nun möglich? Untenstehend finden Sie das Pumpprotokoll für einen Injektionstest in die KTB-Hauptbohrung (Durchmesser 125 bis 165 mm). Diskutieren Sie anhand Ihrer bisherigen Ergebnisse, ob für dieses Fließvorgang laminare oder turbulente Verhältnisse vorlagen.



Aufgabe 10) Sie haben folgenden Druck-Temperatur-Zeit-Pfad aus petrologischen Untersuchungen an einem heute aufgeschlossenen Handstück gegeben. Die mittleren

Aufstiegsgeschwindigkeiten (rechts, eingerahmt) sind aus den Datierungen (entlang der Kurve, unterstrichen) bereits ermittelt.
a) Entspricht diese Information eher der Euler oder der Lagrange Beschreibung? b) Schätzen Sie die Verteilung des Geschwindigkeitsgradienten (der Verformungsrate) entlang des Aufstiegspfads ab. (Gehen Sie von einer eindimensionalen, vertikalen Strömung aus und ersetzen die Ableitungen einfach durch Differenzenquotienten.) c) Für ein vereinfachtes Newton'sches Material lautet das Stoffgesetz (Fließgesetz) $\mathrm{dev}\boldsymbol{\sigma} = 2\eta\dot{\varepsilon}$. Welche Größenordnung von deviatorischen Spannungen ergibt sich für das aufsteigende Material unter Annahme einer konstanten Viskosität von 10^{20} Pa.s.

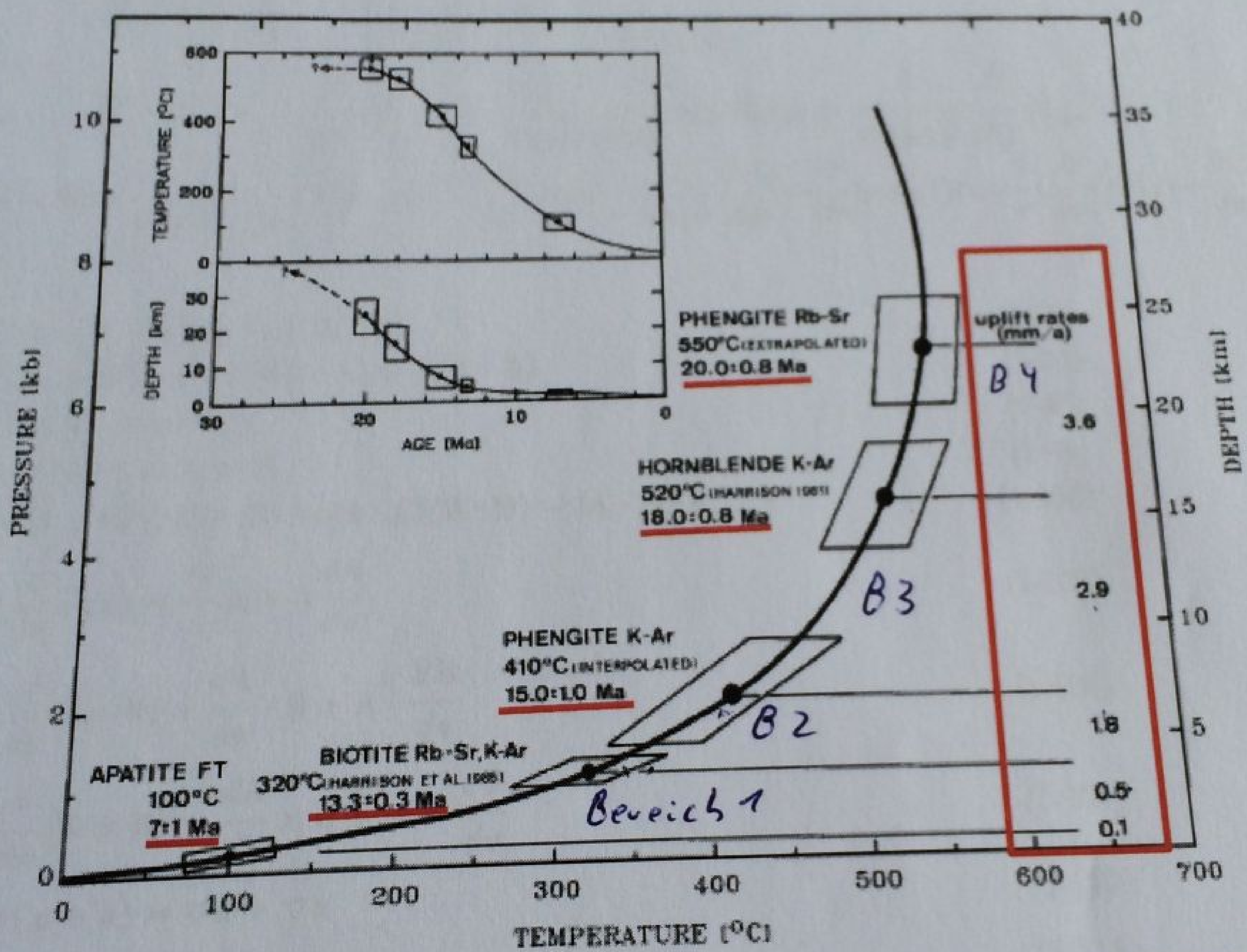


Fig. 5. Pressure-temperature-time path for the Western Tauern Window. Inserts show temperature vs time and depth vs time paths. Closure temperatures are from diffusion-experiments for Ar in biotite and hornblende. Phengite K–Ar is determined by linear interpolation (uniform PT displacement) between biotite and hornblende, phengite Rb–Sr by linear extrapolation

Werkzeugkasten

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{v}$$

$$\frac{Df(\vec{x},t)}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}f$$

$$\vec{e}_z = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta$$

Gauß'scher Satz: $\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \int_F \vec{A}\cdot d\vec{F}$