RUHR UNIVERSITÄT BOCHUM RUB

4. Übungsblatt zur Funktionalanalysis

Prof. Dr. Angelika Rohde, Kamil Jurczak SoSe 2015

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Beweisen Sie: Jeder Banachraum mit abzählbarer Basis ist endlichdimensional.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei X ein normierter Vektorraum und $Y \subset X$ ein Untervektorraum.

a) Zeigen Sie, dass

$$x_1 \sim x_2 :\Longleftrightarrow x_1 - x_2 \in Y$$

eine Äquivalenzrelation auf X definert.

b) Es bezeichne $X/_Y$ den zugehörigen Quotientenraum. Dieser sei versehen mit

$$\|[x]\| := \inf\{\|x-y\|_X : \ y \in Y\}, \ [x] \in X/_Y.$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ wohldefiniert ist und genau dann eine Norm auf $X/_Y$ ist, wenn Y abgeschlossen ist.

c) Beweisen Sie: Ist X ein Banachraum und Y abgeschlossen, so ist auch $X/_Y$ ein Banachraum.

d) Sei Y abgeschlossen. Zeigen Sie, dass X genau dann separabel ist, wenn $X/_Y$ und Y separabel sind.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Zwei normierte Vektorräume $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ heißen *isometrisch isomorph*, wenn es einen Isomorphismus $L : X \to Y$ gibt mit $\|x\|_X = \|Lx\|_Y \ \forall x \in X$. Zeigen Sie, dass die Räume ℓ_p' und ℓ_q isometrisch isomorph sind, wobei $1/p + 1/q = 1$ für $1 \le p < \infty$ und $1 < q \le \infty$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Man betrachte den folgenden Unterraum des ℓ_∞

$$X = \left\{ \boldsymbol{x} \in \ell_\infty \ \middle| \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \ \text{ existiert} \right\}$$

und das Funktional

$$MW : X \to \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{x} \mapsto \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

a) Zeigen Sie, dass eine Fortsetzung $x' \in \ell_\infty'$ des Funktionals MW existiert, so dass gilt:

$$x'(\boldsymbol{x}) \le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \forall \boldsymbol{x} \in \ell_\infty.$$

b) Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ sei $\chi_A \in \ell_\infty$ gegeben durch $\chi_A(k) = 1$ für $k \in A$ und $\chi_A(k) = 0$ für $k \in A^C$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ mit $\mu(A) := x'(\chi_A)$ ein normierter Inhalt über $\mathbb{N}$ ist, d.h. μ erfüllt folgende Eigenschaften:

   i) $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \subset \mathbb{N}$,

   ii) $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,

   iii) $\mu(\mathbb{N}) = 1$.

c) Zeigen Sie, dass der Inhalt μ nicht σ-additiv ist, wobei ein Inhalt ν σ-additiv heißt, falls für alle Folgen paarweise disjunkter Mengen $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gilt

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \nu(A_i).$$

Abgabetermin: Donnerstag, 07. Mai 2015 vor Beginn der Vorlesung.