# 8. Übungsblatt zur Funktionalanalysis

Prof. Dr. Angelika Rohde, Kamil Jurczak SoSe 2015

**Aufgabe 1.** (4 Punkte)

Wie in der Vorlesung seien

$$c = \left\{ x \in \ell^\infty \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} x_n \text{ existiert} \right\}, \quad c_0 = \left\{ x \in c \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}$$

sowie

$$bv = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \,\middle|\, |x_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| < \infty \right\}.$$

a) Beweisen Sie die Inklusion $bv \subset c$.

b) Zeigen Sie, dass $(c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ ein Banachraum ist.

c) Entscheiden Sie, ob $x \mapsto \lim_{n\to\infty} |x_n|$ eine Norm auf $c$ definiert und beweisen Sie Ihre Behauptung.

d) Entscheiden Sie, ob $x \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$ ein Element von $c'$ ist und beweisen Sie Ihre Behauptung.

**Aufgabe 2.** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Dualraum von $c_0$ isometrisch isomorph zu $\ell^1$ ist.

*Hinweis:* Beweisen Sie, dass

$$S : \ell^1 \to (c_0)' \;:\; \mathbf{y} \mapsto S\mathbf{y}, \text{ wobei } S\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i \text{ für } \mathbf{x} \in c_0,$$

ein isometrischer Isomorphismus ist.

**Aufgabe 3.** (4 Punkte)

Sei $\widetilde{I}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ die Menge aller additiven, $\mathbb{K}$-wertigen Abbildungen auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, das heißt

$$\widetilde{I}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) := \left\{ \mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{K} \,\middle|\, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \right\}.$$

Ferner definiere für $\mu \in \widetilde{I}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$

$$|\mu|(\mathbb{N}) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)| \,\middle|\, A_i,\ i = 1, \ldots, n, \text{ paarweise disjunkt und } \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \mathbb{N} \right\}$$

und setze

$$I(\mathbb{N}, \mathbb{K}) := \left\{ \mu \in \widetilde{I}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \,\middle|\, |\mu|(\mathbb{N}) < \infty \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $(I(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{I(\mathbb{N},\mathbb{K})})$ mit $\|\mu\|_{I(\mathbb{N},\mathbb{K})} = |\mu|(\mathbb{N})$ ein Banachraum ist.

**Aufgabe 4.** (4 Punkte)

a) Eine Folge $\mathbf{x} \in \ell^\infty$ (aufgefasst als Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{K}$) heißt Treppenfolge, falls $\mathbf{x}(\mathbb{N})$ endlich ist. Die Menge aller Treppenfolgen bezeichnen wir mit $t$. Zeigen Sie, dass $t$ dicht in $\ell^\infty$ liegt.

b) Für $\mathbf{x} \in t$ und $\mu \in I(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ definieren wir

$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mu(A_i),$$

wobei $A_i = \{j \in \mathbb{N} \mid x_j = \xi_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ und $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Zeigen Sie, dass

$$|\mu(\mathbf{x})| \leq \|\mathbf{x}\|_{\ell^\infty} \|\mu\|_{I(\mathbb{N},\mathbb{K})}.$$

c) Sei $\mu \in I(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $\mathbf{x} \in \ell^\infty$ und $(\mathbf{x}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfolgen, die in $\ell^\infty$ gegen $\mathbf{x}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $\mu : \ell^\infty \to \mathbb{K}$ mit

$$\mu(\mathbf{x}) := \lim_{n \to \infty} \mu(\mathbf{x}^n)$$

wohldefiniert ist.

d) Beweisen Sie: Der Dualraum von $\ell^\infty$ ist isometrisch isomorph zu $I(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

**Abgabetermin:** Donnerstag, 11. Juni 2015 vor Beginn der Vorlesung.