RUHR
UNIVERSITÄT
BOCHUM

13. Übungsblatt zur Funktionalanalysis (Bonusblatt)

Prof. Dr. Angelika Rohde, Kamil Jurczak SoSe 2015

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei X ein unendlichdimensionaler Banachraum.

a) Sei $T \in \mathcal{L}(X)$ invertierbar. Zeigen Sie: $\Sigma_{T^{-1}} = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \Sigma_T\}$.

b) Sei $T \in \mathcal{L}(X)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie: Gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\|x_n\| = 1$ und $Ax_n - \lambda x_n \to 0$, dann gilt $\lambda \in \Sigma_T$.

c) Sei $T \in \mathcal{L}(X)$ invertierbar und $K \in \mathcal{K}(X)$. Zeigen Sie, dass $T + K$ ein Fredholmoperator ist und bestimmen Sie den Fredholmindex.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei X ein unendlichdimensionaler Banachraum und $K \in \mathcal{K}(X)$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) 0 liegt im Spektrum von K.

b) Sei $n(\lambda)$ die kleinste natürliche Zahl mit $\ker(K - \lambda\mathrm{Id})^{n(\lambda)} = \ker(K - \lambda\mathrm{Id})^{n(\lambda)+1}$. Dann ist das Spektrum von $K\big|_{\mathrm{BILD}(K-\lambda\mathrm{Id})^{n(\lambda)}}$ gegeben durch $\Sigma_K \setminus \{\lambda\}$.

c) Der einzige mögliche Häufungspunkt im Spektrum ist 0.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Seien sh^+ und sh^- die Shiftoperatoren aus der Vorlesung definiert auf ℓ^p, $1 < p < \infty$, das heißt, dass für $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^p$ gilt

$$sh^+(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots),$$
$$sh^-(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Bestimmen Sie das Spektrum der beiden Operatoren.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Der Operator $K : L_2[0,1] \mapsto L_2[0,1]$ sei definiert durch

$$(Kf)(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s)\mathrm{d}s,$$

wobei

$$k(t,s) = \begin{cases} 1, & s \le t, \\ 0, & s > t. \end{cases}$$

Bestimmen Sie das Spektrum.

Abgabetermin: Donnerstag, 16. Juli 2015 vor Beginn der Vorlesung.