RUHR UNIVERSITÄT BOCHUM RUB

2. Übungsblatt zur Funktionalanalysis

Prof. Dr. Angelika Rohde, Kamil Jurczak SoSe 2015

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Funktion $p_n : X \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:

(i) $p_n(x) \geq 0$ für alle $x \in X$ und zu jedem $x \neq 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $p_n(x) \neq 0$,

(ii) $p_n(x + y) \leq p_n(x) + p_n(y)$ für alle $x, y \in X$,

(iii) $p_n(\lambda x) = |\lambda| p_n(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in X$.

Zeigen Sie, dass

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)}$$

eine Metrik definert.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

a) Zeigen Sie: Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, dann existiert eine gröbste Topologie auf X, die $\mathcal{F}$ enthält.

b) Zeigen Sie, dass jeder metrische Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei X eine Menge, (Y, d_Y) ein metrischer Raum und $\mathcal{B}(X, Y)$ die Menge der beschränkten Funktionen von X nach Y, wobei eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ beschränkt heißt, falls für ein beliebiges $y_0 \in Y$ gilt: $\sup_{x \in X} d_Y(f(x), y_0) < \infty$. Sei $\mathcal{B}(X, Y)$ zudem mit der Metrik

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$$

versehen.

a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathcal{B}(X, Y)$ definiert.

b) Beweisen Sie: (Y, d_Y) ist genau dann vollständig, wenn $(\mathcal{B}(X, Y), d)$ vollständig ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Zwei Metriken auf einer Menge X heißen *äquivalent*, wenn sie dieselbe Topologie induzieren. Für eine beliebige Metrik d auf X bezeichne $U_d(x, \delta) := \{y \in X : \ d(x, y) < \delta\}, \ \delta > 0$.

a) Zeigen Sie, dass für zwei Metriken d, d' auf X folgende Eigenschaften äquivalent sind:

(i) d und d' sind äquivalent.

(ii) Für alle $x \in X$ und alle $\varepsilon > 0$ existieren $\delta, \delta' > 0$, so dass

$$U_d(x, \delta) \subset U_{d'}(x, \varepsilon), \quad U_{d'}(x, \delta') \subset U_d(x, \varepsilon).$$

(iii) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in (X, d) genau dann, wenn sie in (X, d') konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass die Metriken d,

$$d' := \min(d, 1) \quad \text{und } d'' := \frac{d}{1+d}$$

auf X äquivalent sind.

Abgabetermin: Donnerstag, 23. April 2015 vor Beginn der Vorlesung.