9. Übungsblatt zur Funktionalanalysis

Prof. Dr. Angelika Rohde, Kamil Jurczak SoSe 2015

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Zeigen Sie folgende Verallgemeinerung des Satzes von Arzelà-Ascoli:

Seien K ein kompakter metrischer Raum, X ein Banachraum und $S \subset C(K; X)$. Ist S punktweise relativ kompakt und gleichgradig stetig, so ist S relativ kompak. Dabei bedeutet punktweise relativ kompakt, dass für jedes $z \in K$ der topologische Abschluss der Menge $\{f(z) | f \in S\}$ in X kompakt ist.

Hinweis: Folgen Sie dem Beweis des Satzes von Arzelà-Ascoli aus der Vorlesung und überlegen Sie, an welcher Stelle zusätzliche Argumente notwendig sind.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Betragsfunktion $|\cdot| : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ schwach differenzierbar ist. Ist $|\cdot|$ zweimal schwach differenzierbar? Beweisen oder widerlegen Sie.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zeigen Sie:

b) Die Menge $C_c(\Omega; \mathbb{R})$ liegt dicht in $L^p(\Omega; \mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$.

c) Die Menge $L^p(\Omega; X) \cap L^q(\Omega; \mathbb{R})$ liegt dicht in $L^q(\Omega; \mathbb{R})$ für alle $1 \leq q \leq p < \infty$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Eine Menge $Z = \{a = \zeta_0 < \zeta_1 < \cdots < \zeta_r = b\}$ heißt Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, $a \leq b$. Auf $B([0, 1], \mathbb{K})$ definieren wir

$$|f|_Z = \sum_{i=0}^{r-1} |f(\zeta_{i+1}) - f(\zeta_i)|, \quad f \in B([0, 1], \mathbb{K}).$$

Dann ist eine Funktion $f \in B([0, 1], \mathbb{K})$ von beschränkter Variation, falls

$$\sup \left\{ |f|_Z \;\middle|\; Z \text{ ist Zerlegung von } [0, 1] \right\} < \infty.$$

Bezeichne nun $BV([0, 1], \mathbb{K}) \subset B([0, 1], \mathbb{K})$ die Teilmenge aller Funktionen von beschränkter Variation; ferner sei

$$\|f\|_{BV([0,1],\mathbb{K})} = |f(0)| + \sup \left\{ |f|_Z \;\middle|\; Z \text{ ist Zerlegung von } [0, 1] \right\}, \quad f \in BV([0, 1], \mathbb{K}).$$

Darüberhinaus definiere für jede Funktion $f \in BV([0, 1], \mathbb{K})$ und $0 \leq a \leq x \leq 1$

$$V_a^x f = \sup \left\{ |f|_Z \;\middle|\; Z \text{ ist Zerlegung von } [a, x] \right\}.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Der Raum $(BV([0,1],\mathbb{K}), \|\cdot\|_{BV([0,1],\mathbb{K})})$ ist ein Banachraum.
b) V_0^x ist monoton steigend in x.
c) Für $0 \leq x \leq y \leq 1$ gilt $V_0^x f + V_x^y f = V_0^y f$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei $f \in C([0,1];\mathbb{R})$ und $g \in BV([0,1],\mathbb{R})$. Das Riemann-Stieltjes-Integral

$$\int_0^1 f \mathrm{d}g$$

von f bzgl. g ist definiert als die reelle Zahl a mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für jede Zerlegung $Z = \{\zeta_0, \ldots, \zeta_r\}$ der Feinheit kleiner δ, d.h. $|\zeta_{i+1} - \zeta_i| < \delta,\ i = 0, \ldots, r-1$, gilt

$$\left| a - \sum_{i=0}^{r} f(\zeta_i)(g(\zeta_{i+1}) - g(\zeta_i)) \right| < \varepsilon.$$

Beweisen Sie die Existenz des Riemann-Stieltjes-Integrals.

Abgabetermin: Donnerstag, 18. Juni 2015 vor Beginn der Vorlesung.