RUHR UNIVERSITÄT BOCHUM

1. Übungsblatt zur Funktionalanalysis

Prof. Dr. Angelika Rohde, Kamil Jurczak SoSe 2015

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Hausdorffraum. Beweisen Sie, dass dann auch folgende Trennungseigenschaften gelten:

a) Zu jedem $x \in X$ und jeder kompakten Menge $K \subset X$, $x \notin K$, existieren offene Mengen U und V, so dass $x \in U$, $K \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$.

b) Seien K_1 und K_2 zwei beliebige disjunkte kompakte Mengen. Dann gibt es offene Mengen $K_1 \subset U_1$ und $K_2 \subset U_2$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 1.14 aus der Vorlesung: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist kompakt.

(ii) Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie abgeschlossener Mengen mit der Eigenschaft $\bigcap_{i \in J} A_i \neq \emptyset$ für jede endliche Teilmenge $J \subset I$. Dann gilt $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Zeigen Sie: Ein kompakter Hausdorffraum, dessen Topologie dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt, ist folgenkompakt.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

a) Beweisen Sie Satz 1.21(i): Sei $(X, \mathcal{T}_1)$ hausdorffsch, $(X, \mathcal{T}_2)$ kompakt und $\mathcal{T}_1$ gröber als $\mathcal{T}_2$. Dann gilt $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

b) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Hausdorffraum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Beweisen Sie, dass die Quotiententopologie auf $X/_\sim$ nur dann hausdorffsch sein kann, wenn die Äquivalenzrelation abgeschlossen ist.

Abgabetermin: Donnerstag, 16. April 2015 vor Beginn der Vorlesung.